Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελ. 217.

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 141.

Α3. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελ. 246.

Α.4

α	β	γ	δ	ε
Σωστό	Σωστό	Λάθος	Λάθος	Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $g'(x)=-2x+9$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο τυχαίο σημείο της $M(x_0,g(x_0))$ είναι

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται η εφαπτομένη από το Α(1,4) πρέπει να ισχύει :

$4-g(x_0)=g'(x_0)(1-x_0)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_0^{\,2}-2x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=2$.

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο Α(1,4).

Μία στο σημείο $M(0,-5)$ με εξίσωση $y=9x-5$ και μία στο σημείο $M'(2,9)$ με εξίσωση $y=5x-1$.

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x)=f(x)-g(x)=3^x+x^2-9x+5$, $x\in\mathbb{R}$.

Η **w** είναι παραγωγίσιμη στο $x\in\mathbb{R}$**,** με $w'(x)=3^x\ln3+2x-9$, $x\in\mathbb{R}$.

Και η w' είναι παραγωγίσιμη στο $x\in\mathbb{R}$, με $w''(x)=3^x\ln^2 3+2>0$.

Παρατηρούμε ότι $w(1)=w(2)=0$.

Θα δείξουμε ότι η $w(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες. Έστω ότι η $w(x)=0$ έχει 3 ρίζες έστω τις ρ_1,ρ_2,ρ_3 .

Τότε επειδή η w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$**,** είναι και συνεχής.

Ακόμα $w(\rho_1)=w(\rho_2)=w(\rho_3)=0$ Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle στα διαστήματα των ριζών της η $w'(x)=0$ θα έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα Rolle στα διαστήματα των ριζών της w' βρίσκουμε ότι η $w''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα, που είναι άτοπο (αφού $w''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$**).** Άρα η $w(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, οπότε οι C_f,C_g έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε(1,3) και Ζ(2,9).

Β3. $$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot3^x+5\cdot3^x-2^x}{3\cdot3^x+3^x+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\cdot3^x-2^x}{4\cdot3^x+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{4+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=2$$

$$B=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x+1)+5f(x)-2^x}{f(x+1)+f(x)+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\cdot3^x+5\cdot3^x-2^x}{3\cdot3^x+3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8\cdot3^x-2^x}{4\cdot3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{4\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}=-1$$

Β4. Είναι $I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}dx$. Θέτοντας στο $I(\alpha)$ όπου x το $-x$ έχουμε

$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{-\alpha}\frac{x^2+1}{3^{-x}+1}(-1)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}\cdot3^x dx$. Τότε

$$I(\alpha)+I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}dx+\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x^2+1}{3^x+1}\cdot e^3dx\Leftrightarrow2I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(x^2+1)(3^x+1)}{3^x+1}dx\Leftrightarrow2I(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^2+1)dx\Leftrightarrow$$

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-\alpha}^{\alpha}\Leftrightarrow I(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^3}{3}+\alpha-\left(-\frac{\alpha^3}{3}-\alpha\right)\right]\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\alpha^3}{3}+\alpha\right)\right]=\frac{\alpha^3}{3}+\alpha.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση έχουμε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]\Leftrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο [α, β] άρα η f είναι «1 – 1» δηλαδή αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f κι αφού η f είναι γνησίως

φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της, τότε $D_{f^{-1}}=f([\alpha,\beta])=[f(\beta),f(\alpha)]=[f(\beta),\beta]$.

Γ2.α. Η ζητούμενη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0\quad(1)$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx$, θέτουμε $x=f(t)$

- Για $x=f(\alpha)\Leftrightarrow f(t)=f(\alpha)\Leftrightarrow t=\alpha$
- Για $x=f(\beta)\Leftrightarrow f(t)=f(\beta)\Leftrightarrow t=\beta$
- $dx=f'(t)dt$

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f^{-1}(f(t))f'(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}t\cdot f'(t)dt=\left[t\cdot f(t)dt\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}(t)'\cdot f(t)dt=$$

$$\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt=\beta f(\beta)-\alpha\beta-\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0 \Leftrightarrow \beta f(\beta)-\alpha\beta-\cancel{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt}+\cancel{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\beta(f(\beta)-\alpha)=0 \overset{\beta\neq 0}{\Leftrightarrow} f(\beta)=\alpha$$

β. Η δοσμένη ευθεία γράφεται διαδοχικά: (ε_1):$y=x+2016$ με $\lambda_1=1$. Έστω ε_2 η εφαπτόμενη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$. Η ε_2 είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1 \Leftrightarrow \lambda_1\cdot f'(x_0)=-1 \Leftrightarrow f'(x_0)=-1$

- Η f είναι συνεχής στο [α, β]
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

Από Θ. Μ. Τ. έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f'(x_0)=-1$$

Γ3. α. Θεωρούμε συνάρτηση: $h(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$

- Η h είναι συνεχής στο [α, β] ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- $h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha \Leftrightarrow h(\alpha)=\beta-\alpha$
- $h(\beta)=f(\beta)-\beta \Leftrightarrow h(\beta)=\alpha-\beta$

Άρα $h(\alpha)\cdot h(\beta)=(\beta-\alpha)(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)^2<0$

Από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει ότι: $h'(x)=(f(x)-x)' \Rightarrow h'(x)=f'(x)-1<0$ αφού $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

β.

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\xi]$ και στο $[\xi,\beta]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,ξ) και στο (ξ,β)

Από το Θ. Μ. Τ. έχουμε ότι:

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha,\xi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{\xi-\beta}{\xi-\alpha}$

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\xi,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi} \Leftrightarrow f'(\xi_2)=\dfrac{\alpha-\xi}{\beta-\xi}$

Τελικά:

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{\xi-\beta}{\xi-\alpha}\cdot\frac{\alpha-\xi}{\beta-\xi}=\frac{\cancel{\beta-\xi}}{\cancel{\alpha-\xi}}\cdot\frac{\cancel{\alpha-\xi}}{\cancel{\beta-\xi}}=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει ότι: $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$. Θέτουμε όπου x το e^x. Οπότε παίρνουμε: $\ln e^x\le e^x-1\Leftrightarrow x\le e^x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$ (1).

Έτσι από την (1) αν θέσουμε όπου x το $\frac{f(x)}{x}$ έχουμε: $e^{\frac{f(x)}{x}}\ge\frac{f(x)}{x}+1\Rightarrow\frac{f(x)}{x}-e^{\frac{f(x)}{x}}\le-1<0$.

Επομένως $f'(x)\le-1<0$ (2), συνεπώς η f γνησίως φθίνουσα στο $A=(1,+\infty)$.

Δ2. Θέτουμε $h(x)=\frac{f(x)}{x}$. Τότε: $(x\cdot h(x))'=h(x)-e^{h(x)}\Leftrightarrow \cancel{h(x)}+xh'(x)=\cancel{h(x)}-e^{h(x)}\Leftrightarrow xh'(x)=-e^{h(x)}$

$\Leftrightarrow -h'(x)e^{-h(x)}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(e^{-h(x)}\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow e^{-h(x)}=\ln x+c$ (3).

Όμως το $f(e)=0\Leftrightarrow\frac{f(e)}{e}=0\Leftrightarrow h(e)=0$ και άρα από τη σχέση (3) έχουμε: $e^0=\ln e+c\Leftrightarrow c=0$.

Τελικά $e^{-h(x)}=\ln x\Leftrightarrow -h(x)=\ln(\ln x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=-\ln(\ln x)\Leftrightarrow f(x)=-x\cdot\ln(\ln x)$ με $x>1$.

Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(1,+\infty)$ οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x\ln(\ln x))=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}(\ln(\ln x))\overset{u=\ln x}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim_{u\to+\infty}(\ln(u))=+\infty$	$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x\ln(\ln x))=(-1)\cdot(-\infty)=+\infty$ $\lim_{x\to1^+}(\ln(\ln x))\overset{u=\ln x}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim_{u\to0^+}(\ln(u))=-\infty$

Δ3.α. Το ζητούμενο εμβαδόν χωρίου δίνεται από τη σχέση:

$E(\lambda)=\int_{e^2}^{e^\lambda}|f(x)-g(x)|dx$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(1,+\infty)$ κι αφού $f(e)=0$ έχουμε για $x>e\Leftrightarrow f(x)<f(e)=0$. Οπότε η $f(x)$ είναι αρνητική στο $\left[e^2,e^\lambda\right]$.

Για x>1 ισχύει lnx>0. Οπότε η συνάρτηση g είναι θετική στο διάστημα $\left[e^2,e^\lambda\right]$. Συνεπώς:

$f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\left[e^2,e^\lambda\right]$, οπότε : $E(\lambda)=\int_{e^2}^{e^\lambda}-(f(x)-g(x))dx=\int_{e^2}^{e^\lambda}g(x)-f(x)dx$

$$=\int_{e^2}^{e^\lambda}\left[\frac{x}{2\ln x}+x\ln(\ln x)\right]dx==\int_{e^2}^{e^\lambda}\left[\frac{x^2}{2}(\ln(\ln x))'+\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln(\ln x)\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}(\ln(\ln x))\right]_{e^2}^{e^\lambda}$$

$$\frac{e^{2\lambda}}{2}\left(\ln\left(\ln e^\lambda\right)\right)-\frac{e^4}{2}\left(\ln\left(\ln e^2\right)\right)=\frac{e^{2\lambda}}{2}(\ln\lambda)-\frac{e^4}{2}(\ln2)$$

Δ3. β. Δίνονται $\lambda(t_0)=3$ και $\lambda'(t)=e^{-6}$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού δίνεται από τη παράγωγο της συνάρτησης $E(\lambda)=\frac{e^{2\lambda}}{2}(\ln\lambda)-\frac{e^4}{2}(\ln 2)$ όπου το λ είναι συνάρτηση του χρόνου. Έχουμε:

$$E'(\lambda(t))=\left(\frac{e^{2\lambda(t)}}{2}(\ln\lambda(t))-\frac{e^4}{2}(\ln 2)\right)'=\lambda'(t)e^{2\lambda(t)}\ln\lambda(t)+\frac{\lambda'(t)e^{2\lambda(t)}}{2\lambda(t)}=\lambda'(t)\left(e^{2\lambda(t)}\ln\lambda(t)+\frac{e^{2\lambda(t)}}{2\lambda(t)}\right)$$

Για $t=t_0$ έχουμε: $E'(3)=e^{-6}\left(e^6\ln 3+\frac{e^6}{6}\right)=\ln 3+\frac{1}{6}$.

Δ4. Η δοσμένη ανίσωση μετασχηματίζεται ως εξής:

$f(x^2+7)+x^2+6>f(5x+1)+5x\Leftrightarrow f(x^2+7)+x^2+7>f(5x+1)+5x+1\,(4)$ και αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(1,+\infty)$ πρέπει $\begin{cases}x^2+7>1\\5x+1>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>-6\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f(x)+x$ με $x>1$.

Η συνάρτηση k είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $k'(x)=f'(x)+1\le 0$ από (2).

Άρα η k είναι γνησίως φθίνουσα στο Α. Από την (4) έχουμε:

$k(x^2+7)>k(5x+1)\overset{k\downarrow}{\Leftrightarrow}x^2+7<5x+1\Leftrightarrow x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3$ και αφού $x>0$ τότε οι λύσεις είναι: $2<x<3$.

Μερικές Γενικές Παρατηρήσεις:

- Τα **Σωστά – Λάθος** γράφονται ολογράφως (αλλιώς υπάρχει κίνδυνος να μην βαθμολογηθούν!)
- Οι εφαρμογές του σχολικού βιβλίου θεωρούνται βασικές και αποτελούν πολλές φορές τις κεντρικές ιδέες για θέματα πανελλαδικών εξετάσεων
- Ο καθολικός $(\forall)$ και υπαρξιακός $(\exists)$ ποσοδείκτης δεν αποτελούν σύμβολα της ύλης του σχολικού βιβλίου και **δεν** μπορούν επομένως να χρησιμοποιηθούν
- Οι επεξηγήσεις των βημάτων που εκτελούνται κατά την διαδικασία επίλυσης των θεμάτων (π.χ. πως υπολογίστηκε ένα όριο) είναι εντελώς απαραίτητες
- Η καλή εμφάνιση του γραπτού προκαταβάλλει θετικά τους βαθμολογητές (αρνητικά σε αντίθετη περίπτωση)

Ο ΣΥΛΛΟΓΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΤΟΥ ΓΕΛ ΑΡΧΑΓΓΕΛΟΥ ΣΑΣ ΕΥΧΕΤΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ