ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ - ΘΕΩΡΙΑ

Ταυτότητα λέγεται κάθε <u>ισότητα</u> που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για κάθε τιμή των μεταβλητών της (π.χ: $0.x = 0$).

<u>Ερ:</u> Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;

i) $x + y = 0$ ii) $α^3 = α.α.α$ iii) $α.β = 0$ iv) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ v) $0.x = 0$ **(Απ.: ii, iv, v)**

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

i) <u>Τετράγωνο αθροίσματος:</u> $\mathbf{(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2}$

<u>Απόδειξη:</u> $(α + β)^2 = (α + β).(α + β)$

$= α.α + α.β + β.α + β.β = α^2 + α.β + α.β + β^2 = α^2 + 2αβ + β^2$

ii) <u>Τετράγωνο διαφοράς:</u> $\mathbf{(α - β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2}$

<u>Απόδειξη:</u> $(α - β)^2 = (α - β).(α - β)$

$= α.α - α.β - β.α + β.β = α^2 - α.β - α.β + β^2 = α^2 -2αβ + β^2$

iii) <u>Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά</u>: $\mathbf{(α + β).(α – β) = α^2 - β^2}$

<u>Απόδειξη:</u> $(α + β).(α – β) = α.α – α.β + β.α – β.β$

$= α^2 – \cancel{α.β} + \cancel{α.β} – β^2 = α^2 - β^2$

iv) <u>Κύβος αθροίσματος:</u> $\mathbf{(α + β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3}$

<u>Απόδειξη:</u> $(α + β)^3 = (α + β). (α + β)^2 = (α + β). (α^2 + 2αβ + β^2)$

$= α.α^2 + α.2αβ + α.β^2 + β.α^2 + β.2αβ + β.β^2$

$= α^3 + 2α^2β + αβ^2 + α^2β + 2αβ^2 + β^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3$

v) <u>Κύβος διαφοράς:</u> $\mathbf{(α - β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3}$

<u>Απόδειξη:</u> $(α - β)^3 = (α - β). (α - β)^2 = (α - β). (α^2 - 2αβ + β^2)$

$= α.α^2 - α.2αβ + α.β^2 - β.α^2 + β.2αβ - β.β^2$

$= α^3 - 2α^2β + αβ^2 - α^2β + 2αβ^2 - β^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$

<u>Παρατήρηση:</u> $\mathbf{(α + β)^2 \neq α^2 + β^2}$ και $\mathbf{(α - β)^2 \neq α^2 - β^2}$

$\mathbf{(α + β)^3 \neq α^3 + β^3}$ και $\mathbf{(α - β)^3 \neq α^3 - β^3}$