ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. $\varepsilon: y=(\alpha^2-\alpha+\sqrt{3})x+1$. Ισχύει ότι $\lambda=\varepsilon\varphi 60^\circ \Leftrightarrow (\alpha^2-\alpha+\sqrt{3})=\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha=0 \Leftrightarrow$

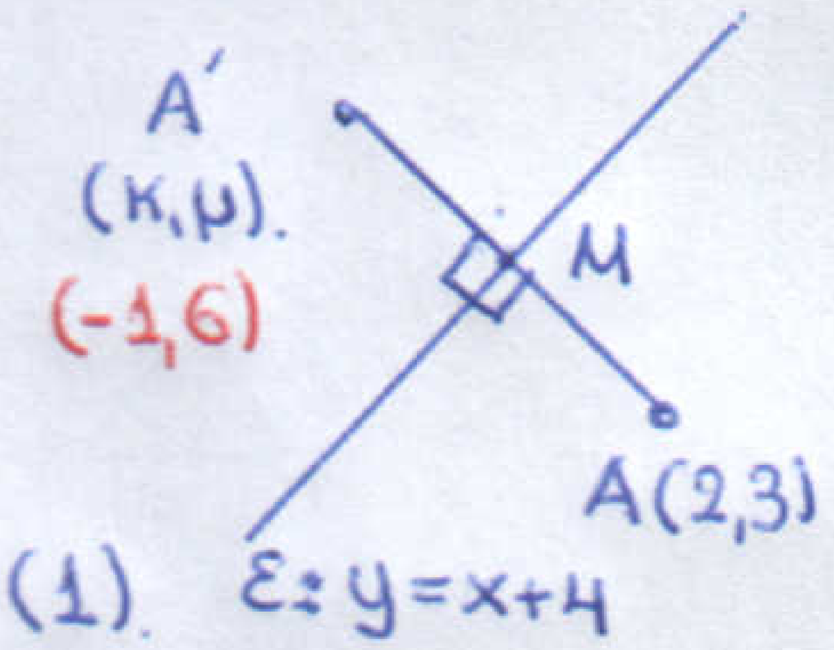
$\alpha\cdot(\alpha-1)=0$ άρα $\boxed{\alpha=0}$ ή $\alpha-1=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$

---

2. A. Αφού $\varepsilon\perp\delta$ τότε $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow 1\cdot\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_\delta=-1}$

$\delta: y-y_A=\lambda_\delta\cdot(x-x_A) \Leftrightarrow y-3=-1\cdot(x-2) \Leftrightarrow y-3=-x+2 \Leftrightarrow \boxed{y=-x+5}$

B. Έστω $A'(\kappa,\mu)$ το συμμετρικό του A.



• Ισχύει: $AA'\perp\varepsilon$ άρα $\lambda_{AA'}\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow \dfrac{\mu-3}{\kappa-2}=-1 \Leftrightarrow \mu-3=-\kappa+2 \Leftrightarrow \boxed{\mu+\kappa=5}$ (1). $\varepsilon: y=x+4$

• Το μέσο M του AA' επαληθεύει την ε. $M\left(\dfrac{x_A+x_{A'}}{2},\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}\right)$ ή $\left(\dfrac{\kappa+2}{2},\dfrac{\mu+3}{2}\right)$

οπότε: $y_M=x_M+4 \Leftrightarrow \dfrac{\mu+3}{2}=\dfrac{\kappa+2}{2}+4 \Leftrightarrow \mu+3=\kappa+2+8 \Leftrightarrow \boxed{\mu-\kappa=7}$ (2)

Ε.ΚΠ.=2

Λύνω το σύστημα των (1),(2) και έχω:

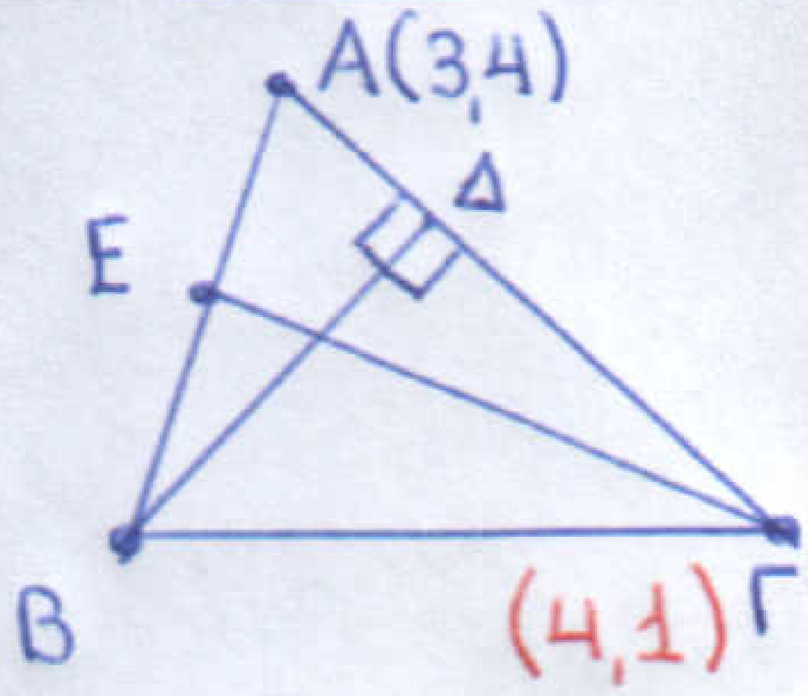
$\mu+\cancel{\kappa}=5$

$\mu-\cancel{\kappa}=7$ +

$2\mu=12 \Leftrightarrow \boxed{\mu=6}$ και $6+\kappa=5 \Leftrightarrow \kappa=5-6 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=-1}$ άρα $\boxed{A'(-1,6)}$

---

3. (A) Αφού $B\Delta\perp\Gamma A$ άρα $\lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{\Gamma A}=-1$



όμως $B\Delta: x-3y+5=0 \Leftrightarrow 3y=x+5 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$

με $\lambda_{B\Delta}=\dfrac{1}{3}$. Οπότε: $\dfrac{1}{3}\cdot\lambda_{\Gamma A}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma A}=\dfrac{-1}{\frac{1}{3}}=-3$

$A\Gamma: y-y_A=\lambda_{A\Gamma}\cdot(x-x_A) \Leftrightarrow y-4=-3\cdot(x-3) \Leftrightarrow y-4=-3x+9 \Leftrightarrow \boxed{A\Gamma: y=-3x+13}$

(B) Για τις συντεταγμένες του Γ λύνω το σύστημα των ΑΓ, ΓΕ.

$\left.\begin{aligned} A\Gamma&: y=-3x+13 \\ \Gamma E&: y=-x+5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow -x+5=-3x+13 \Leftrightarrow 3x-x=13-5 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow \boxed{x=4}$

και $y=-4+5$ άρα $\boxed{y=1}$ $\boxed{\Gamma(4,1)}$

(Γ) Το E μέσο του AB άρα $E\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\dfrac{3+x_B}{2},\dfrac{4+y_B}{2}\right)$

Το E επαληθεύει την ΓΕ οπότε: $\dfrac{4+y_B}{2}=-\dfrac{3+x_B}{2}+5 \Leftrightarrow$ ΕΚΠ: 2

$4+y_B=-3-x_B+10 \Leftrightarrow \boxed{y_B+x_B=3}$ (1) (Συνέχεια στην σελίδα 2)

3Γ. (συνέχεια από σελίδα 1)

Το Β επαληθεύει την ΒΔ: $\boxed{x_B-3y_B+5=0}$ (2)

Λύνω το σύστημα των (1),(2) και έχω:

$$\begin{aligned} x_B+y_B&=3\\ x_B-3y_B&=-5 \quad (-)\\ \hline 4y_B=8 &\Leftrightarrow \boxed{y_B=2} \end{aligned}$$

και $x_B+2=3 \Leftrightarrow \boxed{x_B=1}$ Άρα $B(1,2)$

---

4. Α. Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά.

Αρκεί $\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\neq 0$.

$\vec{AB}=(2-\kappa-1-\kappa,\ 4-2\kappa) \Leftrightarrow \vec{AB}=(1-2\kappa,\ 4-2\kappa)$

$\vec{A\Gamma}=(-1-1-\kappa,\ 2-2\kappa) \Leftrightarrow \vec{A\Gamma}=(-2-\kappa,\ 2-2\kappa)$

$$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=\begin{vmatrix}1-2\kappa & 4-2\kappa\\ -2-\kappa & 2-2\kappa\end{vmatrix}=(1-2\kappa)(2-2\kappa)-(4-2\kappa)\cdot(-2-\kappa) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})&=(2-2\kappa-4\kappa+4\kappa^2)-(-8-\cancel{4\kappa}+\cancel{4\kappa}+2\kappa^2)\\ &=2-2\kappa-4\kappa+4\kappa^2+8-2\kappa^2\\ &=2\kappa^2-6\kappa+10\neq 0,\ \text{με } \Delta=(-6)^2-4\cdot 2\cdot 10=36-80=-44<0\end{aligned}$$

Β. Πρέπει $(AB\Gamma)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=5 \Leftrightarrow |\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})|=10$.

Άρα $|2\kappa^2-6\kappa+10|=10$.

- $2\kappa^2-6\kappa+10=10 \Leftrightarrow 2\kappa^2-6\kappa=0 \Leftrightarrow 2\kappa(\kappa-3)=0$ άρα $\boxed{\kappa=0}$ ή $\boxed{\kappa=3}$
- $2\kappa^2-6\kappa+10=-10 \Leftrightarrow 2\kappa^2-6\kappa+20=0$ με $\Delta=(-6)^2-4\cdot 2\cdot 20=36-160=-124<0$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

---

5. Έστω $\varepsilon: y-y_A=\lambda\cdot(x-x_A) \Leftrightarrow y-2=\lambda\cdot(x-0) \Leftrightarrow y=\lambda x+2 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon: \lambda x-y+2=0}$

Ισχύει: $d(B,\varepsilon)=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda\cdot 1-(-3)+2|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda+5|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |\lambda+5|=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}$

$\Leftrightarrow |\lambda+5|^2=(3\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{\lambda^2+1}^2 \Leftrightarrow (\lambda+5)^2=3^2\cdot\sqrt{2}^2(\lambda^2+1) \Leftrightarrow \lambda^2+10\lambda+25=9\cdot 2\cdot(\lambda^2+1) \Leftrightarrow$

$0=18\lambda^2+18-\lambda^2-10\lambda-25 \Leftrightarrow 0=17\lambda^2-10\lambda-7=0$.

$\Delta=(-10)^2-4\cdot 17\cdot(-7)=100+476=576>0$ με $\lambda_{1,2}=\dfrac{10\pm 24}{2\cdot 17}$, $\lambda_1=\dfrac{34}{34}=1$, $\lambda_2=\dfrac{-14}{34}=-\dfrac{7}{17}$

Άρα $\boxed{\varepsilon: y=x+2}$ ή $\boxed{\varepsilon: y=-\frac{7}{17}x+2}$

- Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το Α η $x=0$ <u>απορρίπτεται</u> αφού $d(B,\varepsilon)=1$.

6. Έστω $A(1+t, 2t)$ $t\in\mathbb{R}$.

Θέτω $x=1+t \Leftrightarrow t=x-1$ (1)

$y=2t \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y=2(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y=2x-2}$ η ευθεία στην οποία κινούνται τα σημεία A για $t\in\mathbb{R}$.

7. $\varepsilon_1: y=\sqrt{3}\cdot(x+2) \Leftrightarrow y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x-y+2\sqrt{3}=0 \parallel \vec{\delta}_1=(B,-A)=(-1,-\sqrt{3})$

$\varepsilon_2: \sqrt{3}y=x-4 \Leftrightarrow 0=x-\sqrt{3}y-4=0 \parallel \vec{\delta}_2=(B,-A)=(-\sqrt{3},-1)$

Άρα $\text{συν}(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})=\dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$ (οξεία γωνία)

ή $180^\circ-30^\circ=150^\circ$ (αμβλεία)

$\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=-1\cdot(-\sqrt{3})+(-\sqrt{3})(-1)=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$|\vec{\delta}_1|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ και $|\vec{\delta}_2|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

8. (1) $(\alpha^2+2\alpha)\cdot x-(\alpha^2+\alpha+1)\cdot y-\alpha^2-2=0$ με $A=\alpha^2+2\alpha$, $B=-(\alpha^2+\alpha+1)$, $\Gamma=-\alpha^2-2$

A) Για να παριστάνει ευθεία πρέπει $A\neq 0$ ή $B\neq 0$.

Όμως $B=-(\alpha^2+\alpha+1)\neq 0$ αφού $\Delta=1-4=-3<0$.

B) Θέτω $\alpha=0$ στην (1): $-y-2=0 \Leftrightarrow y=-2$

$\alpha=-1$ στην (1): $-x-y-3=0 \Leftrightarrow -x-(-2)-3=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Το σημείο $K(-1,2)$ επαληθεύει την (1):

$(\alpha^2+2\alpha)\cdot(-1)-(\alpha^2+\alpha+1)(-2)-\alpha^2-2=0 \Leftrightarrow -\alpha^2-2\alpha+2\alpha^2+2\alpha+2-\alpha^2-2=0 \Leftrightarrow 0=0$

άρα το σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της (1) είναι $\boxed{K(-1,-2)}$.

Γ) Αφού η ευθεία ανήκει στην (1) θα διέρχεται από το $K(-1,-2)$ άρα θα έχει μορφή: $y-y_K=\lambda\cdot(x-x_K) \Leftrightarrow y-(-2)=1\cdot(x+1) \Leftrightarrow$

$\varepsilon': x-y+3=0 \Leftrightarrow \boxed{y=x+3}$ $\qquad y=x+1-2 \Leftrightarrow \boxed{y=x-1}$

Δ) Το $K(-1,-2)$ δεν επαληθεύει την ευθεία: $-2\neq 2\cdot(-1)+1 \Leftrightarrow -2\neq -2+1 \Leftrightarrow -2\neq -1$

άρα η $y=2x+1$ δεν ανήκει στην (1).

E) Αφού η ευθεία είναι $\parallel xx'$ άρα θα έχει $\lambda=0$.

οπότε: $y-y_K=\lambda\cdot(x-x_K) \Leftrightarrow y-(-2)=0 \Leftrightarrow y+2=0 \Leftrightarrow \boxed{y=-2}$

9 Α.

Α) Λύνω το σύστημα των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. $\begin{cases} y=x+3 \\ y=-2x+6 \end{cases}$ $x+3=-2x+6 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$

$\varepsilon_1: y=x+3$, $\varepsilon_2: y=-2x+6$. και $y=1+3 \Leftrightarrow y=4$

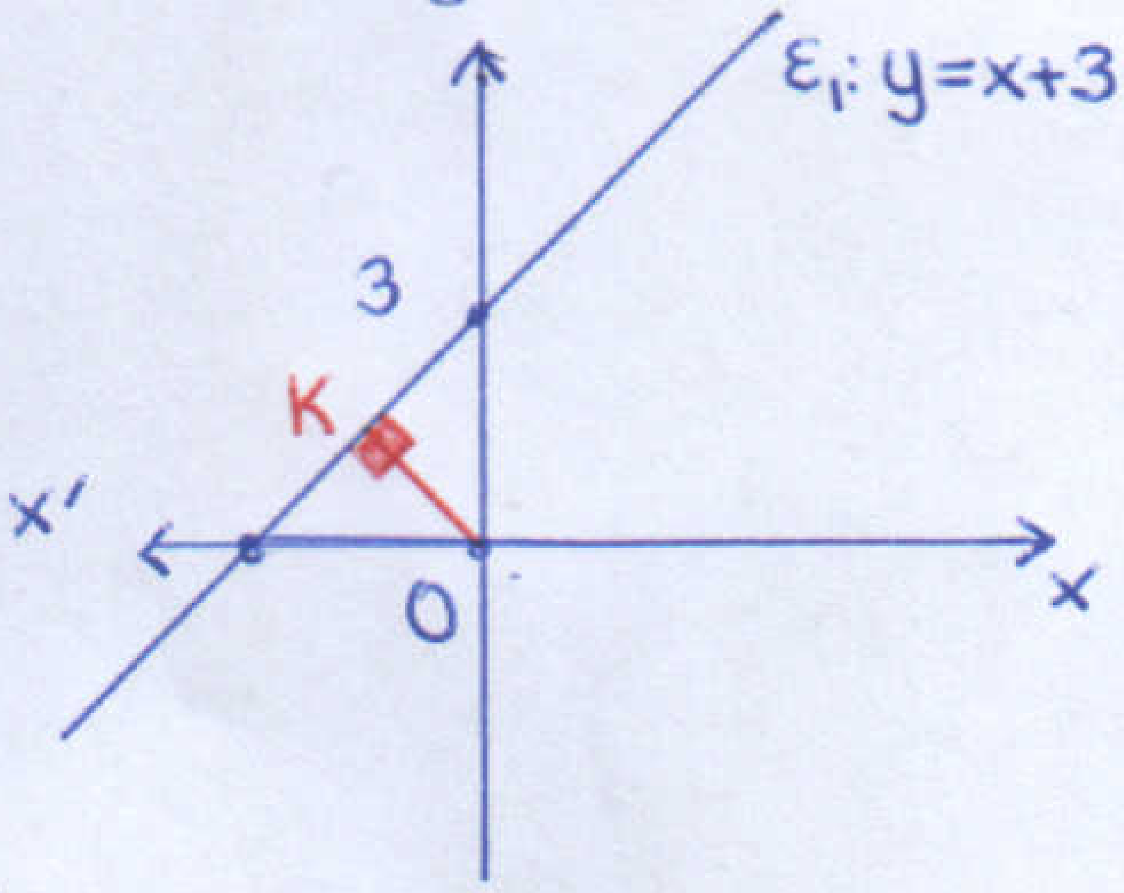
το σημείο τομής $A(1,4)$.

Β) $\eta: 3x+2y-5=0 \Leftrightarrow 2y=-3x+5 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ με $\lambda_\eta=-\frac{3}{2}$

Αφού $\eta \perp \varepsilon$ τότε $\lambda_\eta \cdot \lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\frac{-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$

άρα $\varepsilon: y-y_A=\lambda_\varepsilon \cdot (x-x_A) \Leftrightarrow y-4=\frac{2}{3}\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+4 \Leftrightarrow$

$\boxed{\varepsilon: y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}}$



Γ) Φέρνω $OK \perp \varepsilon_1$ και K το σημείο της ε_1 που απέχει την μικρότερη απόσταση από το O.

• Βρίσκω την εξίσωση της OK, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα $OK: y=\lambda x$.

• $OK \perp \varepsilon_1$ άρα $\lambda_{OK} \cdot \lambda_{\varepsilon_1}=-1 \Leftrightarrow \lambda \cdot 1=-1 \Leftrightarrow \lambda=-1$ άρα $OK: y=-x$

• Λύνω το σύστημα των OK, ε_1

$\begin{cases} y=x+3 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow -x=x+3 \Leftrightarrow -3=2x \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ και $y=-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ άρα $K\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

---

10 Α) $x^2-y^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (x^2+6x+9)-y^2=0 \Leftrightarrow (x+3)^2-y^2=0 \Leftrightarrow$

$(x+3-y)(x+3+y)=0$ άρα $\varepsilon_1: x+3-y=0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1: y=x+3}$

$\varepsilon_2: x+3+y=0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2: y=-x-3}$

• Ο ορισμός ως $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι τυχαίος.

Β) $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2}=1\cdot(-1)=-1$ άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Γ) 1η περίπτωση.

Έστω $\vec{\alpha}=(3,\kappa) \parallel \varepsilon_1$ τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{3}=1 \Leftrightarrow \kappa=3>0$ Δεκτή.

$\vec{\beta}=(-16,\lambda) \parallel \varepsilon_2$ τότε $\lambda_{\vec{\beta}}=\lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{-16}=-1 \Leftrightarrow \lambda=16>0$ Δεκτή

Άρα $M(3,16)$.

2η περίπτωση

Έστω $\vec{\alpha}=(3,\kappa) \parallel \varepsilon_2$ τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{3}=-1 \Leftrightarrow \kappa=-3<0$ Απορρίπτεται.