

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 05 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 . Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

β) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

γ) Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G

είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3^x$ και $g(x)=-x^2+9x-5$

B1. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_g που διέρχονται από το σημείο $A(1,4)$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 9

B3. Να υπολογίσετε τα όρια: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}$ και $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+1)-f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}$.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x^2+1}{f(x)+1} dx$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο, $\alpha \neq \beta \neq 0$, $f(\alpha) = \beta$ και $f'(x) < 0$ για $x \in [\alpha, \beta]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Μονάδες 4

Γ2. Αν η f^{-1} είναι συνεχής και ισχύει $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε:

α. Να υπολογίσετε το $f(\beta)$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο

$A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x - y + 2016 = 0$.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

Μονάδες 6

β. Υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και g για τις οποίες ισχύουν:

- $g(x) = \frac{x}{2 \ln x}$
- $f(e) = 0$
- $f'(x) = \frac{f(x)}{x} - e^{\frac{f(x)}{x}}$, για κάθε $x > 1$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = -x \cdot \ln(\ln x)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x = e^2$ και $x = e^\lambda$ με $\lambda > 2$.

Μονάδες 6

β. Αν ο αριθμός λ με $\lambda > 2$ μεταβάλλεται με ρυθμό e^{-6} μονάδες/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\lambda)$ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $\lambda = 3$.

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 7) - f(5x + 1) > 5x - x^2 - 6$.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με Μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3ΣΕΛΙΔΕΣ