ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΑΚΕΛΟΣ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2019

ΕΚΠΟΝΗΣΗ | **Διαμαντίδης Δημήτριος,** Εκπαιδευτικός Δημοσίου Τομέα (ΠΕ03)
Εξωτερικοί εμπειρογνώμονες | **Στουραΐτης Κωνσταντίνος,** Εκπαιδευτικός Δημοσίου Τομέα (ΠΕ03)

ΔΡΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΄Η/ΚΑΙ ΕΚΠΟΝΗΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΤΥΧΟΝ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ (ΠΡΑΞΗ36/14-09-2017 ΤΟΥ ΔΣ ΤΟΥ ΙΕΠ ΚΑΙ ΣΕ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΝ ΜΕ ΑΡ. ΠΡΩΤ. 6139/19-09-2017 ΚΑΙ ΑΔΑ: 73Μ1ΟΞΛΔ-ΗΨ0 ΠΡΟΣΚΛΗΣΗ ΕΚΔΗΛΩΣΗΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΟΣ)

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Γεράσιμος Κουζέλης
Πρόεδρος του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Δράσης
Γεωργία Φέρμελη
Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΙΕΠ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Το παρόν εκπονήθηκε αμισθί, με ευθύνη της Μονάδας Φυσικών Επιστημών, Τεχνολογίας και Μαθηματικών του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής, στο πλαίσιο της ανωτέρω Δράσης.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.1 : ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ - ΔΕΙΓΜΑ – ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Ο δήμαρχος μιας πόλης θέλει να διερευνήσει τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η πόλη του ώστε να δώσει έμφαση στην επίλυση αυτών. Για το λόγο αυτό, ανέθεσε σε μια εταιρεία δημοσκοπήσεων μια έρευνα κατά την οποία 500 δημότες κλήθηκαν να δηλώσουν, ποιο πρόβλημα της πόλης θεωρούν το πιο σημαντικό. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι:
   1) Οι 500 δημότες που ρωτήθηκαν.
   2) Όλοι οι δημότες της πόλης.
   3) Όλοι οι Έλληνες πολίτες.
2) Το δείγμα αποτελούν:
   1) Οι 500 δημότες που ρωτήθηκαν.
   2) Όλοι οι δημότες της πόλης.
   3) Όλοι οι Έλληνες πολίτες.
3) Η μεταβλητή της έρευνας είναι:
   1) Τα προβλήματα της πόλης.
   2) Τα προβλήματα των δημοτών.
   3) Ποιο πρόβλημα της πόλης θεωρείται το πιο σημαντικό.

<u>Λύση</u>

1) Όλοι οι δημότες της πόλης

2) Οι 500 δημότες που ρωτήθηκαν

3) Ποιο πρόβλημα της πόλης θεωρείται το πιο σημαντικό

Άσκηση 2

Στις παρακάτω περιπτώσεις ποιες μπορεί να είναι οι μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν; Να γίνει η διάκρισή τους σε ποιοτικές ή ποσοτικές και να αναφερθούν μερικές δυνατές τιμές τους:

1) Εξετάζουμε ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας.
2) Εξετάζουμε ένα δείγμα προϊόντων από μια παραγωγή.
3) Εξετάζουμε ένα δείγμα τηλεθεατών.
4) Εξετάζουμε τους καλαθοσφαιριστές μιας ομάδας σε έναν αγώνα.

Λύση

1) Ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας θα μπορούσε να εξεταστεί ως προς τις αμοιβές τους. Τότε η μεταβλητή είναι «ύψος αμοιβής», είναι ποσοτική και μερικές τιμές της θα μπορούσε να είναι 580, 750, 1250, 2500 Ευρώ.

Ωστόσο, το ίδιο δείγμα υπαλλήλων θα μπορούσε να εξεταστεί ως προς τις σπουδές. Η μεταβλητή θα μπορούσε να είναι «επίπεδο σπουδών», που είναι ποιοτική και μερικές τιμές της θα μπορούσαν να είναι: «απολυτήριο Γυμνασίου», «απολυτήριο Λυκείου», «πτυχίο ανώτατης εκπαίδευσης», «μεταπτυχιακό δίπλωμα», «διδακτορικό δίπλωμα» κ.α. Ή θα μπορούσε να είναι «κατεύθυνση σπουδών» που είναι ποιοτική και μερικές τιμές της είναι «οικονομικές», «μηχανικού», «διοικητικού» κ.α.

2) Ένα δείγμα προϊόντων θα μπορούσε να εξεταστεί με μεταβλητή την ποιότητα (ποιοτική μεταβλητή) και τιμές της θα μπορούσε να είναι: «αποδεκτό» και «απορριπτέο». Αλλά θα μπορούσε να εξεταστεί και με μεταβλητή το βάρος (ποσοτική μεταβλητή).

Ομοίως για τα ερωτήματα 3, 4.

Άσκηση 3

Για της ανάγκες μιας έρευνας συγκεντρώσαμε στοιχεία από διερχόμενα οχήματα, σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο της πόλης, κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται μερικά από τα στοιχεία αυτά.

Είδος οχήματος	Χρώμα οχήματος	Ταχύτητα σε Km/h	Πλήθος επιβατών
Φορτηγό	Κόκκινο	26	2
Αυτοκίνητο ΙΧ	Γκρι	38	4
Ποδήλατο	Πράσινο	13	1
Λεωφορείο	Λευκό	34	25
Μοτοσικλέτα	Μαύρο	62	2

Ποιες είναι οι μεταβλητές της έρευνας και ποιό το είδος τους;

Λύση

Πρώτη στήλη: κατηγορία (είδος) οχήματος – ποιοτική μεταβλητή

Δεύτερη στήλη: χρώμα οχήματος – ποιοτική μεταβλητή

Τρίτη στήλη: ταχύτητα οχήματος στο συγκεκριμένο σημείο τη στιγμή της καταγραφής – ποσοτική μεταβλητή

Τέταρτη στήλη: πλήθος επιβατών τη στιγμή της καταγραφής – ποσοτική μεταβλητή

Σχόλιο: η ταχύτητα του οχήματος θα μπορούσε να θεωρηθεί συνεχής ή διακριτή μεταβλητή (ανάλογα με το αν «επιτρέπουμε» ή όχι όλες τις τιμές μεταξύ δύο ακέραιων αριθμών). Αντιθέτως, το πλήθος επιβατών προφανώς δεν μπορεί να θεωρηθεί συνεχής.

Άσκηση 4

Σε μια εκπομπή δημόσιας συζήτησης, συγκεκριμένου τηλεοπτικού καναλιού, το κοινό καλείται να ψηφίσει, αν συμφωνεί με την Α άποψη ή τη Β άποψη. Να αναφέρετε δύο λόγους για τους οποίους τα αποτελέσματα της ψηφοφορίας δεν μπορεί να γενικευτούν σε ολόκληρη την κοινωνία.

Λύση

Το δείγμα (οι τηλεθεατές που απάντησαν) δεν είναι αντιπροσωπευτικό της κοινωνίας, αφού καθορίζεται από το ποιοι προτιμούν να βλέπουν τηλεόραση και ποιοι προτιμούν το συγκεκριμένο τηλεοπτικό κανάλι, ποια ώρα διεξάγεται η έρευνα, τον τρόπο ψηφοφορίας (τηλέφωνο, διαδίκτυο, κλπ), κοκ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.2: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Το επάγγελμα του πατέρα 20 μαθητών καταγράφηκε στον διπλανό πίνακα. Να κάνετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα.

Επάγγελμα πατέρα	Αριθμός ατόμων
Ιδιωτικός υπάλληλος	6
Δημόσιος υπάλληλος	7
Αυτοαπασχολούμενος	5
Άλλο	2

Λύση

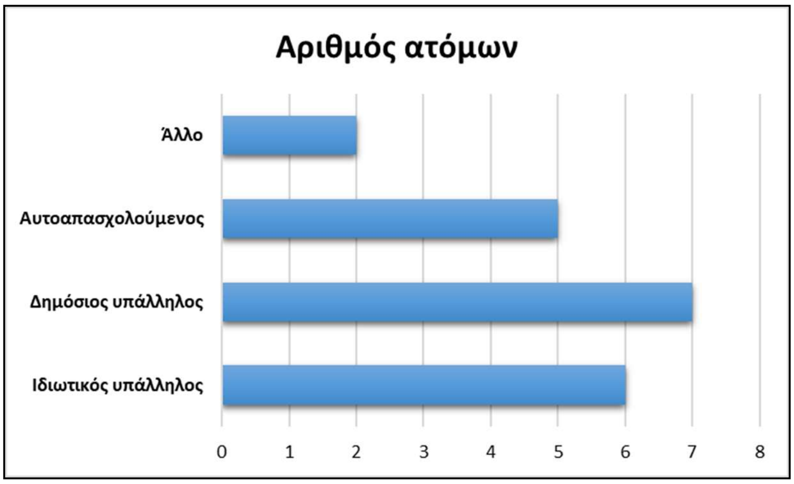
Οι σχετικές συχνότητες είναι:

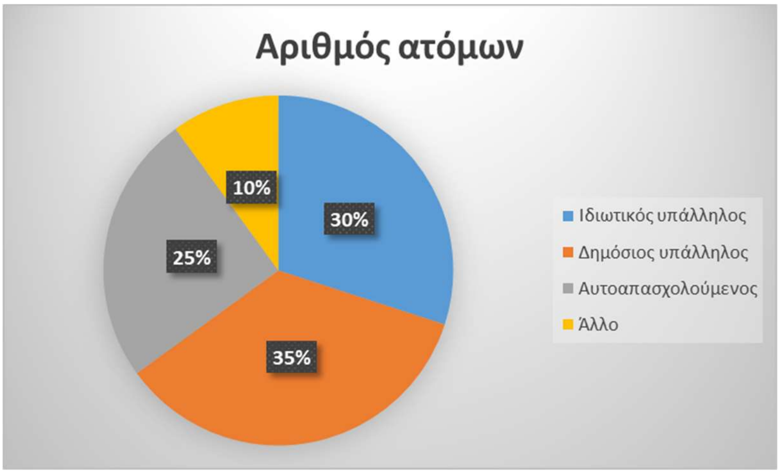
$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{6}{20} = 0,3$ και $f_1\% = 30\%$, $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{7}{20} = 0,35$ και $f_2\% = 35\%$, κοκ

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας σχετικών συχνοτήτων

Επάγγελμα πατέρα	Αριθμός ατόμων	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
Ιδιωτικός υπάλληλος	6	0,3	30%
Δημόσιος υπάλληλος	7	0,35	35%
Αυτοαπασχολούμενος	5	0,25	25%
Άλλο	2	0,1	10%
Σύνολο	20	1,0	100%

Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα φαίνονται παρακάτω:





Άσκηση 2

Στον διπλανό πίνακα δίνονται τα καθαρά κέρδη μιας εταιρείας, ανά έτος, από το 2014 έως και το 2017. Να κάνετε χρονόγραμμα όπου να φαίνεται η εξέλιξη των κερδών σε σχέση με το χρόνο.

Έτος	**Κέρδη σε ευρώ**
2014	180.000
2015	270.000
2016	230.000
2017	210.000

<u>Λύση</u>

Το χρονόγραμμα φαίνεται παρακάτω:

Άσκηση 3

Η στατιστική υπηρεσία της Πυροσβεστικής μας έδωσε το διπλανό κυκλικό διάγραμμα, που παρουσιάζει τα ποσοστά των κλήσεων ανά κατηγορία. Αν το σύνολο των κλήσεων είναι 60.400, να γίνει πίνακας συχνοτήτων.

<u>Λύση</u>

Οι επεμβάσεις σε ανελκυστήρες είναι το 27% των 60.400 κλήσεων, άρα είναι $27\% \cdot 60400 = \frac{27}{100} \cdot 60400 = 16308$, και ομοίως υπολογίζουμε για τις υπόλοιπες κατηγορίες κλήσεων. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων:

κατηγορίες κλήσεων	**Αριθμός κλήσεων**	**σχετική συχνότητα %**
Επεμβάσεις σε ανελκυστήρες	16.308	27%
Παροχές βοήθειας	12.684	21%
Πυρκαγιές	28.388	47%
Ψευδείς αγγελίες	3.020	5%
Σύνολο	60.400	100%

Άσκηση 4

Δίνεται η ποσοστιαία σύνθεση (%) του προσωπικού μιας επιχείρησης, με αριθμό υπαλλήλων 80 άτομα ως προς το μορφωτικό τους επίπεδο.

1) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
2) Να απεικονίσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα συχνοτήτων και με κυκλικό διάγραμμα.

Επίπεδο μόρφωσης	Ποσοστό (%)
Πτυχιούχοι Α.Ε.Ι.	20
Πτυχιούχοι Τ.Ε.Ι.	50
Απόφοιτοι Λυκείου	30

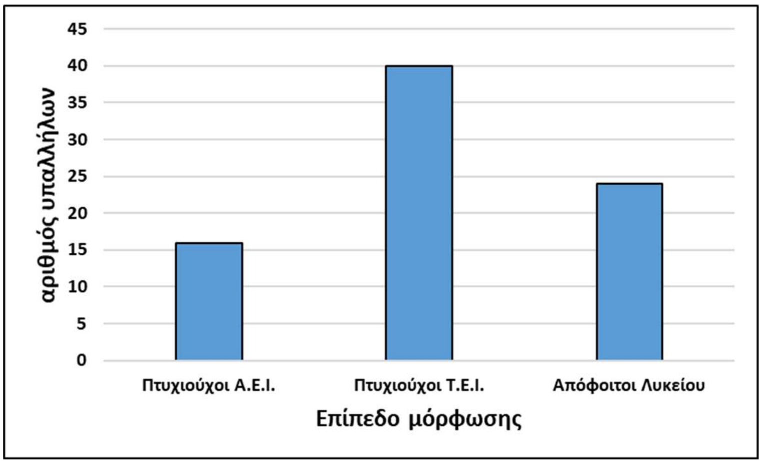
<u>Λύση</u>

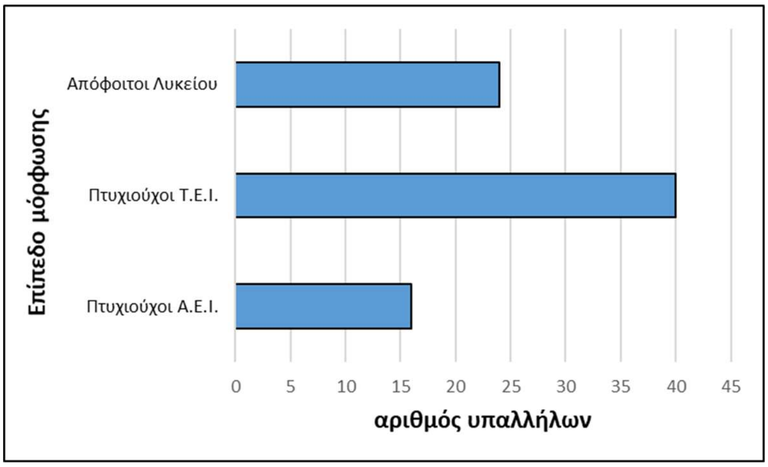
Οι πτυχιούχοι ΑΕΙ είναι το 20% των 80 υπαλλήλων, άρα $20\% \cdot 80 = \frac{20}{100} \cdot 80 = 16$ υπάλληλοι. Ομοίως βρίσκουμε ότι πτυχιούχοι ΤΕΙ είναι 40 υπάλληλοι και απόφοιτοι Λυκείου είναι 24 υπάλληλοι. Κατασκευάζουμε έτσι τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων:

Επίπεδο μόρφωσης (μεταβλητή)	αριθμός υπαλλήλων (συχνότητα)	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
Πτυχιούχοι Α.Ε.Ι.	16	0,2	20%
Πτυχιούχοι Τ.Ε.Ι.	40	0,5	50%
Απόφοιτοι Λυκείου	24	0,3	30%
Σύνολο υπαλλήλων	80	1,0	100%

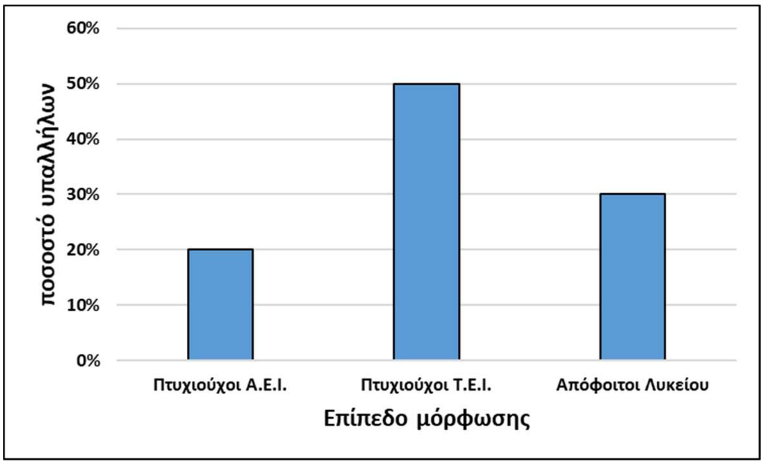
Παρακάτω φαίνονται ραβδογράμματα και κυκλικά διαγράμματα που αναπαριστούν αυτά τα δεδομένα. Η επιλογή κάποιου από αυτά εξαρτάται από τους στόχους της παρουσίασης και την προτίμηση αυτού που το παρουσιάζει.

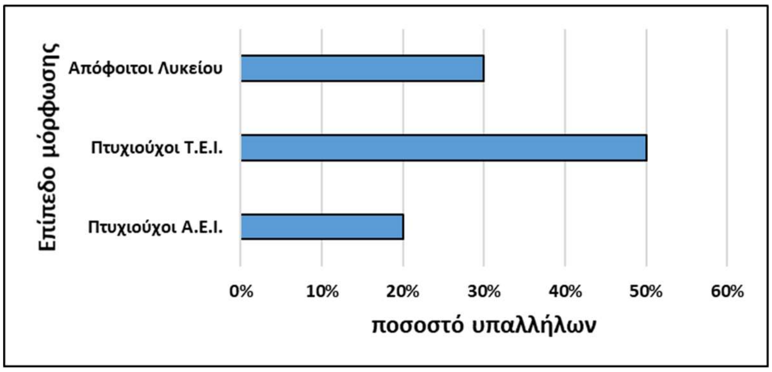
ραβδογράμματα συχνοτήτων:



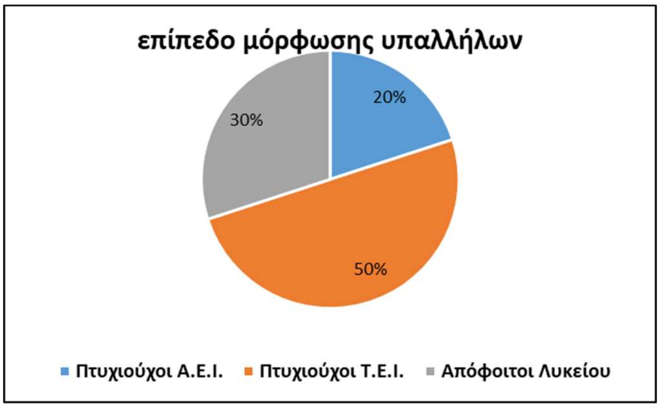


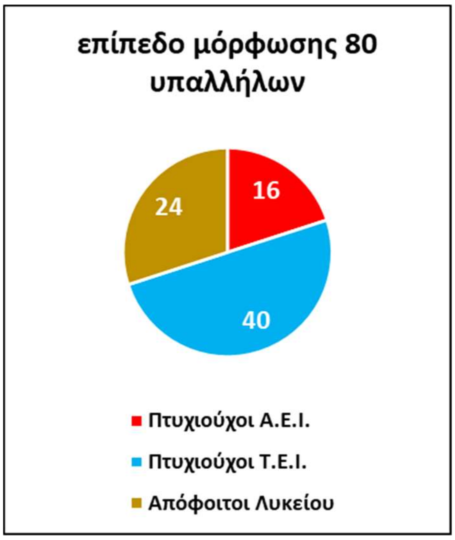
ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων:





Κυκλικά διαγράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων:





Άσκηση 5

Οι βαθμοί στην Ιστορία 25 μαθητών, ενός τμήματος της Β΄ τάξης ΓΕΛ, είναι:

1) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
2) Να απεικονίσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα συχνοτήτων και με σημειόγραμμα.

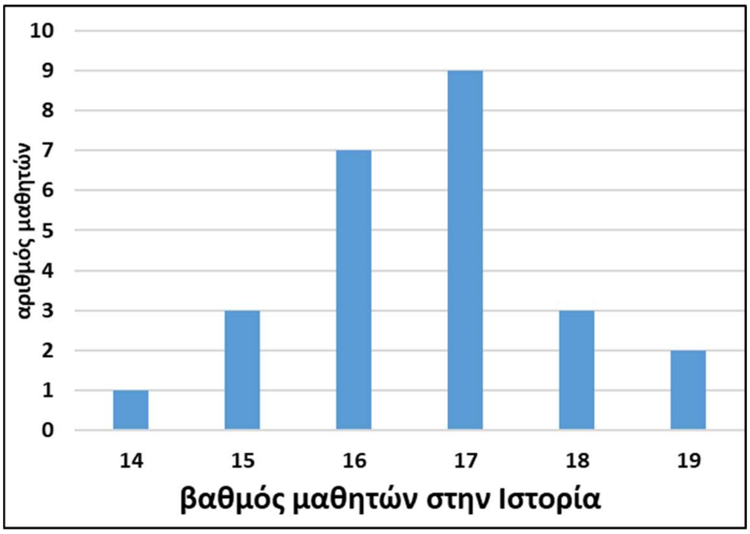
16	15	17	16	17
18	17	16	17	18
16	19	17	15	16
17	16	15	17	18
17	14	17	16	19

Λύση

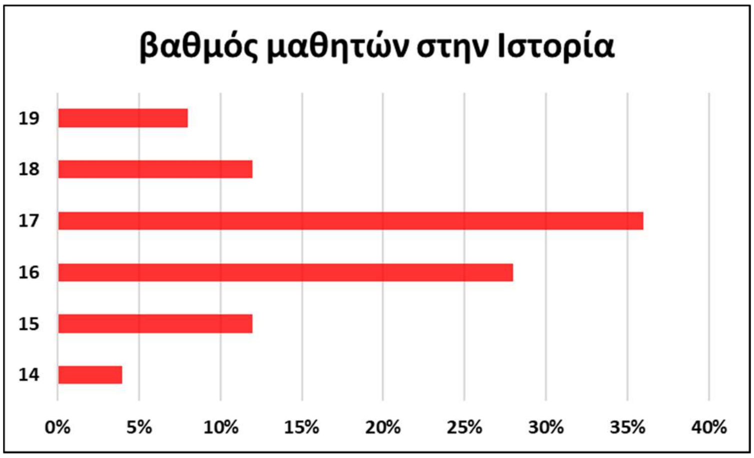
1) Μετά την καταμέτρηση και τους υπολογισμούς, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων είναι ο εξής:

βαθμός (μεταβλητή)	**αριθμός μαθητών (συχνότητα)**	**σχετική συχνότητα**	**σχετική συχνότητα %**
14	1	0,04	4%
15	3	0,12	12%
16	7	0,28	28%
17	9	0,36	36%
18	3	0,12	12%
19	2	0,8	8%
Σύνολο	25	1,0	100%

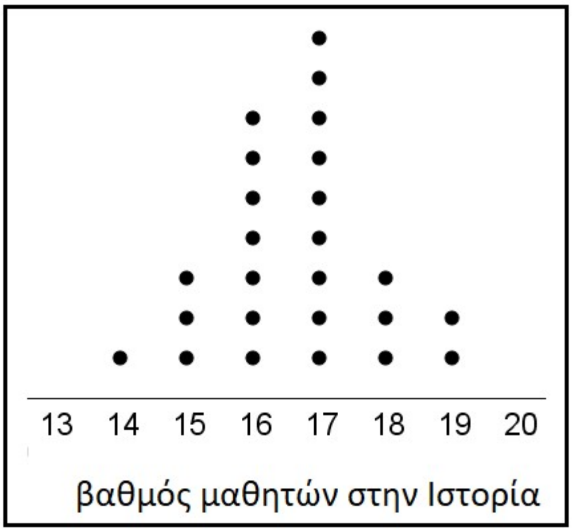
2) Ραβδόγραμμα συχνοτήτων:



Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων:



Σημειόγραμμα:



Άσκηση 6

Οι πιο κάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις της άνω έδρας ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 30 φορές.

2	5	6	1	2	5	4	3	2	5
1	3	5	4	1	3	2	6	5	4
1	2	6	2	4	3	1	6	4	5

1) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.

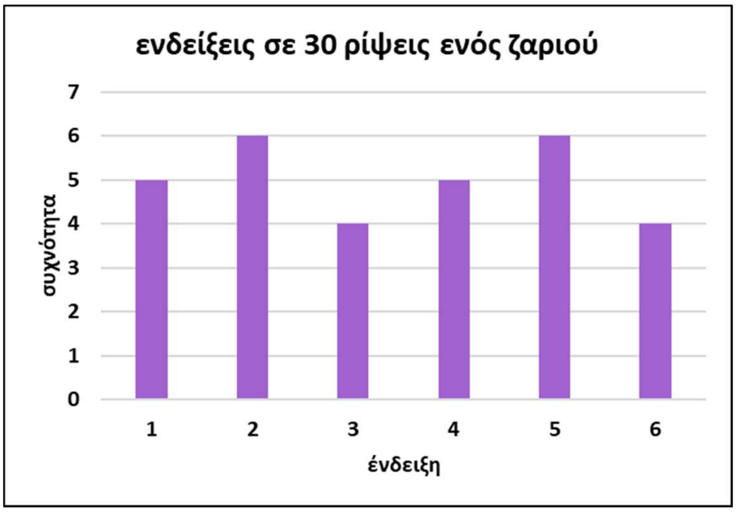
2) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Λύση

Μετά την καταμέτρηση και τους υπολογισμούς, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων είναι ο εξής:

ένδειξη ζαριού (μεταβλητή)	**συχνότητα**	**σχετική συχνότητα**	**σχετική συχνότητα %**
1	5	0,167	16,7%
2	6	0,2	20%
3	4	0,133	13,3%
4	5	0,167	16,7%
5	6	0,2	20%
6	4	0,133	13,3%
Σύνολο	30	1,00	100%

Ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται παρακάτω



Άσκηση 7

Στον πιο κάτω πίνακα δίνεται η συγκέντρωση (mgr/cm^3) ενός ρύπου στον αέρα 40 πόλεων της χώρας.

16	24	36	47	23	22	43	27	49	48
12	32	17	38	42	27	31	50	38	21
36	19	28	31	28	25	45	12	57	51
22	23	24	25	24	37	43	25	39	51

1) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις στις κλάσεις: [10,20), [20,30), [30,40), [40,50) και [50,60).

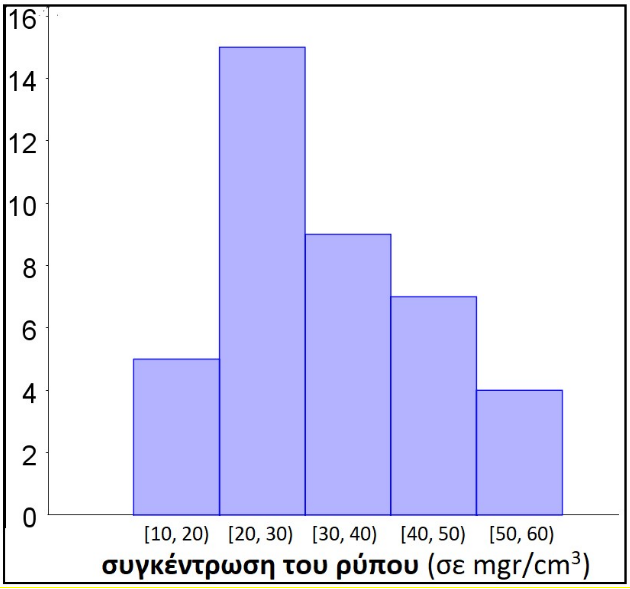
2) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

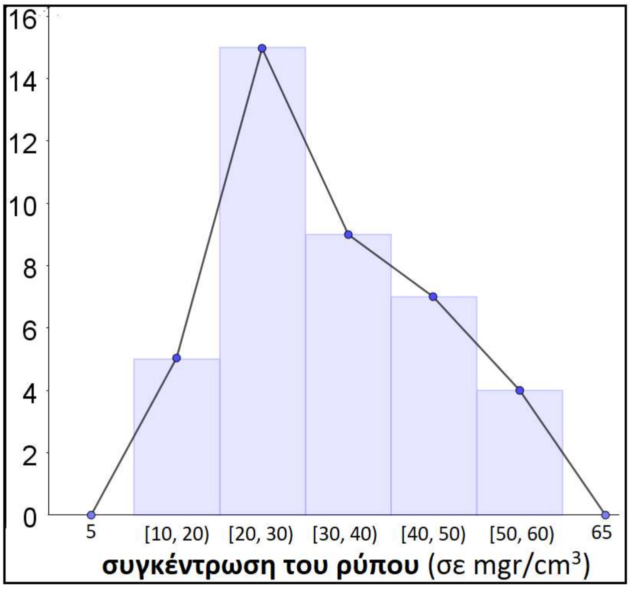
3) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Λύση

Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων

συγκέντρωση του ρύπου (σε mgr/cm^3)	**συχνότητα**	**σχετική συχνότητα**	**σχετική συχνότητα %**
[10,20)	5	0,125	12,5%
[20,30)	15	0,375	37,5%
[30,40)	9	0,225	22,5%
[40,50)	7	0,175	17,5%
[50,60)	4	0,1	10%
Σύνολο	40	1,00	100%





Άσκηση 8

Οι 50 εργάτες ενός εργοστασίου έχουν τις παρακάτω ηλικίες:

21	43	50	25	55	30	28	40	31	51
18	47	52	34	47	32	27	41	35	54
30	48	36	43	38	33	27	39	41	43
32	22	46	52	29	32	34	34	42	36
35	28	57	56	20	38	27	27	40	35

1) Να ομαδοποιήσετε τις ηλικίες στις κλάσεις: [18,28), [28,38), [38,48) και [48,58).

2) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

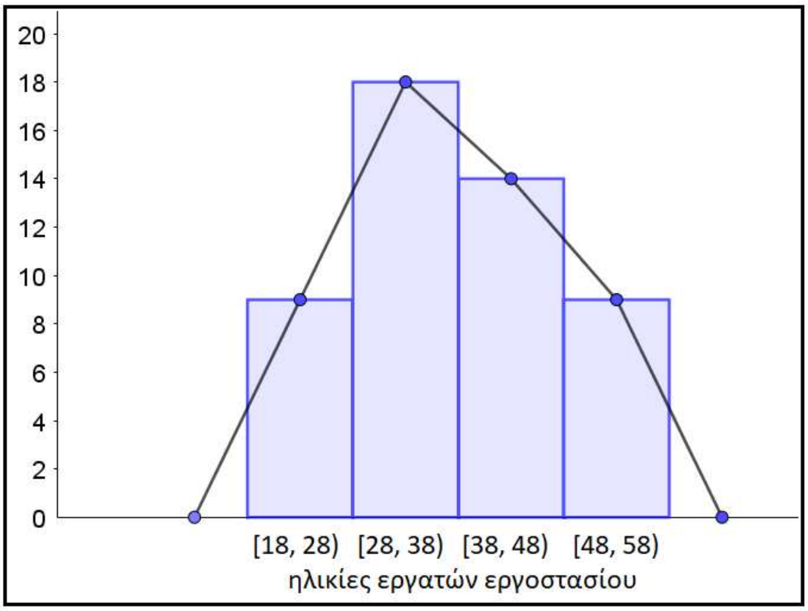
3) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

<u>Λύση</u>

Ο πίνακας συχνοτήτων μετά την ομαδοποίηση διαμορφώνεται ως εξής:

ηλικίες εργατών	**συχνότητα**	**σχετική συχνότητα**	**σχετική συχνότητα %**
[18,28)	9	0,18	18%
[28,38)	18	0,36	36%
[38,48)	14	0,28	28%
[48,58)	9	0,18	18%
Σύνολο	50	1,00	100%

Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται παρακάτω:



ΕΝΟΤΗΤΑ 3.3: ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΘΗΚΟΓΡΑΜΜΑ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Οι βαθμοί του Αντρέα σε 4 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά ήταν 15, 18, 18, 17. Για τα ίδια διαγωνίσματα, ο Βασίλης είχε πάρει 2 μονάδες περισσότερες, σε κάθε διαγώνισμα, από τον Αντρέα, ενώ ο Γιάννης είχε πάρει 4 μονάδες λιγότερες από τον Αντρέα, σε κάθε διαγώνισμα. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του κάθε παιδιού.

Λύση

Η μέση τιμή (ο μέσος όρος) των βαθμών του Ανδρέα είναι το άθροισμα των βαθμών δια το πλήθος των μαθημάτων, δηλαδή: $\frac{15+18+18+17}{4}=17$. Ομοίως βρίσκουμε ότι για το Βασίλη είναι $\frac{17+20+20+19}{4}=19$ και για το Γιάννη $\frac{11+14+14+13}{4}=13$. Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή των βαθμών του Βασίλη είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερη εκείνης του Ανδρέα. Αυτό οφείλεται στις 2 μονάδες που έχει πάρει παραπάνω ο Βασίλης από τον Ανδρέα σε κάθε μάθημα. Ομοίως, αφού κάθε βαθμός του Γιάννη είναι κατά 4 μικρότερος του αντίστοιχου βαθμού του Ανδρέα, ο μέσος όρος του Γιάννη θα είναι κατά 4 βαθμούς μικρότερος του μέσου όρου του Ανδρέα. (βλέπε και εφαρμογή 2)

Άσκηση 2

Αν ο μέσος όρος του μηνιαίου μισθού των υπαλλήλων ενός εργοστασίου πέρυσι ήταν 850€ και φέτος σε κάθε υπάλληλο δοθεί αύξηση 50€, να βρείτε τον νέο μέσο όρο των μισθών.

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των υπαλλήλων είναι ν, τότε το άθροισμα των μισθών όλων των υπαλλήλων την περσινή χρονιά θα ήταν $\nu \cdot 850$ € και τη φετινή χρονιά θα είναι $\nu \cdot 850 + \nu \cdot 50$ €, οπότε ο νέος μέσος όρος των μισθών θα είναι $\frac{\nu \cdot 850 + \nu \cdot 50}{\nu} = 900$ €.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε χωρίς τους παραπάνω υπολογισμούς που έχουν ως αφετηρία την υπόθεση ότι το πλήθος των υπαλλήλων είναι ν. Εφόσον κάθε μισθός αυξήθηκε κατά 50€, και ο μέσος όρος θα έχει αυξηθεί κατά 50€.

Επέκταση: Με δεδομένο ότι ο βασικός μισθός το 2019 είναι 650€, και για έγγαμο εργαζόμενο με προϋπηρεσία τριών χρόνων διαμορφώνεται στα 780€, ποιοι θα μπορούσε να είναι οι μισθοί 100 υπαλλήλων αν η μέση τιμή είναι 900€; Μπορείτε να σκεφτείτε ένα παράδειγμα τέτοιο ώστε η δήλωση "ο μέσος μισθός των υπαλλήλων του εργοστασίου είναι 900€" να είναι παραπλανητική, ακόμα κι αν είναι στατιστικά σωστή;

Άσκηση 3

Καθεμία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων έχουν μέση τιμή 50.

(I) 0, 20, 40, 50, 60, 80, 100

(II) 0, 48, 49, 50, 51, 52, 100

(III) 0, 1, 2, 50, 98, 99, 100

1) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εύρος για σύγκριση της μεταβλητότητας των δεδομένων αυτών;

2) Χωρίς να γίνουν οι πράξεις, να βρείτε σε ποια λίστα υπάρχει μεγαλύτερη και σε ποια μικρότερη διασπορά παρατηρήσεων.

Λύση

1) Για όλες τις λίστες δεδομένων το εύρος είναι $100 - 0 = 100$. Οπότε, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εύρος για να διακρίνουμε διαφορές στη μεταβλητότητα μεταξύ των τριών ομάδων δεδομένων.

2) Αναζητώντας ποια ομάδα έχει περισσότερο διάσπαρτα δεδομένα, παρατηρούμε καταρχάς ότι όλες περιλαμβάνουν το 0, το 50 και το 100. Πέραν αυτών των τριών, στη δεύτερη ομάδα (0, 48, 49, 50, 51, 52, 100) τα υπόλοιπα δεδομένα βρίσκονται πολύ κοντά στο κέντρο (που είναι η μέση τιμή, δηλ. το 50). Στην τρίτη ομάδα (0, 1, 2, 50, 98, 99, 100) τα υπόλοιπα δεδομένα βρίσκονται μακριά από το κέντρο (πιο κοντά στα άκρα 0 και 100). Τέλος, στην πρώτη ομάδα (0, 20, 40, 50, 60, 80, 100) οι τιμές 20, 40, 60, 80 είναι πιο ομαλά τοποθετημένες ανάμεσα στα άκρα (0 και 100) και στο κέντρο (50).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τη μεγαλύτερη διασπορά έχει η τρίτη λίστα, τη μικρότερη διασπορά έχει η δεύτερη λίστα, ενώ η διασπορά της πρώτης λίστας βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις δύο άλλες.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δείγματα δεδομένων και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα:

α) 1, 2, 6 β) 2, 4, 12 γ) 11, 12, 16 δ) 12, 14, 22

Λύση

Για τη μέση τιμή των τεσσάρων δειγμάτων έχουμε αντιστοίχως:

$$\overline{x}_1 = \frac{1+2+6}{3} = 3, \quad \overline{x}_2 = \frac{2+4+12}{3} = 6,$$

$$\overline{x}_3 = \frac{11+12+16}{3} = 13, \quad \overline{x}_4 = \frac{12+14+22}{3} = 16$$

Ενώ για τις διαμέσους έχουμε αντιστοίχως:

$\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 4$, $\delta_3 = 12$, $\delta_4 = 14$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του δεύτερου δείγματος είναι διπλάσιες των τιμών του πρώτου και για αυτό ισχύει $\overline{x}_2 = 2 \cdot \overline{x}_1$ και $\delta_2 = 2 \cdot \delta_1$.

Οι τιμές του τρίτου δείγματος προέρχονται από τις τιμές του πρώτου αν τις αυξήσουμε κατά 10 και για αυτό ισχύει $\overline{x}_3 = \overline{x}_1 + 10$ και $\delta_3 = \delta_1 + 10$.

Τέλος, οι τιμές του τέταρτου δείγματος προκύπτουν αν διπλασιάσουμε τις τιμές του πρώτου και στο αποτέλεσμα προσθέσουμε 10. Για το λόγο αυτό ισχύει $\overline{x}_4 = 2 \cdot \overline{x}_1 + 10$ και $\delta_4 = 2 \cdot \delta_1 + 10$.

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση για καθεμιά από τις παρακάτω λίστες δεδομένων. Συγκρίνοντας τα δεδομένα και τα αποτελέσματα, τι συμπέρασμα βγάζετε;

α) 1, 3, 4, 5, 7 β) 3, 9, 12, 15, 21 γ) 6, 8, 9, 10, 12 δ) -1, -3, -4, -5, -7

Λύση

Για την (α) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\overline{x}_\alpha = \frac{1+3+4+5+7}{5} = 4$$

$$s_\alpha^2 = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

και $s_\alpha = \sqrt{4} = 2$

Για τη (β) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\overline{x}_\beta = \frac{3+9+12+15+21}{5} = 12$$

$$s_{\beta}^2 = \frac{(3-12)^2+(9-12)^2+(12-12)^2+(15-12)^2+(21-12)^2}{5} = \frac{81+9+0+9+81}{5} = 36$$

και $s_{\beta} = \sqrt{36} = 6$

Για τη (γ) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\overline{x}_{\gamma} = \frac{6+8+9+10+12}{5} = 9$$

$$s_{\gamma}^2 = \frac{(6-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(10-9)^2+(12-9)^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

και $s_{\gamma} = \sqrt{4} = 2$

Τέλος, για τη (δ) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\overline{x}_{\delta} = \frac{(-1)+(-3)+(-4)+(-5)+(-7)}{5} = -4$$

$$s_{\delta}^2 = \frac{(-1-(-4))^2+(-3-(-4))^2+(4-(-4))^2+(5-(-4))^2+(7-(-4))^2}{5} =$$

$$= \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

και $s_{\delta} = \sqrt{4} = 2$

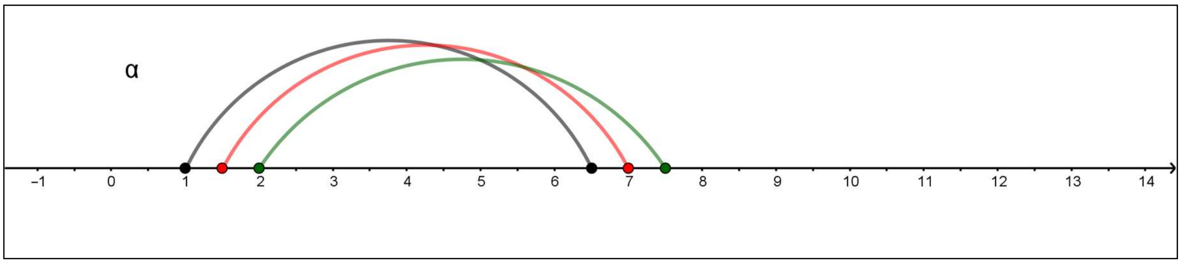
Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα δεδομένα της πρώτης ομάδας επί 3 παίρνουμε τα δεδομένα της δεύτερης. Η διακύμανση της δεύτερης ομάδας είναι 9πλάσια ($9=3^2$) της διακύμανσης της πρώτης και η τυπική απόκλιση είναι τριπλάσια. Δηλαδή: $s_{\beta}^2 = 3^2 \cdot s_{\alpha}^2$ και $s_{\beta} = 3 \cdot s_{\alpha}$

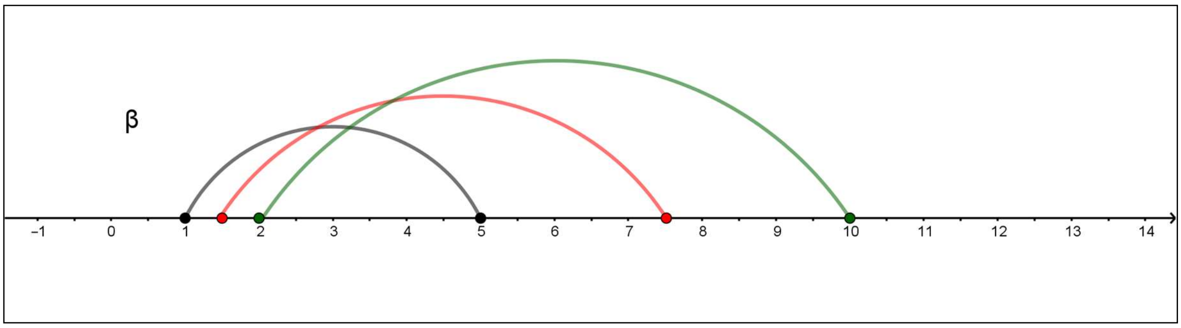
Αν στα δεδομένα της πρώτης ομάδας προσθέσουμε 5, παίρνουμε τα δεδομένα της τρίτης ομάδας. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση της τρίτης ομάδας παραμένουν ίδιες με της πρώτης. Δηλαδή: $s_{\gamma}^2 = s_{\alpha}^2$ και $s_{\gamma} = s_{\alpha}$.

Τέλος, τα δεδομένα της τέταρτης ομάδας είναι τα αντίθετα της πρώτης, ή αλλιώς προκύπτουν από τα δεδομένα της πρώτης με πολλαπλασιασμό επί -1. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση της τέταρτης ομάδας παραμένουν ίδιες με της πρώτης. Δηλαδή: $s_{\delta}^2 = s_{\alpha}^2$ και $s_{\delta} = s_{\alpha}$

Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι πολλαπλασιάζοντας τα δεδομένα με κάποιον αριθμό, η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται με την απόλυτη τιμή του αριθμού. Αν όμως προσθέσουμε σε όλα τα δεδομένα τον ίδιο αριθμό, η τυπική απόκλιση δεν μεταβάλλεται.

Σχηματικά, με την πρόσθεση του ίδιου αριθμού σε όλα τα δεδομένα, τα μετατοπίζουμε στον άξονα, χωρίς να αλλάζουμε τις μεταξύ τους αποστάσεις (βλέπε σχήμα α). Αλλά πολλαπλασιάζοντάς τα με τον ίδιο αριθμό τα μετατοπίζουμε και οι μεταξύ τους αποστάσεις πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό (βλέπε σχήμα β).





Χρησιμοποιώντας συμβολική γλώσσα, τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

Αν συμβολίσουμε $x_{\alpha 1}=1,\ \ x_{\alpha 2}=3,\ \ x_{\alpha 3}=4,\ \ x_{\alpha 4}=5,\ \ x_{\alpha 5}=7$, δηλαδή αν συμβολίσουμε με $x_{\alpha i}, \mathrm{i}=1,2,3,4,5$ τα δεδομένα της (α) ομάδας, και με $x_{\beta i},\ \ x_{\gamma i},\ \ x_{\delta i}$ τα δεδομένα των (β), (γ) και (δ) ομάδων αντιστοίχως, τότε έχουμε:

$x_{\beta i}=3\cdot x_{\alpha i}$, $\quad x_{\gamma i}=x_{\alpha i}+5$, $\quad x_{\delta i}=-x_{\alpha i}=(-1)\cdot x_{\alpha i}$

Για τις αντίστοιχες διακυμάνσεις και τυπικές αποκλίσεις έχουμε:

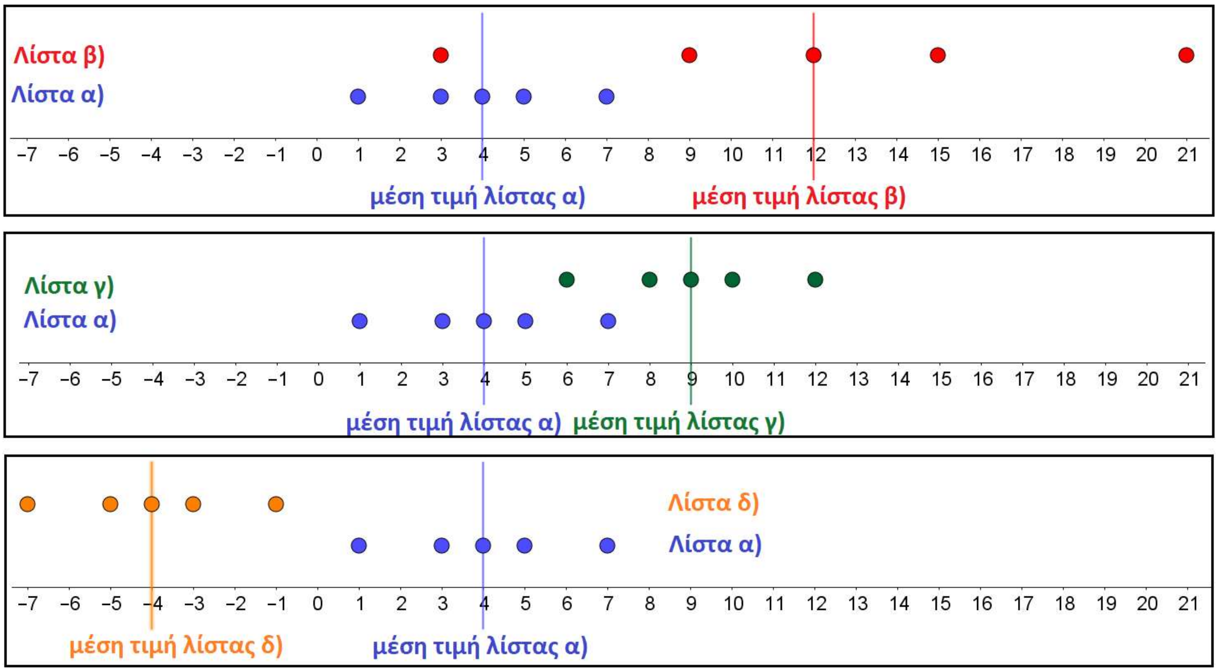
$s_{\beta}^{2}=3^{2}\cdot s_{\alpha}^{2}$ και $s_{\beta}=3\cdot s_{\alpha}$

$s_{\gamma}^{2}=s_{\alpha}^{2}$ και $s_{\gamma}=s_{\alpha}$

$s_{\delta}^{2}=(-1)^{2}\cdot s_{\alpha}^{2}=s_{\alpha}^{2}$ και $s_{\delta}=s_{\alpha}$.

Σε κάθε μία από τις τρεις παρακάτω γραφικές παραστάσεις βρίσκονται τοποθετημένες, σε μία νοητή ευθεία, πάνω από μία αριθμογραμμή, οι τιμές της λίστας δεδομένων α). Επίσης στην 1η, τη 2η και την 3η γραφική παράσταση βρίσκονται οι τιμές της λίστας β), της λίστας γ) και της λίστας δ), αντίστοιχα, κατά τον ίδιο τρόπο, ώστε σε κάθε περίπτωση να μπορούν να γίνουν συγκρίσεις.

Επίσης, σε κάθε γραφική παράταση, παριστάνεται η «θέση» της μέσης τιμής κάθε λίστας με μία κατακόρυφη γραμμή, του αντίστοιχου χρώματος. Τα συμπεράσματα των παραπάνω αλγεβρικών συλλογισμών (για τις μεταβολές στη μέση τιμή, αλλά και τη διασπορά) φαίνονται σε αυτές τις γραφικές παραστάσεις.



Άσκηση 6

Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 17. Να υπολογίσετε:

1) Τα τρία μέτρα θέσης, μέση τιμή, διάμεσο και επικρατούσα τιμή.
2) Το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Λύση

1) Για τη μέση τιμή (το μέσο όρο των βαθμών) έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{8+15+13+20+9+13+17+19+20+9+10+10+15+13+14+17}{16} = 13,875$$

Για να βρούμε τη διάμεσο διατάσσουμε τα δεδομένα (τους βαθμούς των μαθητών) σε αύξουσα σειρά: 8, 9, 9, 10, 10, 13, 13, 13, 14, 15, 15, 17, 17, 19, 20, 20.

Η διάμεσος των 16 παρατηρήσεων είναι ο μέσος όρος της 8^{ης} και της 9^{ης} παρατήρησης, δηλαδή $\delta = \dfrac{13+14}{2} = 13,5$

Η επικρατούσα τιμή είναι το 13, δηλαδή $\mathrm{M}_0 = 13$.

2) Το εύρος είναι $R = 20 - 8 = 12$.

Για την τυπική απόκλιση έχουμε:

$$s = \sqrt{\frac{(8-13,875)^2 + (9-13,875)^2 + \ldots + (20-13,875)^2}{16}} \simeq 3,85$$

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα λογιστικό φύλλο για να κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα:

παρατήρηση x_i	συχνότητα ν_i	$(x_i - \overline{x})^2$	$\nu_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
8	1	34,51563	34,51563
9	2	23,76563	47,53125
10	2	15,01563	30,03125
13	3	0,765625	2,296875
14	1	0,015625	0,015625
15	2	1,265625	2,53125
17	2	9,765625	19,53125
19	1	26,26563	26,26563
20	2	37,51563	75,03125
		Σύνολο:	237,75

Οπότε, $s = \sqrt{\dfrac{237,75}{16}} \simeq 3,85$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έτοιμα εργαλεία του λογιστικού φύλλου για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση.

Τέλος, ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{3,85}{13,875} \simeq 28\%$

Άσκηση 7

Η μέση τιμή ηλικίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 32 χρόνια. Ποια θα είναι η μέση τιμή ηλικίας των ίδιων υπαλλήλων ύστερα από τρία χρόνια;

Λύση

Με δεδομένο ότι κανείς υπάλληλος δεν αποχωρεί και κανείς νέος δεν προσλαμβάνεται, εφόσον όλες οι ηλικίες θα έχουν αυξηθεί κατά 3 χρόνια, η μέση τιμή θα έχει αυξηθεί κι αυτή κατά 3 χρόνια και θα είναι 35 χρόνια.

Άσκηση 8

Οι βαθμοί στα Μαθηματικά 20 μαθητών της Β΄ τάξης ενός Λυκείου είναι:

12	14	15	13	17	15	16	14	18	15	17	13	19	15	16	12	16	18	13	14

1) Να βρείτε τη μέση τιμή και την επικρατούσα τιμή.
2) Να βρείτε τη διάμεσο.
3) Να βρείτε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.
4) Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα.

Λύση

Για διευκόλυνση διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19.

1) Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \dfrac{12+12+13+\ldots=19}{20} = \dfrac{302}{20} = 15,1$

Η επικρατούσα τιμή είναι $\mathrm{M}_0 = 15$

2) Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 10ης και 11ης παρατήρησης, δηλαδή:

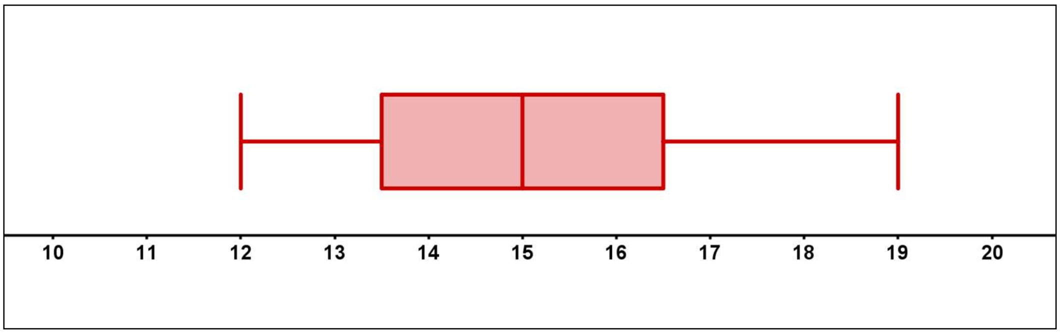
$$\delta = \frac{15+15}{2} = 15$$

3) Το πρώτο τεταρτημόριο είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, ενώ το τρίτο τεταρτημόριο είναι ο μέσος όρος της 15ης και 16ης παρατήρησης. Δηλαδή έχουμε:

$Q_1 = \dfrac{13+14}{2} = 13,5$ και $Q_3 = \dfrac{16+17}{2} = 16,5$

4) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 16,5 - 13,5 = 3$.

Το διάστημα $[Q_1 - 1,5 \cdot Q \;,\quad Q_3 + 1,5 \cdot Q]$ είναι το $[9,21]$ στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι τιμές (άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές). Το θηκόγραμμα φαίνεται παρακάτω:



Στο θηκόγραμμα βλέπουμε την ελάχιστη τιμή (12), τη μέγιστη τιμή (19), τη διάμεσο (15) και το πρώτο και τρίτο τεταρτημόρια (13,5 και 16,5 αντιστοίχως).

Πρόσθετο υλικό

Σύνθετες ασκήσεις

Άσκηση 1

Η μέση επίδοση 17 αγοριών και 13 κοριτσιών στο μάθημα των Μαθηματικών μιας τάξης είναι 16,8. Η μέση επίδοση των κοριτσιών είναι 15,6. Να βρείτε τη μέση επίδοση των αγοριών

Λύση

Αν ονομάσουμε $\bar{x}_a$ τη μέση επίδοση των αγοριών και $\bar{x}_\kappa$ τη μέση επίδοση των κοριτσιών, τότε το άθροισμα των βαθμολογιών των αγοριών είναι $17 \cdot \bar{x}_a$ και το άθροισμα των βαθμολογών των κοριτσιών είναι $13 \cdot \bar{x}_\kappa = 13 \cdot 15,6$ (αυτό συμβαίνει επειδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε αγόρι έχει επίδοση ίση με τη μέση επίδοση των αγοριών και ότι κάθε κορίτσι έχει επίδοση ίση με τη μέση επίδοση των κοριτσιών).

Τότε θα ισχύει $\dfrac{17 \cdot \overline{x}_a + 13 \cdot 15{,}6}{30} = 16{,}8$.

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε τη μέση επίδοση των αγοριών $\overline{x}_a \simeq 17{,}7$.

Άσκηση 2

Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 500 μαθητές. Η Α΄ τάξη έχει 200 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 15,7 χρόνια, ενώ η Β΄ τάξη έχει 180 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 16,9 χρόνια. Οι υπόλοιποι μαθητές της Γ΄ τάξης έχουν μέσο όρο ηλικίας 17,7 χρόνια. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο ηλικίας όλων των μαθητών του σχολείου.

<u>Λύση</u>

Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης είναι $500 - \left(200 + 180\right) = 120$.

Το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Α΄ τάξης θα είναι $200 \cdot 15{,}7$ το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Β΄ τάξης θα είναι $180 \cdot 16{,}9$ και το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Γ΄ τάξης θα είναι $120 \cdot 17{,}7$. Οπότε, η μέση ηλικία των μαθητών του σχολείου θα είναι:

$$\frac{200 \cdot 15{,}7 + 180 \cdot 16{,}9 + 120 \cdot 17{,}7}{500} \simeq 16{,}6$$

Άσκηση 3

Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειώνονται κατά 2 και οι 9 αυξάνονται κατά 6, να βρεθεί η νέα μέση τιμή

<u>Λύση</u>

Το άθροισμα των τιμών όλων των παρατηρήσεων θα είναι $40 \cdot 20 = 800$ και μετά τις μεταβολές θα είναι $800 - 7 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 840$. Οπότε, η νέα μέση τιμή θα είναι $\dfrac{840}{40} = 21$.

Άσκηση 4

Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με ν παρατηρήσεις είναι ίση με μηδέν. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις;

<u>Λύση</u>

Η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (s^2), η οποία ορίζεται ως "η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών της μέσης τιμής των παρατηρήσεων από τις παρατηρήσεις". Για να είναι η τυπική απόκλιση ίση με 0, και η διακύμανση θα είναι ίση με 0, άρα κάθε παρατήρηση θα διαφέρει από τη μέση τιμή κατά 0 (ας θυμηθούμε ότι αν το άθροισμα μη αρνητικών πραγματικών είναι μηδέν τότε όλοι οι προσθετέοι είναι μηδέν). Δηλαδή, όλες οι παρατηρήσεις θα είναι μεταξύ τους ίσες.

Άσκηση 5

Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 7,5. Να υπολογίσετε την τυπική τους απόκλιση.

Λύση

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι 6 διαδοχικοί ακέραιοι που έχουν μέση τιμή 7,5 είναι οι:

5, 6, 7, 8, 9, 10.

Η τυπική τους απόκλιση θα είναι:

$$s = \sqrt{\frac{(5-7,5)^2 + (6-7,5)^2 + (7-7,5)^2 + (8-7,5)^2 + (9-7,5)^2 + (10-7,5)^2}{6}} \simeq 1,7$$

Σχόλιο: Ένας τρόπος να βρούμε τους 6 διαδοχικούς ακεραίους με μέση τιμή 7,5, είναι να ονομάσουμε με ν τον μικρότερο, οπότε οι επόμενοι είναι ν+1, ν+2, ν+3, ν+4, ν+5 και να λύσουμε την εξίσωση: $\frac{\nu + (\nu+1) + (\nu+2) + (\nu+3) + (\nu+4) + (\nu+5)}{6} = 7,5$

Ένας άλλος (προφανώς πιο εύκολος) είναι να "μοιράσουμε" έξι διαδοχικούς αριθμούς έτσι ώστε το 7,5 να βρίσκεται στη μέση τους, άρα θα είναι τρεις κάτω από το 7,5 και τρεις πάνω από αυτό.

Άσκηση 6

Αν σε μία τάξη ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_1 αγοριών είναι $\overline{x}$ και ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_2 κοριτσιών είναι $\overline{y}$, να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας όλων των παιδιών της τάξης είναι $\overline{z} = \frac{\nu_1\overline{x} + \nu_2\overline{y}}{\nu_1 + \nu_2}$.

Λύση

Για τις ανάγκες του συγκεκριμένου προβλήματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε αγόρι έχει βαθμολογία $\overline{x}$ και κάθε κορίτσι έχει $\overline{y}$. Άρα το άθροισμα των βαθμών των αγοριών είναι $\nu_1\overline{x}$, το άθροισμα των βαθμών των κοριτσιών είναι $\nu_2\overline{y}$ και το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών/τριών είναι $\nu_1\overline{x} + \nu_2\overline{y}$. Αφού όλοι οι μαθητές είναι $\nu_1 + \nu_2$, ο μέσος όρος της βαθμολογίας θα είναι: $\overline{z} = \frac{\nu_1\overline{x} + \nu_2\overline{y}}{\nu_1 + \nu_2}$.

Άσκηση 7

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Λύση

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι x_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, και το σύνολο των παρατηρήσεων είναι ν, τότε: $\overline{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu}$.

Οπότε, $\overline{x} = \frac{\nu_1 x_1}{\nu} + \frac{\nu_2 x_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa x_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1}{\nu} x_1 + \frac{\nu_2}{\nu} x_2 + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} x_\kappa$

Άρα $\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_\kappa x_\kappa$

Δηλαδή, η μέση τιμή είναι ίση με το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Άσκηση 8

Σε ένα εργοστάσιο με 100 εργαζόμενους η μέση τιμή των αμοιβών τους είναι 900€. Οι 40 από αυτούς πληρώνονται με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής και οι μισθοί τους έχουν μέση τιμή 800€. Αν οι αποδοχές των εργαζομένων με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής αυξηθούν και γίνουν όσο η μέση τιμή, τότε ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των αμοιβών των 100 εργαζομένων;

<u>Λύση</u>

Το άθροισμα των αμοιβών των 100 εργαζομένων πριν οποιαδήποτε αύξηση είναι $100 \cdot 900 = 90.000$ €. Αφού οι αποδοχές των 40 χαμηλότερα αμειβόμενων εργαζομένων θα γίνουν όσο η μέση τιμή, δηλαδή 900€, αυτοί οι εργαζόμενοι θα έχουν μια μέση αύξηση κατά 100€, άρα αθροιστικά αύξηση $40 \cdot 100 = 4.000$ €. Οπότε, το άθροισμα των αμοιβών των 100 εργαζομένων διαμορφώνεται στις 94.000 €. Έτσι, η νέα μέση τιμή θα είναι $\frac{94.000}{100} = 940$ €