Επαναληπτικά θέματα Β΄ Γυμνασίου

Αγγελάκος Ηλίας, Διαμαντοπούλου Έλενα , Κολοβού Ευθυμία, Λουμπαρδιά Αγγελική .

Προτεινόμενα θέματα επανάληψης

ΘΕΜΑ 1

α) Να εξετάσετε αν είναι σωστοί οι παρακάτω συλλογισμοί και να εξηγήσετε ποιες ιδιότητες των ισοτήτων αναγνωρίζετε

$$1=1$$
$$1+1=1+1$$
$$\frac{2021}{2021}+\frac{2022}{2022}=\frac{2023}{2023}+\frac{2024}{2024}$$

β) Μπορείτε να μαντέψετε μια λύση της εξίσωσης:

$$\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$$

γ) Να εξετάσετε αν $x=-2022$ είναι λύση της εξίσωσης.
δ) Να λύσετε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ:

α) Κάθε αριθμός είναι ίσος με τον εαυτό του. Μια ισότητα δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε και στα δυο μέλη της τον ίδιο αριθμό. Κάθε κλάσμα που έχει τον ίδιο αριθμό για αριθμητή και παρονομαστή ισούται με τη μονάδα. Επομένως και οι τρεις ισότητες ισχύουν και ο συλλογισμός είναι σωστός.

β) Αντιπαραθέτοντας την ισότητα $\frac{2021}{2021}+\frac{2022}{2022}=\frac{2023}{2023}+\frac{2024}{2024}$ με την εξίσωση $\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$ μπορούμε να πούμε ότι μια λύση είναι ο αριθμός 0 δηλαδή x=0

γ) Ο αριθμός -2022 δεν είναι λύση της εξίσωσης γιατί για x= -2022 η εξίσωση γίνεται $\frac{2021-2022}{2021}+\frac{2022-2022}{2022}=\frac{2023-2022}{2023}+\frac{2024-2022}{2024}$ δηλαδή $\frac{-1}{2021}=\frac{1}{2023}+\frac{2}{2024}$ άτοπο αφού το άθροισμα δυο θετικών αριθμών είναι θετικός και όχι αρνητικός αριθμός.

δ) **<u>1ος τρόπος</u>**

Η εξίσωση $\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$
είναι πρώτου βαθμού, έχει μια λύση την x=0 και δεν είναι αόριστη αφού όπως εξετάσαμε στο γ) ερώτημα δεν έχει λύση τον αριθμό x= -2022. Άρα έχει μοναδική λύση την x=0.

<u>2ος τρόπος</u>

Η εξίσωση $\frac{2021+x}{2021}+\frac{2022+x}{2022}=\frac{2023+x}{2023}+\frac{2024+x}{2024}$ γίνεται

$$\frac{2021}{2021}+\frac{x}{2021}+\frac{2022}{2022}+\frac{x}{2022}=\frac{2023}{2023}+\frac{x}{2023}+\frac{2024}{2024}+\frac{x}{2024}$$

ή $\quad 1+\frac{x}{2021}+1+\frac{x}{2022}=1+\frac{x}{2023}+1+\frac{x}{2024}$

ή $\frac{x}{2021}+\frac{x}{2022}-\frac{x}{2023}-\frac{x}{2024}=0$

ή $x(\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024})=0$ οπότε $x=0$ αφού $(\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024})\neq 0$

αφού $\frac{1}{2021}>\frac{1}{2023}$ και $\frac{1}{2022}>\frac{1}{2024}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση: $y=\frac{\kappa+1}{3}x-2$

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του κ αν είναι γνωστό ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α(-3,-5).

β) Αν κ=2

i) να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) και την εξίσωσή της.

ii) να εξετάσετε με ποια ή ποιες από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλη:

ε_1: $y-x=0$ $\qquad$ ε_2: $y=-x+4$ $\qquad$ ε_3: $x=-2+y$

γ) Να εξετάσετε αν η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το σημείο Β(2,0) του άξονα xx΄

δ) Από ποιο σημείο του άξονα y y΄ διέρχεται η ευθεία;

ε) Να κάνετε την γραφική της παράσταση .

ΛΥΣΗ:

α) Για να διέρχεται η ευθεία από το σημείο Α(-3,-5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωσή της δηλαδή:

$-5=\frac{\kappa+1}{3}(-3)-2$ ή $-5=(\kappa+1)(-1)-2$ ή $-5=-\kappa-1-2$ ή $\kappa=5-1-2$ ή $\kappa=2$

β) i) Αν κ=2 η κλίση της ευθείας θα είναι $\frac{\kappa+1}{3}=\frac{2+1}{3}=1$ και θα έχει εξίσωση y=x-2 .

ii) Η ευθεία (ε_1) είναι η y=x και έχει κλίση 1 συνεπώς είναι παράλληλη με την (ε) αφού έχουν την ίδια κλίση.

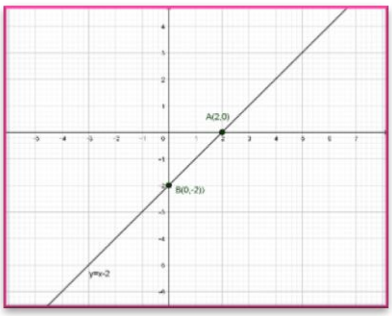
Η ευθεία (ε_2): y=-x+2 και έχει κλίση -1 συνεπώς δεν είναι παράλληλη με την (ε).

Η ευθεία (ε_3): είναι η y=x+2 και έχει κλίση 1 συνεπώς είναι παράλληλη με την (ε) αφού έχουν την ίδια κλίση.

γ) Η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(2,0) του άξονα xx΄ αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της y=x-2.

δ) Κάθε ευθεία της μορφής y=αx+β διέρχεται από το σημείο (0,β) του άξονα yy΄ συνεπώς η (ε) θα διέρχεται από το Β(0,-2) .

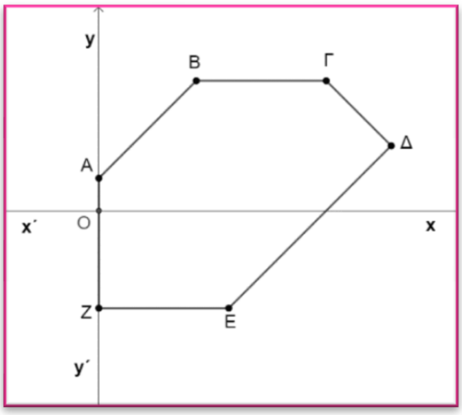
ε) Αφού η ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(0,2) και (0,-2) η γραφική της παράσταση θα είναι η εξής:



ΘΕΜΑ 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει ένα εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- ΑΖ=ΒΓ=ΖΕ=4
- Οι κορυφές Α,Ζ είναι σημεία του άξονα y΄y
- Τα Α,Β είναι σημεία της ε: y= x+1 και το Β έχει τετμημένη 3.
- Οι πλευρές ΒΓ και ΖΕ είναι παράλληλες στον άξονα x΄x
- Η πλευρά ΕΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ και το Δ έχει τεταγμένη 2.



α) Να βρείτε :

i)Τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ, Ε.

ii)Την εξίσωση της ευθείας ΕΔ και τις συντεταγμένες του Δ

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του εξάγωνου

γ) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΓΔΕ είναι ορθή.

ΛΥΣΗ:

α) i) Το Α είναι σημείο της ευθείας ε: y=x+1 και του άξονα y΄y άρα για x=0 στην εξίσωση της ε προκύπτει y=0+1=1. Συνεπώς Α(0,1) .

Το Β είναι σημείο της ευθείας ε: y=x+1 και έχει τετμημένη 3 άρα για x=3 στην εξίσωση της ε προκύπτει y=3+1=4. Συνεπώς Β(3,4) .

Το σημείο Γ έχει την ίδια τεταγμένη με το Β και αφού ΒΓ=4 είναι Γ(7,4).

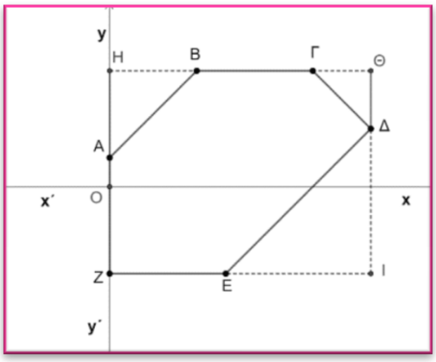
Το Ζ έχει τετμημένη 0 και αφού ΑΖ=4 είναι Ζ(0,-3).

Το Ε έχει την ίδια τεταγμένη με το Ζ και αφού ΕΖ=4 είναι Ε(4,-3) .

ii) Η ευθεία ΕΔ είναι της μορφής y=αx+β και είναι παράλληλη στην ευθεία ε : y=x+1 , συνεπώς α=1 και ΕΔ : y=x+β. Διέρχεται από το Ε(4,-3) οπότε -3=4+β δηλ. β=-7. Επομένως η εξίσωση της ΕΔ είναι y=x-7.

Το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ΕΔ και έχει τεταγμένη 2 οπότε για y=2 στην εξίσωση της ΕΔ , προκύπτει x=2+7=9 . Άρα Δ(9,2).

β) i)Το εμβαδό του εξάγωνου ΑΒΓΔΕΖ μπορούμε να υπολογίσουμε αφαιρώντας από το εμβαδό του ορθογωνίου ΗΘΙΖ τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων ΑΗΒ , ΓΘΔ και ΔΙΕ.



Είναι (ΗΘΙΖ)=ΗΘ • ΘΙ= 9•7 =63 τμ

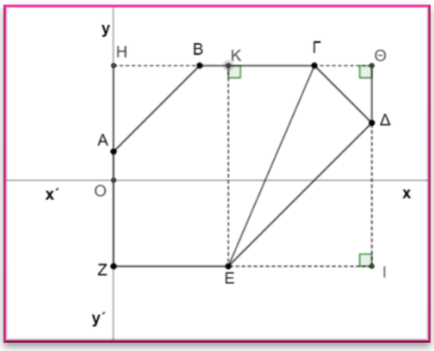
$(AHB)= \frac{1}{2}HB•HA=\frac{1}{2}3•3=\frac{9}{2}$ τμ

$(Γ Θ Δ)= \frac{1}{2}ΓΘ•ΓΔ=\frac{1}{2}2•2=2$ τμ

$(Δ I E)= \frac{1}{2}ΔI•IE=\frac{1}{2}5•5=\frac{25}{2}$ τμ

(ΑΒΓΔΕΖ)= (ΗΘΙΖ)-(ΑΗΒ)-(ΓΘΔ)-(ΔΙΕ)= 63- $\frac{9}{2}$ -2- $\frac{25}{2}$ =44 τμ

ii) **<u>1ος τρόπος</u>**



Αρκεί να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Στο ΓΘΔ ισχύει το Π.Θ.: Είναι $ΓΔ^2=ΓΘ^2+ΘΔ^2 =2^2+2^2=8$.

Στο ΔΙΕ ισχύει το Π.Θ.: Είναι $ΔΕ^2=ΔΙ^2+ΙΕ^2 =5^2+5^2=50$.

Στο ΓΚΕ ισχύει το Π.Θ.: Είναι $ΓΕ^2=ΓΚ^2+ΚΕ^2 =3^2+7^2=58$.

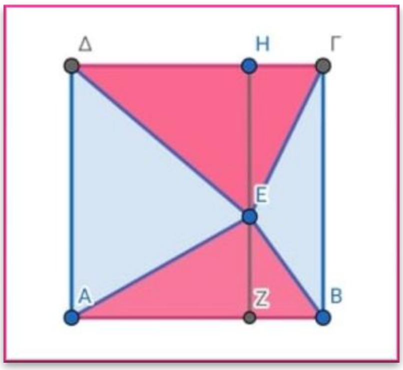
Ισχύει : $ΓΕ^2=ΓΔ^2+ΔΕ^2$. Άρα $\hat{ΓΔΕ} =90^o$.

<u>2ος τρόπος</u>

Τα τρίγωνα ΓΘΔ και ΔΙΕ είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Άρα $\hat{ΘΔΓ}=\hat{ΕΔΙ}=45^o$.

Επομένως $\hat{ΓΔΕ}=180^o - \hat{ΘΔΓ}-\hat{ΕΔΙ}=180^o -45^o -45^o =90^o$.

ΘΕΜΑ 4



Δυο αδέρφια κληρονόμησαν από τον πατέρα τους ένα οικόπεδο σε σχήμα τετραγώνου (διπλανό σχήμα) και το μοίρασαν έτσι ώστε ο ένας πήρε τα κόκκινα κομμάτια και ο άλλος τα μπλε.

α) Με τη βοήθεια του ευθυγράμμου τμήματος ΗΖ που είναι παράλληλο στη πλευρά ΒΓ του τετραγώνου να αποδείξετε ότι η μοιρασιά ήταν δίκαιη.

β) Αν τα δυο κόκκινα κομμάτια έχουν εμβαδόν 32000 τ.μ. να βρεθεί η πλευρά ΑΒ του τετραγώνου.

ΛΥΣΗ:

α) Έστω α η πλευρά του τετραγώνου και ΓΔ=α. Ο ένας αδελφός πήρε τα οικόπεδα ΔΕΓ και ΑΕΒ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ είναι, $E_{ΔΕΓ}=\frac{α\times ΗΕ}{2}$ ενώ του τριγώνου ΑΕΒ είναι $E_{ΑΕΒ}=\frac{α\times ΖΕ}{2}$. Άρα ο ένας αδελφός πήρε το άθροισμα αυτών των δυο και έχουμε: $E_{ΔΕΓ}+E_{ΑΕΒ}=\frac{α\times ΗΕ}{2}+\frac{α\times ΖΕ}{2}=\frac{α\times(ΗΕ+ΖΕ)}{2}=\frac{α\times α}{2}=\frac{α^2}{2}$

Επομένως ο ένας αδελφός πήρε το μισό του τετραγώνου $\frac{α^2}{2}$ οπότε και ο άλλος αδελφός πήρε το άλλο μισό δηλαδή $\frac{α^2}{2}$ αφού όλο το οικόπεδο έχει εμβαδόν $α^2$.

Άρα η μοιρασιά είναι δίκαιη.

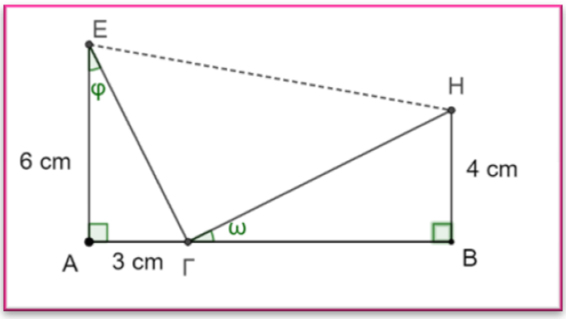
β) Το μισό τετράγωνο που πήρε ο ένας αδελφός είναι 32.000 τ.μ άρα το ολόκληρο θα έχει εμβαδόν Ε=64.000 τ.μ. Επομένως $α^2$=64.000 και άρα

$α=\sqrt{6400}=\sqrt{64\times 100}=\sqrt{64}\times\sqrt{100}=8\times 10=80$ μ. δηλαδή η πλευρά του τετραγώνου

ΑΒ=α=80μ.

ΘΕΜΑ 5

Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΓ=3cm ,ΑΕ= 6 cm και ΒΗ=4 cm ενώ το εμβαδό (ΒΗΓ) είναι μεγαλύτερο κατά 7 cm^2 από το εμβαδό (ΑΕΓ).



α)Να βρείτε το ΒΓ

β)Να αποδείξετε ότι φ=ω

γ)Να δείξετε ότι $\widehat{ΕΓΗ}=90^o$

δ)Να βρείτε το ΕΗ

ΛΥΣΗ:

α)Το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΓ είναι

(ΑΕΓ)= $\frac{1}{2}$ΑΕ•ΑΓ=$\frac{1}{2}$6•3=9 cm^2. Επομένως (ΒΓΗ)= (ΑΕΓ)+7=7+9=16 cm^2.

Άρα $\frac{1}{2}$ΒΗ•ΒΓ=$\frac{1}{2}$4•ΒΓ=16 δηλ. ΒΓ=8 cm .

β) Στο τρίγωνο ΑΕΓ είναι εφφ= $\frac{ΑΓ}{ΑΕ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Στο τρίγωνο ΒΗΓ είναι εφω= $\frac{ΒΗ}{ΒΓ}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ Για τις οξείες γωνίες φ , ω ισχύει εφφ=εφω άρα φ=ω (1) .

γ) Οι γωνίες του τριγώνου ΑΕΓ είναι συμπληρωματικές δηλ. $\widehat{ΑΓΕ}+φ=90^o$ (2).

Από (1) ,(2) προκύπτει : $\widehat{ΑΓΕ}+ω=90^o$. Επομένως $\widehat{ΑΓΕ}+\widehat{ΕΓΗ}+ω=180^o$ ή

$\widehat{ΕΓΗ}+90^o=180^o$ ή $\widehat{ΕΓΗ}=90^o$.

δ) Στο τρίγωνο ΑΕΓ ισχύει το Π.Θ. : ΓΕ^2=ΑΓ^2+ΑΕ^2=3^2+6^2=9+36=45

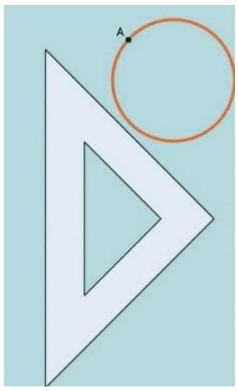
Στο τρίγωνο ΒΗΓ ισχύει το Π.Θ. : ΓΗ^2=ΒΗ^2+ΒΓ^2=4^2+8^2=16+64=80

Στο τρίγωνο ΕΓΗ ισχύει το Π.Θ. : ΓΗ^2=ΓΕ^2+ΓΗ^2=45+80=125 .

Επομένως ΓΗ= $\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ cm.

ΘΕΜΑ 6

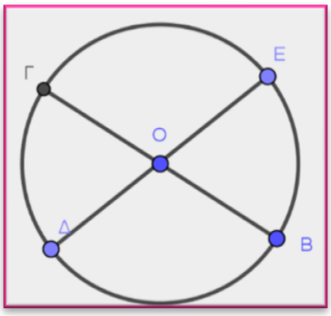
Έχεις έναν μη αριθμημένο γνώμονα . Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύκλος ακτίνας ρ και πάνω σε αυτό ένα σημείο Α.



i. Να βρεις το κέντρο του κύκλου Ο
ii. Να χαράξεις την εφαπτομένη του κύκλου στο Α
iii. Να κατασκευάσεις τετράγωνο πλευράς ΟΑ
iv. Να εξετάσεις αν τρία τετράγωνα πλευράς ΟΑ έχουν μεγαλύτερο εμβαδόν από το κύκλο.

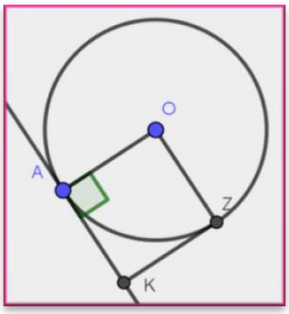
ΛΥΣΗ:

i. Τοποθετώ την κορυφή της ορθής γωνίας του γνώμονα στον κύκλου και έστω Β, Γ τα σημεία όπου οι κάθετες πλευρές του τέμνουν τον κύκλο. Η χορδή ΒΓ είναι μια διάμετρο του κύκλου αφού η ορθή γωνία έχει γίνει εγγεγραμμένη με τον τρόπο που τοποθέτησα τον γνώμονα και βαίνει στο τόξο ΒΓ που είναι 180^o. Ύστερα τοποθετώ τη κορυφή του γνώμονα σε άλλο σημείο του κύκλου και με τον ίδιο τρόπο παίρνω δυο σημεία πάνω στον κύκλο Δ, Ε όπου ΔΕ είναι διάμετρος του κύκλου. Το σημείο τομής Ο των δυο κύκλων θα είναι το κέντρο του κύκλου.



ii. Γράφω την ακτίνα ΟΑ του κύκλου και με τον γνώμονα φέρνω κάθετη στο σημείο Α του κύκλου, η κάθετη αυτή θα είναι εφαπτόμενη του κύκλου αφού η εφαπτόμενη με την ακτίνα στο σημείο επαφής τέμνονται κάθετα.

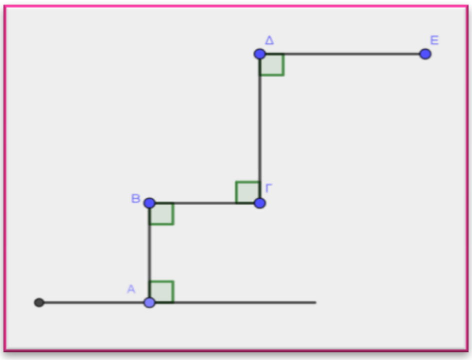
iii. Έχοντας γράψει την ακτίνα ΟΑ και την εφαπτομένη ε φέρνω με τον γνώμονα την κάθετη ΟΖ στο ΟΑ, όπου Ζ το σημείο τομής της με τον κύκλο. Κατόπιν φέρνω κάθετη στη ΟΖ στο Ζ που τέμνει την εφαπτομένη ε στο σημείο Κ. Το ΑΟΖΚ είναι το ζητούμενο τετράγωνο.



iv. Ένα τετράγωνο πλευράς ΟΑ=ρ έχει εμβαδόν $E_{τετ}=ρ^2$ και άρα τρία τετράγωνα πλευράς ρ θα έχουν εμβαδόν $E_{3τετ}=3\ ρ^2$. Ένας κύκλος ακτίνας ρ θα έχει εμβαδόν $E_{κύκλου}=πρ^2$. Οπότε $\frac{E_{3τετ}}{E_{κυκλου}}=\frac{3ρ^2}{πρ^2}=\frac{3}{π}<1$ και άρα $E_{3τετ}<E_{κύκλου}$

ΘΕΜΑ 7

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ΑΒ=ΒΓ=4 και ΓΔ=ΔΑ=5. Να δείξετε ότι:



i. Να αποδείξετε ότι η $A\hat{Γ}E$ είναι ευθεία γωνία

ii. Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΓ, ΓΕ

iii. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{32}+\sqrt{50}=\sqrt{162}$

iv. Είναι το ΑΒΔΕ τραπέζιο;

ΛΥΣΗ:

i. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $ΒΑΓ=ΒΓΑ=45^o$. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, άρα $ΔΓΕ=ΔΕΓ=45^o$. Είναι $ΑΓΒ+ΒΓΔ+ΔΓΕ=45^o+90^o+45^o=180^o$ και άρα τα σημεία Α, Γ, Ε συνευθειακά δηλαδή η ευθεία ΑΕ διέρχεται από το σημείο Γ.

ii. Εφαρμόζω το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχω:

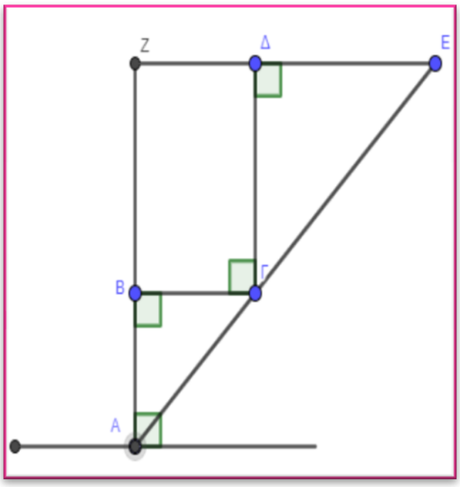
$ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2$

$ΑΓ^2=4^2+4^2$

$ΑΓ^2=32$

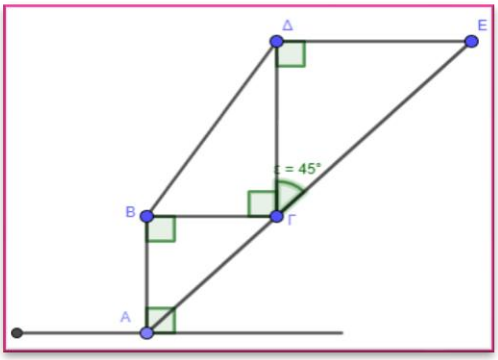
$ΑΓ=\sqrt{32}$

Εργάζομαι ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ και βρίσκω $ΓΕ=\sqrt{50}$



iii. Προεκτείνω την ΑΒ προς το μέρος του Β και την ΕΔ προς το μέρος του Δ και έστω ότι τέμνονται στο σημείο Ζ (βλέπε στο διπλανό σχήμα). Το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχω: $ΑΕ^2=ΑΖ^2+ΖΕ^2$ (1). Όμως ΑΖ=ΑΒ+ΒΖ=ΑΒ+ΓΔ=4+5=9 και ΖΕ=ΖΔ+ΔΕ=ΒΓ+ΔΕ=4+5=9 οπότε η σχέση (1) δίνει $9^2+9^2=162$ και άρα $ΑΕ^2=162$ οπότε $ΑΕ=\sqrt{162}$. Ωστόσο ΑΕ=ΑΓ+ΓΕ (2) και από προηγούμενο ερώτημα έχω $ΑΓ=\sqrt{32}$ και $ΓΕ=\sqrt{50}$ οπότε η σχέση (2) δίνει $\sqrt{162}=\sqrt{32}+\sqrt{50}$

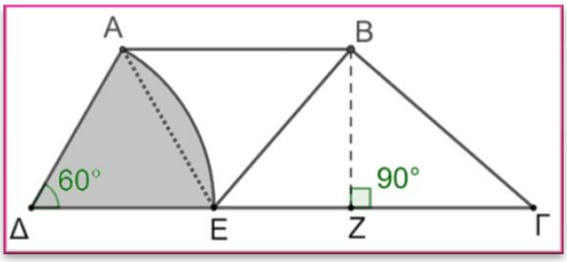
iv. Αν το ΑΒΔΕ ήταν τραπέζιο τότε η ΒΔ//ΑΕ. Αν όμως ίσχυε αυτό, οι γωνίες ΒΔΓ και ΔΓΕ θα ήταν ίσες ως εντός και εναλλάξ μεταξύ των παραλλήλων ΒΔ και ΑΕ. Άρα η $ΒΔΓ=45^o=ΔΓΕ$. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει γιατί η οξεία γωνία ΒΔΓ έχει $εφΒΔΓ=\frac{4}{5}\neq 1=εφ45^o$



ΘΕΜΑ 8

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ//ΔΓ και $\hat{Δ}=60^o$.
Ο κυκλικός τομέας 60^o του κύκλου (Δ,ΔΑ) έχει εμβαδό $(ΑΔΕ)=\frac{8\pi}{3}$.

α)
- **i.** Να αποδείξετε ότι ΑΔ=4 cm
- **ii.** Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
- **iii.** Να αποδείξετε ότι το ύψος ΒΖ του τραπεζίου είναι ΒΖ= $2\sqrt{3}$ cm.



β)Εάν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΖ,ΖΓ,ΑΒ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί και το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΕ είναι $12\sqrt{3}$ cm^2 να υπολογίσετε τα ΕΖ, ΖΓ και ΑΒ.

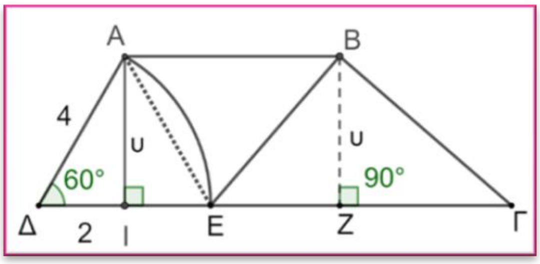
γ) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο.

ΛΥΣΗ

α)i) Ο κυκλικός τομέας (ΑΔΕ) γωνίας 60^o έχει εμβαδό ίσο με το $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$ του κυκλικού δίσκου (Δ,ΔΑ). Άρα $\frac{1}{6}\pi \Delta A^2=\frac{8\pi}{3}$ ή ΔΑ^2=16 ή ΔΑ=4 cm.

ii)Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές αφού ΑΔ=ΑΕ ως ακτίνες κύκλου. Οι ΔΑΕ , ΑΕΔ είναι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΑΕ του ισοσκελούς τριγώνου , επομένως ΔΑΕ = ΑΕΔ. Αφού ΑΔΕ =60^o θα είναι και ΔΑΕ = ΑΕΔ =60^o .Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΕ έχει όλες τις γωνίες του ίσες και επομένως είναι ισόπλευρο.

iii) Το ύψος υ=ΒΖ του τραπεζίου είναι και ύψος του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ πλευράς 4 cm. Το ύψος υ στο ΑΔΕ είναι και διάμεσος άρα ΔΙ=$\frac{\Delta E}{2}$ = $\frac{4}{2}$ =2 .Στο τρίγωνο ΑΔΙ ισχύει το



Π.Θ.υ^2=4^2-2^2=16-4=12 δηλαδή υ=$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ cm.

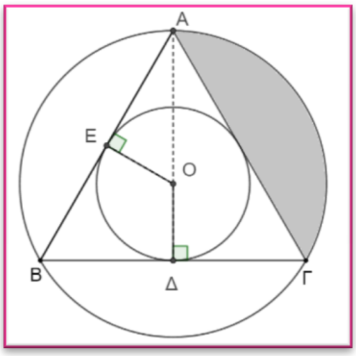
β) Αν ΕΖ=χ , ΖΓ=χ+1 , ΑΒ=χ+2 , το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι (ΑΒΓΔ)= $\frac{(AB+EZ)BZ}{2}=\frac{(\chi+\chi+1+\chi+2)2\sqrt{3}}{2}$ =(3χ+3)$\sqrt{3}$ και ισχύει (ΑΒΓΔ)=12 $\sqrt{3}$ cm^2 επομένως (3χ+3)$\sqrt{3}$ =12 $\sqrt{3}$ ή 3χ+3=12 ή χ=3. Άρα ΕΖ=3 cm ,ΖΓ=4 cm και ΑΒ=5 cm.

γ)Στο τρίγωνο ΒΖΓ ισχύει το Π.Θ. : ΒΓ^2=ΒΖ^2+ΖΓ^2=$(2\sqrt{3})^2$ +4^2=12+16=28 , δηλ. ΒΓ=$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.Στο τρίγωνο ΒΕΓ ισχύει το Π.Θ.:ΒΕ^2=ΒΖ^2+ΕΖ^2=$(2\sqrt{3})^2$ +3^2=12+9=21 , δηλ. ΒΕ=$\sqrt{21}$ cm.

Στο τρίγωνο ΒΕΓ ισχύει: ΒΕ^2+ΒΓ^2=$(\sqrt{28})^2+(\sqrt{21})^2$ =49 και ΕΓ^2=7^2=49 .Άρα ΒΕ^2+ΒΓ^2= ΕΓ^2 . Άρα το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο με ΕΒΓ =90^o .

ΘΕΜΑ 9

Στο παρακάτω σχήμα το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και περιεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ). Δίνεται ρ= $5\sqrt{3}$ cm.



- **i.** Να δείξετε ότι ΒΑΔ =30^o και R=2ρ
- **ii.** Να βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓ
- **iii.** Να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος
- **iv.** Να βρείτε το εμβαδό του τετράπλευρου ΒΕΟΔ

ΛΥΣΗ

i. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΔ είναι και διχοτόμος. Άρα ΒΑΔ=ΔΑΓ =30^o

Ισχύει ημ ΕΑΟ $= \frac{EO}{AO} = \frac{\rho}{R}$ ή ημ30^o= $\frac{\rho}{R}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{\rho}{R}$ ή R=2ρ

ii) Στο τρίγωνο ΑΕΟ ισχύει το Π. Θ. : $AE^2=AO^2-EO^2=R^2-\rho^2=(10\sqrt{3})^2-(5\sqrt{3})^2 = 300-75=225$ δηλ. ΑΕ=15 cm. Η πλευρά του ΑΒΓ είναι ΑΒ=2ΑΕ= 2•15 =30 cm και η περίμετρος του ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ= 3ΑΒ=90 cm.

iii) Τα κυκλικά τμήματα που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ ,ΓΑ και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα , επομένως το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος ισούται με το 1/3 του εμβαδό που προκύπτει αν αφαιρέσουμε το εμβαδό του ισόπλευρου τριγώνου από το εμβαδό του κυκλικού δίσκου (Ο,R).

Εμβαδό κυκλικού δίσκου : $E_1=\pi R^2=\pi(10\sqrt{3})^2=300\pi$ cm^2.

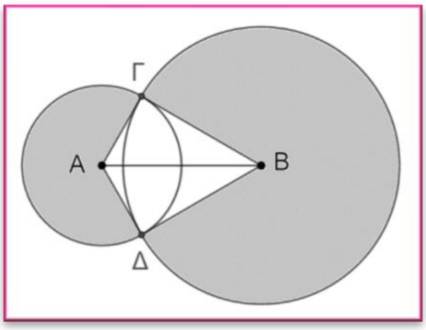
Εμβαδό τριγώνου ΑΒΓ : $E_2=\frac{1}{2}$ ΒΓ ΑΔ= $\frac{1}{2}$ 30 $15\sqrt{3}$ =225$\sqrt{3}$ cm^2

Εμβαδό κυκλικού τμήματος : $E=\frac{1}{3}(E_1-E_2)=\frac{1}{3}(300\pi-225\sqrt{3})=100\pi-75\sqrt{3}$ cm^2.

iv) (ΒΕΟΔ)=(ΒΕΟ)+(ΒΟΔ)= $\frac{1}{2}$ ΒΕ ΟΕ + $\frac{1}{2}$ ΒΔ ΟΔ= $\frac{1}{2}$ 15 $5\sqrt{3}$ + $\frac{1}{2}$ 15 $5\sqrt{3}$ =$75\sqrt{3}$ cm^2.

ΘΕΜΑ 10

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος 14cm. Με κέντρα τα άκρα του ΑΒ έχουμε σχεδιάσει τους κύκλους (Α,7 cm) και (Β, 7 $\sqrt{3}$ cm) που τέμνονται στα σημεία Γ,Δ.



- **i.** Να δείξετε ότι οι γωνίες Γ και Δ του τετράπλευρου ΑΓΒΔ είναι ορθές.
- **ii.** Να βρείτε τις γωνίες Α και Β του τετράπλευρου.
- **iii.** Να υπολογίσετε το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.

ΛΥΣΗ

i) Το τρίγωνο ΑΓΔ έχει πλευρές ΑΓ=7 , ΒΓ= 7$\sqrt{3}$ και ΑΒ=14 . Ισχύει $AB^2=14^2=196$

$A\Gamma^2+B\Gamma^2=7^2+(7\sqrt{3})^2=49+49\ 3=196$. Άρα $AB^2=A\Gamma^2+B\Gamma^2$ δηλαδή ισχύει το Π.Θ. και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\Gamma=90^o$.

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει το Π.Θ. και είναι ορθογώνιο με $\Delta=90^o$.

ii) Στο τρίγωνο ΓΑΒ ισχύει ημ$\Gamma B A=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$ οπότε $\Gamma BA=30^o$.

Είναι $\Gamma AB=90-\Gamma BA=60^o$.

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $AB\Delta=30^o$ και $BA\Delta=60^o$.

Επομένως για τις γωνίες Α , Δ του τετράπλευρου ισχύει:

$A=\Gamma AB+BA\Delta=60^o+60^o=120^o$ και $B=\Gamma BA+AB\Delta=30^o+30^o=60^o$.

iii)Το γραμμοσκιασμένο μέρος του κυκλικού δίσκου (Α,7 cm) είναι κυκλικός τομέας γωνίας 240^o . Το εμβαδό του θα είναι ίσο με το $\frac{240}{360}=\frac{2}{3}$ του εμβαδού του κυκλικού δίσκου, δηλαδή $E_1=\frac{2}{3}\pi\rho^2=\frac{2}{3}\pi 7^2=\frac{98\pi}{3}$ cm^2.

Το γραμμοσκιασμένο μέρος του κυκλικού δίσκου (Β ,$7\sqrt{3}$ cm) είναι κυκλικός τομέας γωνίας 300^o .Το εμβαδό του θα είναι ίσο με το $\frac{300}{360}=\frac{5}{6}$ του εμβαδού του κυκλικού δίσκου, δηλαδή $E_2=\frac{5}{6}\pi\rho^2=\frac{5}{6}\pi(7\sqrt{3})^2=\frac{245\pi}{2}$ cm^2.

Επομένως το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας θα είναι :

$E=E_1+E_2=\frac{98\pi}{3}+\frac{245\pi}{2}=\frac{931\pi}{6}$ cm^2 .

Προτεινόμενες ασκήσεις για λύση

1. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις :

$A=\frac{3x-1}{4}$, $B=-\frac{5+2x}{6}$ και $\Gamma=\frac{5x+1}{12}$.

i. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α για x=0.

ii. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης Β για $x=-2^{-1}$

iii. Να βρείτε την τιμή του x ώστε Α=Β.

iv. Να εξετάσετε αν υπάρχει x ώστε Α+Β=Γ .

v. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x οι παραστάσεις 4Α-12Γ και 6Β+3 είναι ίσες.

vi. Αν $\Delta=5(y-2)+3y+2$ να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση 4Α+12Γ-Δ και να βρείτε την τιμή της για $x-y=\frac{1}{8}$

---

2. Δίνεται η εξίσωση: $\frac{1}{2}(x-1)-\frac{5}{3}x=2-x$ και τρίγωνο με πλευρές:

$AB=\frac{x-3}{2}$, $B\Gamma=x-7$, $A\Gamma=2(20-x)$

α) Να λύσετε την εξίσωση

β) Για x=15 να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και στη συνέχεια να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο προσδιορίζοντας ποια είναι η κορυφή της ορθής γωνίας.

---

3. Ο Πυθαγόρας ζήτησε από την Υπατία να σκεφτεί έναν αριθμό και να τον διπλασιάσει. Ύστερα της ζήτησε στο διπλάσιο του αριθμού αυτού, να προσθέσει το 8 και στη συνέχεια να διαιρέσει το άθροισμα που προκύπτει με το 2. Από το πηλίκο που προκύπτει της ζήτησε να αφαιρέσει τον αριθμό που αρχικά είχε σκεφτεί. Τότε ο Πυθαγόρας της είπε τον αριθμό που βρήκε και αυτός ήταν το 4.

- **i.** Μπορείς να βρεις τη παράσταση που περιγράφεται στις παραπάνω πράξεις χρησιμοποιώντας για άγνωστο x τον αριθμό που αρχικά σκέφτηκε η Υπατία;
- **ii.** Να υπολογίσετε την παράσταση και να εξηγήσετε τι θα γινόταν αν η Υπατία είχε σκεφτεί άλλον αριθμό;
- **iii.** Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2x+8}{2}-x=4$
- **iv.** Να βρεις μια αντίστοιχη αλγεβρική παράσταση ώστε το αποτέλεσμα να είναι 5 ανεξάρτητα από τον αριθμό που θα σκεφτούμε αρχικά;

---

4. α) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+1}{3}-\frac{2(x+2)}{5}=\frac{2x}{3}+1$

β) Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $ΑΒ=-3x$, $ΒΓ=\sqrt{x^2}-4x$ και $ΑΓ=-x^3$ όπου x η λύση της παραπάνω εξίσωσης.

- **i.** Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο.
- **ii.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου και το ύψος του προς την υποτείνουσα.
- **iii.** Να βρείτε το μήκος του ημικυκλίου με διάμετρο την υποτείνουσα $ΑΒ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$.

---

5. Ένας εκπαιδευτικός για την συμμετοχή του σε μια εκπαιδευτική- επιστημονική ένωση πρέπει να πληρώσει για εγγραφή 20 €. Επιπλέον για κάθε σεμινάριο που θα παρακολουθήσει στην ένωση θα πρέπει να πληρώσει 30 €.

- **i.** Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y που θα πληρώσει ο εκπαιδευτικός για την εγγραφή και για την παρακολούθηση x σεμιναρίων
- **ii.** Ποιο είναι το χαμηλότερο ποσό που θα πληρώσει και πότε συμβαίνει αυτό
- **iii.** Υπάρχει εκπαιδευτικός που θα πληρώσει στην ένωση το πόσο των 85 €; Δικαιολογείστε την απάντηση σας
- **iv.** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

Αριθμός	0	1	2	3

σεμιναρίων x				
Συνολικό ποσό y				

6. Σε έναν αγώνα μπάσκετ οι πόντοι που πέτυχαν οι τρεις πρώτοι σκόρερ μιας ομάδας είναι: ο πρώτος έτυχε το $\frac{1}{3}$ των συνολικών πόντων, ο δεύτερος το $\frac{1}{4}$ και ο τρίτος το $\frac{1}{6}$ των συνολικών ελαττωμένους κατά 3 πόντους. Όλοι οι υπόλοιποι παίκτες πέτυχαν 24 πόντους συνολικά. Να βρείτε:

- **i.** Τους συνολικούς πόντους της ομάδας
- **ii.** Τους πόντους που έτυχαν οι τρεις πρώτοι σκόρερ ο καθένας ξεχωριστά.
- **iii.** Το ποσοστό επί των συνολικών πόντων της ομάδας που πέτυχαν οι τρεις πρώτοι σκόρερ της ομάδας

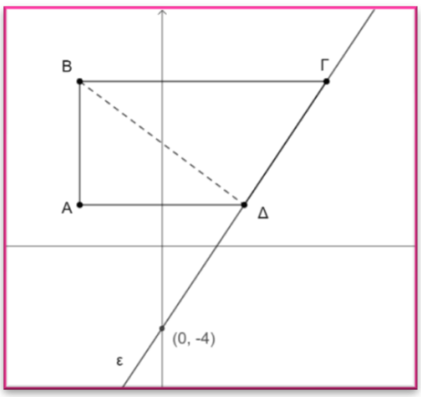
7.Ο παππούς έχει γενέθλια σήμερα. Κλείνει έναν αιώνα ζωής. Μαζί του έχουν γενέθλια ο γιος του και ο εγγονός του. Οι τετραγωνικές ρίζες των ηλικιών των τριών ανδρών είναι ακέραιοι αριθμοί και θα μπορούσαν να είναι μήκη ορθογωνίου τριγώνου.

i)Ποιές είναι οι ηλικίες τους;
ii)Πριν πόσα χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους ήταν πολλαπλάσιο του μεγαλύτερου διψήφιου πρώτου αριθμού;

8.Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία Α(0,4) και Β(-3,0).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ
β) Με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ να γράψετε ένα ημικύκλιο. Επίσης προς το ίδιο μέρος του ΑΒ που γράψατε το ημικύκλιο να σχηματίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά ΑΒ. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στα δύο σχήματα.
γ) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της μικρότερης από τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ.

9.Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις ΑΔ και ΒΓ.
Τα σημεία Α, Δ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y και τα σημεία Γ,Δ ανήκουν στην ευθεία ε που τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο (0,-4) και έχει κλίση $\frac{3}{2}$.

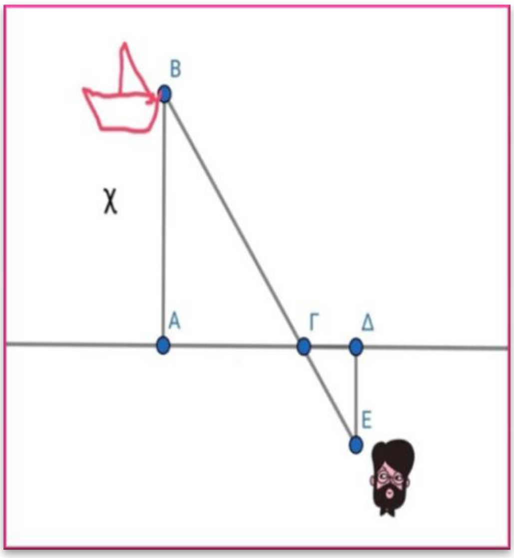


Αν το σημείο Α έχει τετμημένη -4 και το σημείο Β έχει τεταγμένη 8:

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΓΔ.
ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ, Α,Β,Γ.
iii. Να βρείτε την περίμετρο του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
iv. Να εξετάσετε αν το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ είναι κάθετο στην ευθεία ε

---

10. Ο Αρχιμήδης για να υπολογίσει την απόσταση x των πλοίων των Ρωμαίων, περπατούσε (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα) κάθετα στην ΑΒ ως το σημείο Γ ώστε ΑΓ=10m. Ύστερα τοποθετούσε ένα σημάδι στο σημείο Γ και συνέχιζε να περιπατεί στην ίδια ευθεία ΑΓ ώστε να φτάσει στο Δ όπου ΓΔ=2m. Στη συνέχεια από το σημείο Δ άλλαζε κατεύθυνση και προχωρούσε κάθετα στην ΑΔ προς τη στεριά ώσπου να φτάσει σε ένα σημείο Ε έτσι ώστε τα σημεία Ε, Γ, Β να βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Αν μια μέρα προχώρησε προς τη στεριά τόσο ώστε ΔΕ=20m.



i. Να βρείτε ποιόν τριγωνομετρικό αριθμό των γωνιών ΑΓΒ και ΔΓΕ παριστάνουν τα κλάσματα $\frac{x}{10}$ και $\frac{20}{2}$

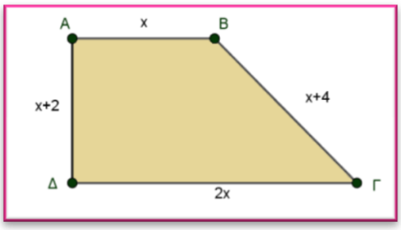
ii. Να εξηγήσετε γιατί $\frac{x}{10} = \frac{20}{2}$

iii. Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ του πλοίου από την ακτή εκείνη τη μέρα

iv. Αν μια άλλη μέρα το ΔΕ ισούται με 30m ποσό θα είναι η απόσταση ΑΒ;

---

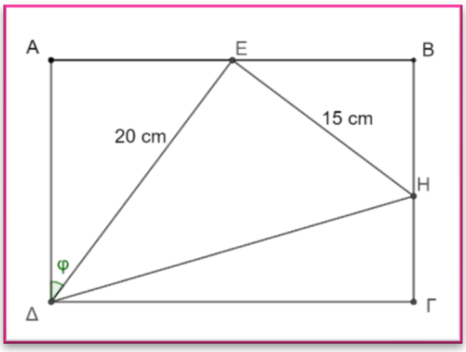
11. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο και οι πλευρές του είναι: ΑΒ=x , ΒΓ=x+4 , ΓΔ=2x, ΑΔ=x+2. Αν είναι γνωστό ότι η περίμετρος του τραπεζίου είναι 36cm να βρείτε:



α) Το μήκος της κάθε πλευράς του
β) Να φέρετε την διαγώνιο ΒΔ και να βρείτε το μήκος της
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου
δ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ

---

12. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το σημείο Ε



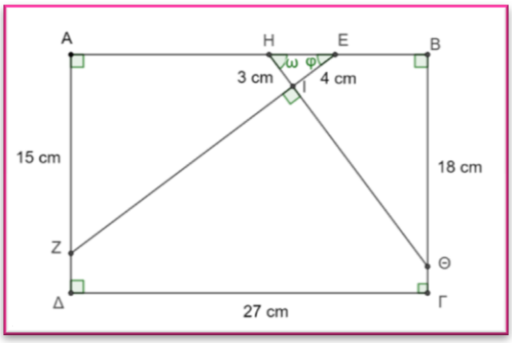
είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Το τρίγωνο ΔΕΗ με κορυφές τα σημεία Δ,Ε,Η των πλευρών του ορθογωνίου έχει πλευρές ΔΕ= 20 cm και ΕΗ=15 cm. Για τη γωνία ΑΔΕ=φ ισχύει συνφ $=\frac{4}{5}$.

- **i.** Να βρείτε τις διαστάσεις ΑΒ και ΒΓ του ορθογωνίου.
- **ii.** Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΔΕΗ είναι ορθογώνιο.

---

13. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει πλευρές ΑΒ= 27cm και ΒΓ=18 cm. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ και ΗΘ τέμνονται κάθετα στο σημείο Ι. Ισχύει ακόμη ότι :
ΑΖ= 15cm ΗΙ= 3cm και ΕΙ= 4cm.
Να υπολογίσετε :

- **i.** Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΕ,ΕΒ ,ΗΕ,ΒΘ
- **ii.** Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΕΖ και ΗΘ.
- **iii.** Την περίμετρο και το εμβαδό του πεντάπλευρου ΙΖΔΓΘ.



---

14. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την αντιστοιχία μήκους ποδιού και νούμερου παπουτσιού

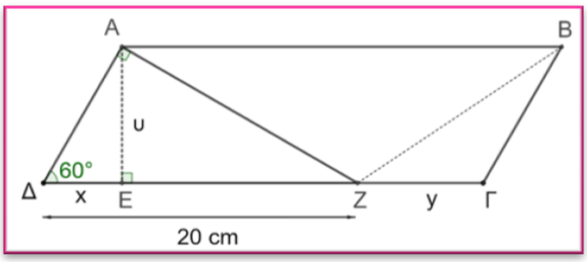
Cm	18	18,5	19	19,5
No	28	29	30	31

Ένα παιδί πατάει στη μπάλα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ώστε το σημείο Α να βρίσκεται στο μέσο της σόλας του παπουτσιού του. Αν ΒΓ =3cm και η μπάλα έχει ακτίνα 15 cm να βρείτε τι νούμερο παπούτσι φοράει το παιδί.

---

15. Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει ύψος υ=ΑΕ . Από σημείο Ζ της πλευράς ΔΓ τέτοιο ώστε ΔΖ=20 cm , έχουμε φέρει ευθύγραμμο τμήμα ΖΑ⊥ΑΔ.
Ισχύει ΑΔΕ $= 60^o$.

α)



i. Να εκφράσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ ως συνάρτηση του x.

ii. Στο τρίγωνο ΑΔΕ να εκφράσετε το ύψος υ ως συνάρτηση της εφ ΑΔΕ και του x.

iii. Στο τρίγωνο ΑΖΕ να εκφράσετε το ύψος υ ως συνάρτηση της εφ ΑΖΕ και του x.

iv. Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα των παραπάνω ερωτημάτων να αποδείξετε ότι ΔΕ=x=5 cm και υ= $5\sqrt{3}$ cm.

β) Να βρείτε:

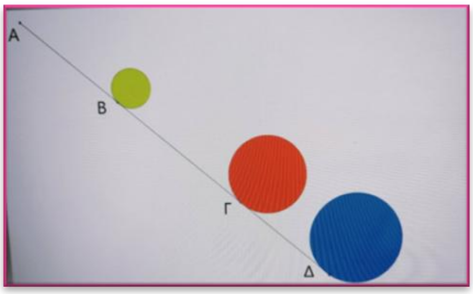
i. Το μήκος y ευθύγραμμου τμήματος ΖΓ ώστε να ισχύει (ΑΒΓΖ)=90 $\sqrt{3}$ cm^2

ii. Το εμβαδό (ΒΖΓ) .

γ) Να βρείτε το ύψος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.

---

16. Τρεις τροχοί με ακτίνες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ αφήνονται να κυλίσουν (χωρίς να ολισθήσουν) από το σημείο Α και τους ακινητοποιούμε όταν συμπληρώσουν μια στροφή. Ένας από τους τροχούς έφτασε στο σημείο Β ένας στο Δ και ένας στο Γ.

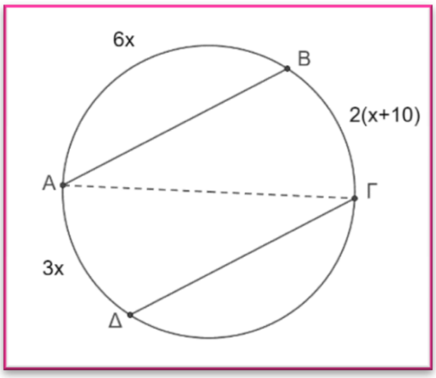


i. Ποια η ακτίνα του τροχού που έφτασε στο Δ, ποια η ακτίνα του τροχού που έφτασε στο Γ και ποια η ακτίνα του τροχού που έφτασε στο Β; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

ii. Αν ΑΒ=ΔΓ τότε αρχικά δείξτε ότι $\rho_1+\rho_2=\rho_3$ και κατόπιν αν ΑΔ= 26π και ρ_1, ρ_2 πρώτοι αριθμοί να βρείτε τις ακτίνες ρ_1, ρ_2 και ρ_3.

---

17. Για τις χορδές ΑΒ, ΓΔ του κύκλου (Ο,ρ) ισχύει ΑΒ=ΓΔ= $2\sqrt{3}$ cm. Είναι επίσης ΑΒ=6x , ΒΓ=2(x+10) , ΔΑ=3x .



i. Να αιτιολογήσετε γιατί τα τόξα ΑΒ , ΔΓ είναι ίσα και να βρείτε τα μέτρα των τόξων ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ .

ii. Να δείξετε ότι ΑΒ//ΔΓ και ΒΓ//ΑΔ .

iii. Να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο του ΑΓ και να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου.

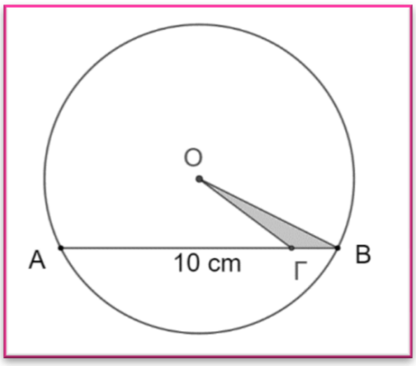
iv. Να βρείτε το μήκος και το εμβαδό του κύκλου.

---

18. Δίνεται κύκλος (O,R) και μία χορδή του AB=12 cm. Αν Γ σημείο της χορδής AB τέτοιο ώστε AΓ=10 cm και το εμβαδό του τριγώνου OΓB είναι (OΓB)=3 cm^2 :

i. Να δείξετε ότι : $OB=3\sqrt{5}$ cm και OΓ=5 cm.

ii. Να βρείτε το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζεται από τους κύκλους (O,OB,) και (O,OΓ)



---

19. Στο παρακάτω σχήμα αν $AKB=60°$ αι AB=5cm να υπολογισθούν:

α) Οι γωνίες του τριγώνου ABΓ

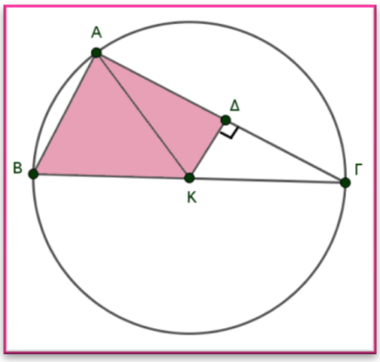
β) Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου

γ) Το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου

δ) Αν $K\Delta \perp A\Gamma$

i) Τι είδους τετράπλευρο είναι το ABKΔ

ii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν αυτού του τετραπλέυρου.



20.α) Να λυθεί η εξίσωση $2-\frac{\alpha}{12}-\frac{2\alpha-4}{8}=\frac{5}{6}$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

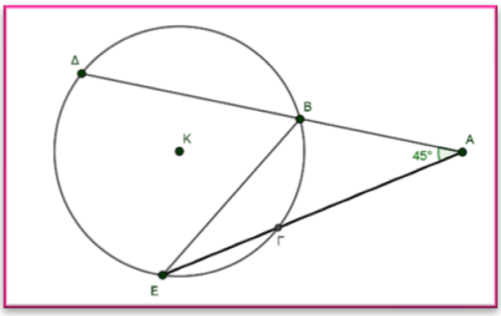
$$\beta=\sqrt{141+\sqrt{8-\sqrt{(-2)^2}+\left(\sqrt{3}\right)^2}}$$

γ) Αν το μέτρο του τόξου ΔE είναι 32α όπου α η λύση της παραπάνω εξίσωσης

και το μέτρο του τόξου EΓ είναι 5β όπου β η τιμή της παραπάνω παράστασης να υπολογισθούν:

i) Τα μέτρα των τόξων BΓ και ΔB

ii) Οι γωνίες του τετραπλεύρου ΔBΓE



---

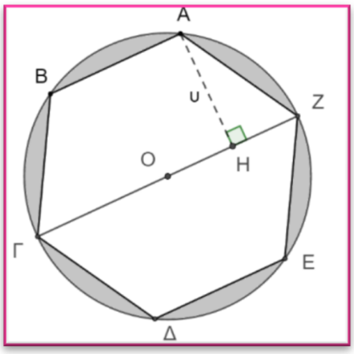
21. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ) και ΓΖ μία διαγώνιος του.

Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία του εξαγώνου καθώς και τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΖ.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ΑΒΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Αν η περίμετρος του εξαγώνου είναι 18 cm να βρείτε:

i. Το ύψος υ του τραπεζίου ΑΒΓΖ
ii. Το εμβαδό του κανονικού εξαγώνου
iii. Το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας



---

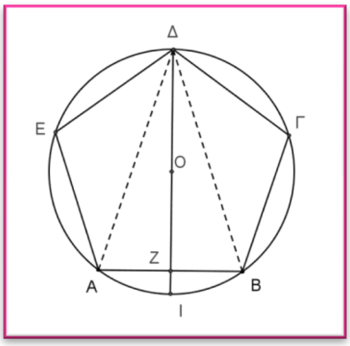
22. Στον κύκλο (Ο,ρ) του διπλανού σχήματος είναι εγγεγραμμένο κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Η διάμετρος ΔΙ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Ζ.

α) Να βρείτε: i) το μέτρο του τόξου ΑΒ
ii) το μέτρο του τόξου ΑΙ

και να δείξετε ότι η ΔΙ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2-3(2x-1)}{10}-\frac{x}{5}=-1+x$

γ) Αν ρ=12 x η ακτίνα του κύκλου , όπου x η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος Β να υπολογίσετε το μήκος L και το εμβαδό Ε του κύκλου (Ο,ρ)



---

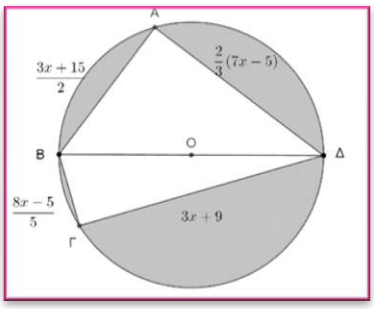
23. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και διάμετρο ΒΔ. Για τις πλευρές του τετράπλευρου ισχύει : ΑΒ=$\frac{3x+15}{2}$ cm , ΒΓ=$\frac{8x-5}{5}$ cm,

ΑΔ= 3x+9 cm , ΓΔ=$\frac{2}{3}(7x-5)$ cm.

Α) Αν η περίμετρος του τετράπλευρου είναι 66 cm , να βρείτε το x.

Β) Για x=5 cm να βρείτε :

i. Τις πλευρές του ΑΒΓΔ
ii. Την ακτίνα και το μήκος του κύκλου.
iii. Το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



Ενδεικτικά διαγωνίσματα Β΄ Γυμνασίου

Διαγώνισμα 1

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής;

Β. Τι λέγεται κλίση της ευθείας y=αx και με τι είναι ίση;

Γ. Να μεταφέρετε τις παρακάτω προτάσεις στην κόλλα σας με συμπληρωμένα τα κενά:

α)Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y=αx είναι μια .... που διέρχεται από την ....

β)Ο άξονας x΄x έχει εξίσωση ....

γ)Η γραφική παράσταση της ευθείας y=αx+β είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση .... που διέρχεται από το σημείο ....του άξονα y΄y.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Τι ονομάζεται ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Β. Τι ονομάζεται συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Γ. Ποιες τιμές μπορούν να πάρουν το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

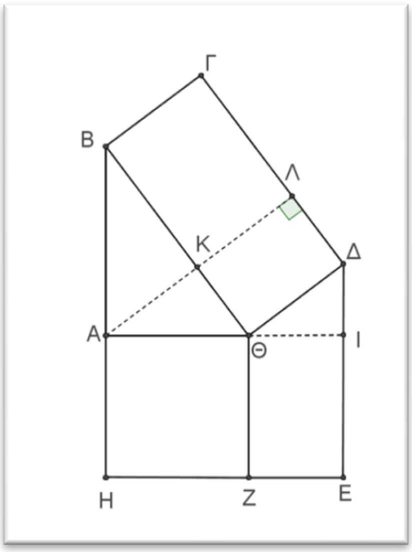
Α. Δίνεται η αλγεβρικής παράσταση α= -(x-2y)+2(7-x)-3(3-7y)-x-3y

Να βρείτε την τιμή της για x= -1 και y= $\frac{1}{20}$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{3}\left(7-\frac{\kappa+2}{2}\right)-\kappa=\frac{1}{2}\left(\frac{1-5\kappa}{3}\right)+\kappa-\frac{19}{6}$

Γ. Αν α είναι η αριθμητική τιμή του ερωτήματος Α και κ η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος Β , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση α και διέρχεται από το σημείο Μ(1,κ).

ΘΕΜΑ 2ο



Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΘ (Α=90^o) του διπλανού σχήματος με ΑΒ=16cm και εφ ΑΒΘ = $\frac{3}{4}$.

Εξωτερικά έχουμε σχεδιάσει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΒΓΔΘ , το τετράγωνο ΑΘΖΗ και το τραπέζιο ΘΔΕΖ με ύψος ΘΙ.

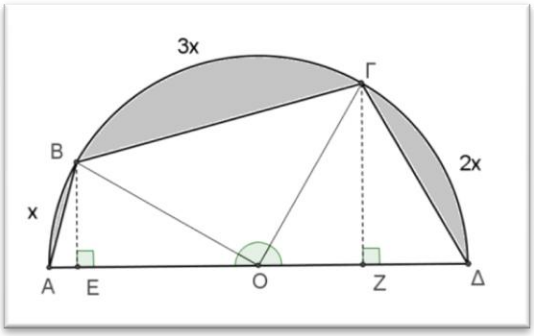
Δίνεται ότι ΗΕ=20cm και συνΔΘΙ=$\frac{4}{5}$.

Α. Να δείξετε ότι ΑΘ=12cm , ΒΘ=20cm , ΖΕ=8cm και ΘΔ=10cm.

Β. Να βρείτε το εμβαδό του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΗΑ
Γ. Να βρείτε το μήκος του κάθετου στο ΓΔ ευθύγραμμου τμήματος ΑΛ.

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΔ και μήκους $\ell=2\pi$ cm είναι εγγεγραμμένο το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Ισχύει $AB=x^o$ $B\Gamma=3x^o$ $\Gamma\Delta=2x^o$.



Α. Να δείξετε ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι ρ=2cm και να βρείτε τα μέτρα των γωνιών

ΑΟΒ , ΒΟΓ , ΓΟΔ.

Β. Να δείξετε ότι $B\Gamma=\sqrt{8}$ cm και να αιτιολογήσετε γιατί ΓΔ=2 cm .

Γ. Να βρείτε τα ύψη ΒΕ και ΓΖ των τριγώνων ΑΒΟ και ΓΟΔ αντίστοιχα καθώς και το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.

Διαγώνισμα 2

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Πότε δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

Β. Η συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}$, $x\neq 0$ συνδέει δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν : i) α >0 ii) α<0

Γ. Πώς ονομάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\frac{\alpha}{x}$ και ποιες συμμετρίες παρουσιάζει;

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα.
Β. Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

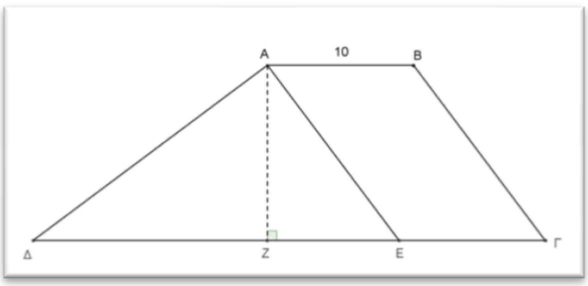
ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $2x-1-\frac{5x-2}{2}+\frac{6x-2}{5}=\frac{3x-4}{2}$

Β. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $AB=-4(x-1)+3(2x+1)-7$, $B\Gamma=x\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $A\Gamma=\frac{x-2}{2}+5$ είναι ορθογώνιο , όπου x είναι η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος Α.

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με μικρή βάση ΑΒ=10 cm και εμβαδό



(ΑΒΓΔ)=420 cm^2.Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ είναι παράλληλο στο ΒΓ (ΑΕ//ΒΓ) χωρίζει το τραπέζιο σε δύο σχήματα για τα οποία ισχύει: (ΑΒΓΕ)= $\frac{2}{5}$ (ΑΔΕ).Ισχύει ακόμη ότι ημΔ= $\frac{3}{5}$.

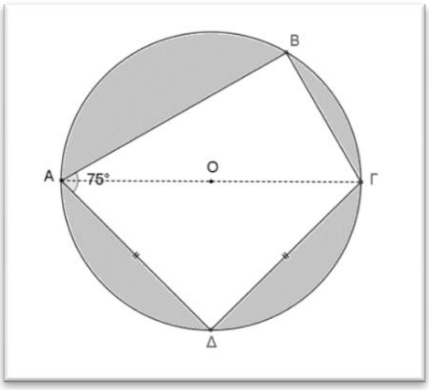
Α)Να αποδείξετε ότι (ΑΔΕ)=300 cm^2 και (ΑΒΓΕ)=120 cm^2 .

Β)Να δείξετε ότι το ύψος του τραπεζίου είναι ΑΖ=12cm και ότι ΔΕ=25cm.

Γ)Να βρείτε το ΑΔ και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο μήκους L=20π cm είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Η διαγώνιος ΑΓ του τετράπλευρου ταυτίζεται με διάμετρο του κύκλου. Δίνεται ότι ΑΔ=ΔΓ και ΒΑΔ=75^0



Α. Να δικαιολογήσετε γιατί οι γωνίες Β και Δ είναι ορθές και να βρείτε τα μέτρα των τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Β. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

Γ. Να βρείτε το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.