

Σενάριο: Μέτρηση κύκλου

Μήκος κύκλου-Μήκος τόξου

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου-Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Γνωστική περιοχή: Γεωμετρία

Θέμα: Το προτεινόμενο θέμα διαπραγματεύεται το μήκος κύκλου, το μήκος τόξου, το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και το εμβαδόν κυκλικού τομέα

Τεχνολογικά εργαλεία: Το σενάριο προτείνεται να διδαχθεί με τη βοήθεια του σχολικού βιβλίου και τη χρήση του λογισμικού geogebra.

Σκεπτικό

Βασική ιδέα: Οι μαθητές με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας επεξεργαστούν και θα διερευνήσουν έννοιες όπως το μήκος κύκλου, το μήκος τόξου, το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και το εμβαδόν κυκλικού τομέα.

Προστιθέμενη αξία:

Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο φιλοδοξεί στην αλλαγή αλλά και στη βελτίωση της στάσης του μαθητή απέναντι στα μαθηματικά και στην διδασκαλία τους.

Οι μαθητές θα αποκτήσουν δυναμικό ρόλο, αφού θα διερευνήσουν, θα συνεργαστούν, θα εξάγουν τα δικά τους συμπεράσματα, τα οποία όμως τεκμηριώνονται επιστημονικά. Η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων συμβάλλει σημαντικά προς την κατεύθυνση αυτή. Η εργασία των μαθητών σε ομάδες, η στενή και συγκροτημένη συνεργασία μεταξύ των μελών της ομάδας προφανώς συμβάλλει στην αλλαγή στάσης του μαθητή απέναντι στα μαθηματικά και γενικότερα στη μάθηση.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού, που θα εντάξει σύγχρονες διδακτικές και παιδαγωγικές μεθόδους στο μάθημα του, αλλάζει, αφού ο καθηγητής που εφαρμόζει παραδοσιακές μεθόδους μετωπικής διδασκαλίας καλείται να γίνει συνεργάτης των μαθητών και να τους οδηγήσει με τις παρεμβάσεις του στην επιστημονική εγκυρότητα των συμπερασμάτων τους. Ο εκπαιδευτικός θα διδάξει σημαντικές μαθηματικές έννοιες στο πλαίσιο του σεναρίου, το οποίο προβλέπει ατμόσφαιρα ερευνητικού εργαστηρίου.

Πλαίσιο εφαρμογής

Σε ποιους απευθύνεται: Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές της Β Λυκείου (τμήμα γενικής παιδείας)

Χρόνος υλοποίησης: Για την υλοποίηση του σεναρίου προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες. Κάποιες από τις εφαρμογές του σεναρίου, που δεν θα ολοκληρωθούν μπορούν να δοθούν στους μαθητές ως εργασία στον ελεύθερό τους χρόνο.

Χώρος υλοποίησης: Το σενάριο προτείνεται να εφαρμοστεί στο εργαστήριο υπολογιστών

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Για την υλοποίηση του σεναρίου οι μαθητές πρέπει να μπορούν

- να γνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά των κανονικών πολυγώνων (κεντρική γωνία, πλευρά, απόστημα, εμβαδόν, περίμετρος κ.α.)
- να γνωρίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά του κύκλου (ακτίνα, τόξο, επίκεντρη γωνία, εγγεγραμμένη γωνία κ.α.)

Απαιτούμενα βοηθητικά εργαλεία: Στους μαθητές θα δοθούν κατάλληλα φύλλα εργασίας που θα εκπονήσει ο εκπαιδευτικός και αναλυτικές γραπτές ή προφορικές οδηγίες για την υλοποίηση του σεναρίου.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές θα εργαστούν σε μικρές ομάδες καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας, ώστε να επεξεργαστούν τον κύκλο και να υπολογίζουν το μήκος κύκλου, το μήκος τόξου, το εμβαδό κυκλικού δίσκου, το εμβαδό κυκλικού τομέα και του κυκλικού τμήματος. Για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός οι μαθητές θα συνεργαστούν και θα συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας με ερωτήσεις σχετικά με το θέμα διερεύνησης. Το φύλλο εργασίας θα πρέπει να αφήνει ελευθερία στους μαθητές, ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και μέσω ομαδοσυνεργατικών διαδικασιών να μπορούν να απαντήσουν σε αυτά.

Ο εκπαιδευτικός καθ' όλη τη διάρκεια του μαθήματος θα πρέπει να καθοδηγεί τους μαθητές, να συνεργάζεται μαζί τους, να απαντά σε ερωτήματα τους, να τους ενθαρρύνει για περαιτέρω διερεύνηση, ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα συμπεράσματα τους.

Η επικοινωνία όλων των μαθητών της τάξης με τις εργασίες των συμμαθητών τους και η συλλογική διερεύνηση κρίσιμων παραμέτρων της διερεύνησης μπορεί επίσης να

ενισχυθεί με κατάλληλη χρήση του διαδραστικού πίνακα σε διαφορετικές πτυχές της εφαρμογής του σεναρίου.

Στόχοι:

Από την εφαρμογή του συγκεκριμένου σεναρίου οι μαθητές θα μάθουν να ανακαλύπτουν τη γνώση συνεργατικά. Με τη βοήθεια των προτεινόμενων εργαλείων θα μπορέσουν μέχρι το τέλος και των δύο διδακτικών ωρών να υπολογίζουν μήκη και εμβαδά που αφορούν τον κύκλο. Έτσι, οι μαθητές θα μπορούν να κάνουν εικασίες και υποθέσεις και να καταλήγουν σε αξιόπιστα και επιστημονικά συμπεράσματα.

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές στο τέλος της διδασκαλίας θα μπορούν

- να υπολογίζουν το μήκος κύκλου και το μήκος τόξου
- να μετατρέπουν τις μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα
- να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού δίσκου
- να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος.

Ανάλυση του σεναρίου

Οι μαθητές θα εργαστούν σε μικρές ομάδες χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικούς υπολογιστές ή tablets. Οι μαθητές θα διερευνήσουν, θα πειραματιστούν και θα μπορούν να κάνουν μετρήσεις στον κύκλο.

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων:

1^η διδακτική ώρα:

Δραστηριότητα 1: Στη δραστηριότητα αυτή ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «μήκος κύκλου». Δίνονται στους μαθητές δύο κανονικά πολύγωνα με μεταβλητό αριθμό πλευρών. Στο πρώτο κανονικό πολύγωνο εγγράφεται κύκλος, ενώ στο δεύτερο περιγράφεται ένας κύκλος. Ζητείται από τους μαθητές να μετακινήσουν τον δρομέα, να παρατηρήσουν τη μεταβολή της περιμέτρου των δύο πολυγώνων και να προσπαθήσουν να τη συγκρίνουν με την περίμετρο του κύκλου. Ζητάμε να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους.



Εικόνα 1

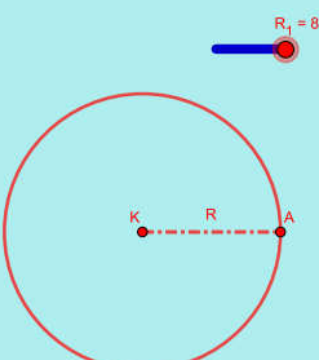
Διαπραγματευόμαστε με τους μαθητές τη συμπεριφορά της περιμέτρου των κανονικών πολυγώνων σε μεγάλες τιμές, δηλαδή για $n \rightarrow \infty$ και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οριακά για $n \rightarrow \infty$ η περίμετρος του κανονικού πολυγώνου και στις δύο περιπτώσεις ισούται με το μήκος του κύκλου.

Δραστηριότητα 2: Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «μέτρηση κύκλου». Για τις διάφορες τιμές της ακτίνας R ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα. Οι μαθητές εύκολα θα παρατηρήσουν ότι ο λόγος $\frac{L}{2R}$ παραμένει κάθε φορά σταθερός και ίσος με π . Διαπραγματευόμαστε με τους μαθητές την ισότητα $\frac{L}{2R} = \pi$ από την οποία προκύπτει ο τύπος $L = 2\pi R$, ο τύπος δηλαδή που υπολογίζει το μήκος του κύκλου.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Μετακινήστε τον δρομέα για να αλλάξετε την ακτίνα του κύκλου. Διαπιστώστε ότι το μήκος του κύκλου είναι ανάλογο της ακτίνας, ενώ το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι ανάλογο με το τετράγωνο της ακτίνας.


Μήκος κύκλου
 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου



Ακτίνα: $R=8$

Μήκος κύκλου: $L=16\pi$

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου $E=64\pi$



Εικόνα 2

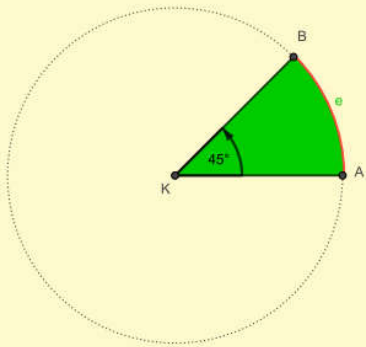
Δραστηριότητα 3: Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές θα μετατρέψουν τις μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα. Έχουμε ήδη διαπραγματευτεί με τους μαθητές τη σχέση που συνδέει τις μοίρες και τα ακτίνια, όποτε ζητάμε από τους μαθητές να συμπληρώσουν τον πίνακα που δίνεται.

Δραστηριότητα 3: Στη δραστηριότητα αυτή ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «κυκλικός τομέας», να μετακινήσουν τον δρομέα και να παρατηρήσουν τις μεταβολές των στοιχείων που τους δίνονται. Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να συμπληρώσουν το πινακάκι (όλες τα στοιχεία υπολογίζονται αλγεβρικά) και να

επαληθεύσουν τα αποτελέσματα στους μετακινώντας τον δρομέα στην κατάλληλη θέση κάθε φορά.

ΤΟΞΟ και ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

$\omega = 45$



Σχέση μοιρών - ακτινίων $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$

Μήκος τόξου $L = \frac{\pi R \mu^\circ}{180^\circ}$ $L = \alpha R$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα $E = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}$ $E = \frac{1}{2} \alpha R^2$

Επίκεντρη γωνία : $\omega = 45^\circ$

ΤΟΞΟ **Μήκος τόξου μετρημένου σε μοίρες : $L = 0.79R$**

Μήκος τόξου μετρημένου σε ακτίνα : $L = 0.25\pi R$

ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

Εμβαδόν κυκλικού τομέα μετρημένου σε μοίρες : $E = 0.13R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα μετρημένου σε μοίρες : $E = 0.39R^2$

Εικόνα 3

2^η διδακτική ώρα:

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης διδακτικής θα διαπραγματευθούμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου καθώς επίσης και το εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος.

Δραστηριότητα 1: Ζητάμε από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «Εμβαδό κυκλικού δίσκου». Στη δραστηριότητα αυτή δίνεται κανονικό πολύγωνο μεταβλητών πλευρών εγγεγραμμένο σε κύκλο. Ζητείται από τους μαθητές να μετακινήσουν τον δρομέα n και να παρατηρήσουν τη μεταβολή του εμβαδού του κανονικού πολυγώνου. Αναμένεται να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου για μεγάλες τιμές του n οριακά ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου. Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να γράψουν τους τύπους με τους οποίους θα υπολογίσουν το εμβαδόν τον κανονικού πολυγώνου με n πλευρές καθώς επίσης και τον τύπο που θα υπολογίσουν το άθροισμα των εμβαδών των μηνίσκων που φαίνονται στο σχήμα.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

$n = 3$



Η ΙΔΕΑ:

Καθώς ο αριθμός n των πλευρών του κανονικού πολυγώνου τείνει στο ∞ , το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ : $E = n \cdot (OAB) = 46.77$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ : $E_{\text{κυκλου}} = \pi \cdot 6^2 = 113.1$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΜΒΑΔΩΝ ΜΗΝΙΣΚΩΝ : $E_{\text{μηνισκων}} = 66.33$

Εικόνα 4

Δραστηριότητα 3: Στη δραστηριότητα αυτή ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «μέτρηση κύκλου» και στη συνέχεια να συμπληρώσουν το πινακάκι που δίνεται. Αναμένεται οι μαθητές να παρατηρήσουν ότι ο λόγος $\frac{E}{\pi}$ κάθε φορά είναι ανάλογος του τετραγώνου της ακτίνας.

Δραστηριότητα 4: Στη δραστηριότητα αυτή ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο «εμβαδόν κυκλικού δίσκου». Ζητάμε από τους μαθητές να μετακινήσουν το δρομέα στη θέση $n=6$. Θεωρούμε επίσης ότι $R=6$ (όση είναι η ακτίνα με την οποία

κατασκευάστηκε το δόμημα). Οπότε οι μαθητές πρέπει να υπολογίσουν αλγεβρικά το εμβαδόν του κύκλου, το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου και το εμβαδόν του κόκκινου κυκλικού τμήματος. Μπορούν να επαληθεύσουν τα αποτελέσματα από το αρχείο που έχουν ήδη ανοιχτό στους υπολογιστές.

Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν

Το σενάριο αυτό προτείνεται να διδαχθεί με τη χρήση του λογισμικού geogebra. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν επίσης τα τετράδια τους για την ολοκλήρωση των ερωτημάτων που απαιτούν αλγεβρική επίλυση. Μέσω των ερωτημάτων και των οδηγιών οι μαθητές θα πειραματιστούν, θα διατυπώσουν εικασίες και υποθέσεις και θα γενικεύσουν τα συμπεράσματά τους.

Επέκταση

Μια ενδιαφέρουσα επέκταση των παραπάνω αποτελούν οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διαμέτρους $B\Gamma$, AB και $A\Gamma$ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Γενικότερα, μια επέκταση των παραπάνω αποτελεί ο υπολογισμός μηνίσκων.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου: Ο εκπαιδευτικός ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου και εξετάζει τους λόγους για τους οποίους δεν επιτεύχθηκαν κάποιοι από αυτούς και παρεμβαίνει δυναμικά ανάλογα με το σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία: Ο εκπαιδευτικός ελέγχει την ευκολία με την οποία οι μαθητές αξιοποίησαν τα εργαλεία του προτεινόμενου λογισμικού σε συνδυασμό με τη σαφήνεια των οδηγιών του και των περιγραφών των φύλλων εργασίας. Αφού αξιολογήσει τα δεδομένα του επεμβαίνει ανάλογα στο σενάριο για την επόμενη εφαρμογή.

Ως προς τη διαδικασία υλοποίησης: Ο εκπαιδευτικός αξιολογεί τη διαδικασία υλοποίησης του σεναρίου αξιολογώντας τα στοιχεία που δε δούλεψαν καλά και προσαρμόζει το σενάριο.

Ως προς την εφαρμογή και επεκτασιμότητα: Η δυνατότητα επέκτασης του σεναρίου και η ευκολία προσαρμογής σε μία σχολική τάξη το καθιστούν σημαντικό. Ιδιαίτερα, όταν πρέπει να εφαρμοστεί το σενάριο σε διαφορετικές τάξεις έχει τη δυνατότητα

μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου να επανεκτιμά τη δομή του σεναρίου και να σχεδιάζει νέες δυνατότητες και επεκτάσεις

Σχεδίαση φύλλου εργασίας

Στην ανάλυση του σεναρίου περιγράφονται οι επιμέρους δραστηριότητες με τις οποίες προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές καθώς και η χρονική σειρά με την οποία αυτό θα γίνει. Άρα, η σύνταξη του φύλλου εργασίας από τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει το σενάριο πρέπει να συμπεριλάβει τις δραστηριότητες αυτές με την ίδια ροή και τις κατάλληλες ερωτήσεις και προβλήματα προς τους μαθητές. Τα ερωτήματα θα πρέπει να είναι συμβατά με τη διαδικασία που είναι πιθανό να ακολουθήσουν οι μαθητές. Τα ερωτήματα θα μπορούσαν να έχουν την εξής σειρά:

- Ερωτήματα σχεδίασης και παρατήρησης, για εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές των αλλαγών στο σχήμα
- Ερωτήματα διατύπωσης, για εικασίες, υποθέσεις και γενικεύσεις.
- Ερωτήματα ελέγχου για ερμηνείες επεξηγήσεις αποδείξεις κτλ.