Επαναληπτικά θέματα

1. Δίνεται η συνάρτηση f : R→ R, παραγωγίσιμη στο R.Επιπλέον ηfδιέρχεται από το σημείο A(0,2) ενώ η κλίση της σε κάθε σημείο της M(x,f(x)) είναι :$\frac{x-1}{f(x)}$

α. Να αποδείξετε ότι: f(x)=$\sqrt{x^2-2x+4}$, $x\epsilon R$

β. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι : |f'(x)|<1 για κάθε xϵR

γ. Να λύσετε την εξίσωση: f(f(x)+x)=f(x)+x , xϵR.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\epsilon$ (0,2) , τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_fστο σημείο M(x_0,f(x_0)) να διέρχεται από το σημείο N(-1,2).

2. Δίνεται η συνάρτηση f: (0,+∞) → Rμε f(1)=1 και παραγωγίσιμη στο (0,+∞), επιπλέον ισχύει : xf'(x)-f(x)=x-1 για κάθε x>0.

α. Να αποδείξετε ότι: f(x)=xlnx+1 για κάθε x>0 και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι : 1+lnx<(x+1)ln(x+1)-xlnx<ln(x+1)+1, για κάθε x>1.

γ. Να αποδείξετε ότι : i) $\frac{lnx}{x-1} > \frac{1}{x}$ για κάθε x>1

ii) $\sqrt{(x^{2020}+1)\ln(x^{2020}+1)} \geq x^{1010}$για κάθε x$\epsilon$R.

δ. Για τη συνάρτηση g(x)=f$\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{f(x)}{x}$με x>0, να δείξετε ότι: ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_gμεγιστοποιείται σε σημείο της C_gτου οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα (e,3).

3. Δίνεται η συνάρτηση f:R→R , παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $e^{f(x)}+e^xf(x)=xe^x-1$, για κάθε xϵR.

α. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

β. Να δείξετε ότι: -2<f(0)<-1

γ. i) Αν για δύο συναρτήσεις h,g :R→Rισχύει ότι

- h∘ g είναι γνησίως αύξουσα.

- h γνησίως αύξουσα.

Τότε να δείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα

ii) Να δείξετε ότι :fγνησίως αύξουσα στο R.

δ. Να δείξετε ότι: $f(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)<-1$ για κάθε $x\epsilon R$.

ε. i) Να δείξετε ότι $f(x)<x$για κάθε $x\epsilon R$.

ii) Να βρείτε το: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, gμε f, g :(0,+∞) →R, επιπλέον ισχύουν ότι:

- $g(1)=0$
- H C_f εφάπτεται της ευθείας $y=1/2$
- $X^4f'(x)+2x\ln x=0$ για κάθε $x>0$
- $e^{\frac{g(x)}{x}}(xg'(x)-g(x))=x^2$ για κάθε $x>0$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x)=\frac{2lnx+1}{2x^2}$, $x>0$

β. Να εξετάσετε την fως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ. $g(x)=x\ln x$, $x>0$

δ. οι C_f και C_gέχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.

5. Δίνεται η συνάρτηση f:R→Rπαραγωγίσιμημε f(0)=1, επιπλέον ισχύει ότι:

$f(x)\leq e^x+\ln(x^2+1)$, για κάθε $x\epsilon R$

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_fστο σημείο που αυτή τέμνει τον y'y.

β. Αν ισχύει ακόμα ότι : $f^2(x)-2xf(x)=1$ για κάθε $x\epsilon R$, να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, $x\epsilon R$

γ. Να υπολογίσετε τα όρια: $L_1=\lim_{x\to-\infty} lnf(x)$και $L_2=\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\ (x)}{x}$

δ. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$, $x\epsilon R$. Να δείξετε ότι $g'(x)\leq 1$για κάθε $x\epsilon R$και στη συνέχεια ότι: $g(x)\leq x-1+\ln(1+\sqrt{2})$για κάθε $x\geq 1$.

6. Έστω συνάρτηση $f: R\rightarrow R$με πρώτη παράγωγο συνεχή και γνησίως αύξουσα. Επιπλέον δίνεται ότι $f(2)=0$ και $f'(0)=3$. Δίνεται επίσης και η συνάρτηση $g(x)=\frac{lnx}{x}$ $, x > 0$

α. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι για κάθε $x>e$ισχύει :$x^e<e^x$

ii) Να βρείτε το όριο: $L=\lim_{x\to e^+}\frac{g(x-e)}{f'(x^e)-f'(e^x)}$

β. Να δείξετε ότι η $g\circ f'$είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

γ. Να δείξετε ότι αν $\alpha,\beta>0$ και για κάθε $x>0$ ισχύει:

$(g\circ f')(a^{lnx}+\beta^{lnx})\leq(g\circ f')(2)$ τότε $\alpha\beta=1$

δ. i) Να δείξετε ότι για κάθε $x> 1$ισχύει: $f(x+1)\geq f'(2)(x-1)$

ii) Αν $M(x,f(x))$ με $x>2$ σημείο της C_fκαι το σημείο $A(1,0)$. Έστω $E(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΑ (Ο: η αρχή των αξόνων) τότε να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0>2$ ώστε να ισχύει : $E(x_0)=2020$ τ.μ.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\rightarrow R$για την οποία ισχύουν :

- $f(x)<1$ για κάθε $x\epsilon R$
- $f(x)+f(-x)=1$ για κάθε $x\epsilon R$
- $f'(x)+e^x f^2(x)=0$ για κάθε $x\epsilon R$

α. Να αποδείξετε ότι :

i) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\epsilon R$

ii) $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$, $x\epsilon R$

β. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και είναι η συνάρτηση $f^{-1}: (0,1)\rightarrow R$με τύπο $f^{-1}(x)=\ln\frac{1-x}{x}$.

γ. Αν $g(x)=\ln\frac{x}{1-x}$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\epsilon(0,1)$ ώστε να ισχύει: $f(x_0)=x_0$και στη συνέχεια ότι: $g(1-x_0)=x_0$.

δ. Αν x_0είναι το σημείο του (γ) ερωτήματος τότε να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $N(x_0,f^{-1}(x_0))$ δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\ln(x-1)+3$, $g(x)=e^x-x^2$και $F(x)=f(e^{x^3}+1)-3$.

α. Να δείξετε ότι οι f και Fαντιστρέφονται και να βρείτε τις συναρτήσεις f^{-1}και F^{-1}

β. Να δείξετε ότι οι C_fκαι $C_{f^{-1}}$έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία .

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_fπου διέρχεται από το σημείο A(0,1)

δ. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) του (γ) ερωτήματος εφάπτεται της C_gκαι να βρείτε το σημείο επαφής της C_gμε την ευθεία (ε).

9. Δίνεται $f:(0,+\infty)\to R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με f(1)=1. Επίσης ισχύει ότι : $x^3f'(x)+2x=x^2+2$ για κάθε x>0

α. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$, $x>0$

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της fκαι στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\epsilon(0,+\infty)$ ώστε: $\alpha=e^{\frac{1-2\alpha}{\alpha^2}+2020}$

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική λύση και βρίσκεται στο $(\frac{1}{2},1)$

δ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $C_{g'}$με $g(x)=e^x\ln x$ έχει μία μόνο οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο $M(x_0,f(x_0))$ όπου $x_0\epsilon\left(\frac{1}{2},1\right)$.

10. Έστω μια συνάρτηση fπου είναι συνεχής στο [1,3] και παραγωγίσιμη στο (1,3) της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,1) και B(3,3).

α. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\epsilon(1,3)$τέτοιο , ώστε η εφαπτομένη της C_fστο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία ε: x+y+1=0 .

β. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\epsilon(1,3)$, τέτοια ώστε $2f'(x_1)+f'(x_2)=3$.

γ. Να δείξετε ότι $\xi\epsilon\ (1,3)$τέτοιο, ώστε f (ξ)=$\frac{5}{3}$.

δ. Αν, επιπλέον, ισχύει: $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\epsilon(1,3)$, να δείξετε ότι υπάρχουν ρ_1 , $\rho_2\ \epsilon$ (1,3) τέτοια ώστε: $\frac{2}{f'(\rho_1)}+\frac{2}{f'(\rho_2)}=3$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$, $g(x)=(2-x)e^x-1$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση gέχει, ακριβώς, δυο ρίζες ετερόσημες.

β. Να δείξετε ότι η f έχει, ακριβώς, δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων, των$_1$ οποίων να βρείτε το είδος .

γ. Αν x_1, x_2 ($x_1<x_2$) οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\epsilon(x_1,x_2)$ τέτοιο , ώστε : $f''(x_0)=-f'(x_0)$

δ. Να υπολογίσετε το όριο: L=$\lim_{x\to 0}\left[\left(e^{f(x)}-1\right)lnx\right]$.

12. Έστω f:(0,+∞)→R μία παραγωγίσιμη συνάρτηση , για την οποία ισχύει: $x^2f'(x)-(x^2-1)e^{-1-f(x)}=0$ για κάθε x>0 και f(1)=ln2-1.

Θεωρούμε , επιπλέον , τις συναρτήσεις hκαι g , για τις οποίες ισχύουν: $h(x)=g(x)-\frac{e^x-1}{xe^x+1}$, $x\epsilon R$καιf(h(x))=ln$\frac{2}{e}$.

α. Να δείξετε ότι : $f(x)=\ln(x+\frac{1}{x})-1$, x>0

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση fέχει , ακριβώς , δύο ρίζες θετικές.

γ. Αν x_1, x_2 ($x_1<x_2$) οι ρίζες της f, να δείξετε ότι $x_0\epsilon(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_fστο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο O(0,0)

δ. Να βρείτε τη συνάρτηση g και να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση δέχεται δύο ακριβώς οριζόντιες εφαπτόμενες. Δίνεται ότι: $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$