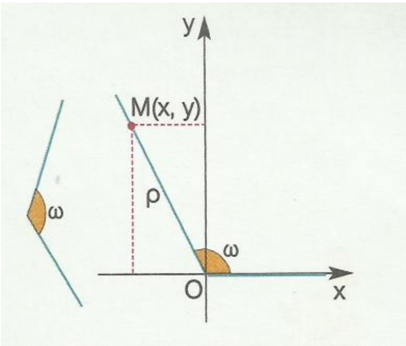
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ($0^o \leq \omega \leq 180^o$)

1. Πως ορίζονται οι **τριγωνομετρικοί αριθμοί** μιας γωνίας ω ($0^o \leq \omega \leq 180^o$);

Απ: Τοποθετούμε τη γωνία ω σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή Ο(0 , 0) και η μια πλευρά της να συμπέσει με τον θετικό ημιάξονα Οx. Τότε, η δεύτερη πλευρά θα βρεθεί στο 2^o τεταρτημόριο αν η γωνία είναι αμβλεία ($90^o \leq \omega \leq 180^o$), όπως φαίνεται στο σχήμα, ή στο 1^o τεταρτημόριο αν η γωνία είναι οξεία ($0^o \leq \omega \leq 90^o$).Τότε:



απόσταση του Μ από το Ο: ρ = ΟΜ = $\sqrt{x^2+y^2}$

ημω = $\dfrac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \dfrac{y}{\rho}$

συνω = $\dfrac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \dfrac{x}{\rho}$

εφω = $\dfrac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \dfrac{y}{x}$

Παρατηρήσεις:

i. Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε $x > 0$, $y > 0$ και $\rho > 0$. Επομένως:

ημω > 0 , συνω > 0 , εφω > 0

ii. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $x < 0$, $y > 0$ και $\rho > 0$. Επομένως:

ημω > 0 , συνω < 0 , εφω < 0

iii. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν τα εξής:

$-1 \leq$ ημω ≤ 1 και $-1 \leq$ συνω ≤ 1

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	0^o	**30^o**	**45^o**	**60^o**	**90^o**	**180^o**
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται	0

3. α) Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;

Απ: Για δύο παραπληρωματικές γωνίες **ω** και **180° – ω** ισχύουν τα εξής:

ημ(180° – ω) = ημω

συν(180° – ω) = – συνω

εφ(180° – ω) = – εφω

β) Παραδείγματα:

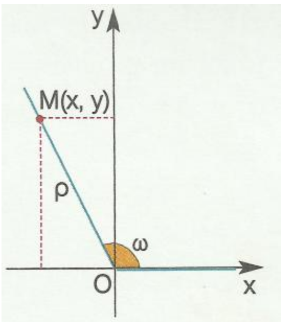
(i) ημ150° = ημ30° = 1/2 (ii) συν120° = – συν60° = – 1/2

(iii) εφ120° = – εφ60° = – $\sqrt{3}$ (iv) εφ135° = – εφ45° = – 1

4. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν τα εξής:

(i) $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ (ii) $εφω = \frac{ημω}{συνω}$, συνω ≠ 0

Απ: Ισχύουν τα εξής: $ρ^2 = x^2 + y^2$, όπου $ρ = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ και



$ημω = \frac{y}{ρ}$, $συνω = \frac{x}{ρ}$, $εφω = \frac{y}{x}$

(i) $ημ^2ω + συν^2ω = \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 = \frac{y^2}{ρ^2} + \frac{x^2}{ρ^2} = \frac{x^2 + y^2}{ρ^2} = \frac{ρ^2}{ρ^2} = 1$

(ii) $\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{p}} = \frac{y \cdot ρ}{x \cdot ρ} = \frac{y}{x} = εφω$

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

i. Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq ημω \leq 1$. ( )

ii. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία τότε $συνω > 0$. ( )

iii. Η εφαπτομένη μιας αμβλείας γωνίας είναι θετικός αριθμός. ( )

iv. Υπάρχει γωνία ω με $ημω = 3$. ( )

v. Υπάρχει γωνία ω με $ημω = 0$ και $συνω = 0$. ( )

vi. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετα συνημίτονα. ( )

vii. Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημω + συνω = 1$. ( )

(Απ: i: Σ, ii: Λ, iii: Λ, iv: Λ, v: Λ, vi: Σ, vii: Λ)