

Η ηλεκτρονική εκδοχή των διαλέξεων θα πρέπει να θεωρηθεί ΜΟΝΟ ως ένα βοήθημα για το μάθημα. Τα θέματα και προβλήματα που παρουσιάζονται σε αυτά τα αρχεία δεν καλύπτουν απαραίτητα όλη την «ύλη» του μαθήματος, καθώς οι πραγματικές διαλέξεις και τα αντίστοιχα εδάφια στα προτεινόμενα συγγράμματα περιέχουν περισσότερη πληροφορία.

Οι διαλέξεις ακολουθούν σε σημαντικό βαθμό, αλλά όχι απόλυτα, την ανάπτυξη της ύλης στο βιβλίο «Μηχανική», τόμος Α της σειράς Πανεπιστημιακής Φυσικής του Berkeley.

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ Ι – 1ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΗΜΜΥ

1ο ΤΜΗΜΑ: Επώνυμα Σπουδαστών Α-ΚΑ, ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ 3
(Διδάσκουσα: Καθ. Ρ. Ζάννη-Βλαστού)

2ο ΤΜΗΜΑ: Επώνυμα Σπουδαστών ΚΕ-ΠΑ, ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ 4
(Διδάσκοντας: Επ. Καθ. Λ. Τσέτσερης)

3ο ΤΜΗΜΑ: Επώνυμα Σπουδαστών ΠΕ-Ω, ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ 5
(Διδάσκοντας: Αν. Καθ. Κ. Φαράκος)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το μάθημα αποτελεί μία εισαγωγή και συνοπτική παρουσίαση των θεμελιωδών εννοιών της Κλασικής Μηχανικής, με βάση τις εξισώσεις του Νεύτωνα και τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, καθώς και μία εισαγωγή στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και τους μετασχηματισμούς Lorentz.

ΩΡΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Τρίτη 12:45-14:30

Τετάρτη 8:45-10:30

Παρασκευή 10:45-12:30

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Ρόζα Ζάννη-Βλαστού, Καθηγήτρια (Διδάσκουσα στο 1^ο Τμήμα με επώνυμα: Α-ΚΑ). e-mail: vlastou@central.ntua.gr
Γραφείο: 224, Κτίριο Φυσικής. Τηλέφωνο: 210-772-3008.

**Λεωνίδας Τσέτσερης, Επ. Καθηγητής (Διδάσκοντας στο 2^ο Τμήμα με επώνυμα: ΚΕ-ΠΑ). e-mail: leont@mail.ntua.gr
Γραφείο: 311, Κτίριο Φυσικής. Τηλέφωνο: 210-772-3046.
Ώρες Γραφείου: Τρίτη 14:30-16:30, Τετάρτη 10:45-12:45**

Κωνσταντίνος Φαράκος, Αν. Καθηγητής (Διδάσκοντας στο 3^ο Τμήμα με επώνυμα: ΠΕ-Ω). e-mail: kfarakos@central.ntua.gr
Γραφείο: 314, Κτίριο Φυσικής. Τηλέφωνο: 210-772-3022.

ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ

- 1) Εισαγωγή.
- 2) Σύνοψη Μαθηματικών Σχέσεων - Διανύσματα.
- 3) Νόμοι του Νεύτωνα.
- 4) Συστήματα αναφοράς: Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου.
- 5) Η ταχύτητα του φωτός.
- 6) Ειδική θεωρία της σχετικότητας: Μετασχηματισμοί Lorentz.
- 7) Διατήρηση της ενέργειας.
- 8) Διατήρηση της ορμής και της στροφορμής.
- 9) Ο αρμονικός ταλαντωτής.
- 10) Στοιχειώδης δυναμική των στερεών σωμάτων.
- 11) Δυνάμεις αντίστροφου τετραγώνου.
- 12) Σχετικιστική δυναμική: Ορμή και ενέργεια.

ΣΥΓΓΡΑΜΑΤΑ - ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

"Μηχανική" των C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz, B. J. Moyer. Μετάφραση του πρώτου τόμου της σειράς "Πανεπιστημιακή Φυσική" του Πανεπιστημίου Berkeley των ΗΠΑ (διανέμεται από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις του ΕΜΠ).

«Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, Τόμος Ι" των Alonso/Finn (μετάφραση από ΡΕΣΒΑΝΗ-ΦΙΛΙΠΠΑ).

«Πανεπιστημιακή Φυσική», Τόμος Ι" του H. D. Young, (Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ).

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Υπάρχουν πολλά διαφορετικά φυσικά μεγέθη. Οι εξισώσεις της Φυσικής όμως σχετίζουν κάποια από τα μεγέθη. Π.χ. βάσει του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα ($F = m d^2r/d^2t$) βλέπουμε ότι, αν θεωρήσουμε την μάζα, τον χρόνο, και την απόσταση ως **θεμελιώδη μεγέθη**, τότε η δύναμη (και οι μονάδες μέτρησης της δύναμης) μπορούν να οριστούν μέσω των τριών αυτών φυσικών ποσοτήτων.

Μονάδα χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (second, sec, s). Ορίστηκε αρχικά με βάση την περίοδο ιδιοπεριστροφής της Γης (1 sec = 1/86400 της μέσης ηλιακής ημέρας), αλλά πιο πρόσφατα ορίστηκε με βάση τις ταλαντώσεις μαγνήτισης ατόμων κεσίου (1 sec είναι ο χρόνος που απαιτείται για 9.192.631.700 ταλαντώσεις)

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Μονάδα μήκους είναι το μέτρο (meter, m). Ορίστηκε αρχικά ως η απόσταση δύο λεπτών γραμμών πάνω σε μια ράβδο χρυσού (στους $0\text{ }^{\circ}\text{C}$),

αλλά πιο πρόσφατα ορίστηκε με βάση το μήκος κύματος συγκεκριμένης ακτινοβολίας του ισότοπου Kr^{86} του στοιχείου Κρυπτό (1 αντιστοιχεί σε $1.650.763,73$ μήκη κύματος).

ΤΑΞΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ: ΧΡΟΝΟΣ (sec)

Ηλικία της Γης	$1,3 \times 10^{17}$
Ηλικία της πυραμίδας του Χέωπα	$1,5 \times 10^{11}$
Διάρκεια της ανθρώπινης ζωής	2×10^9
Χρόνος περιστροφής της Γης γύρω από τον Ήλιο (έτος)	$3,1 \times 10^7$
Χρόνος ιδιοπεριστροφής της Γης (ημέρα)	$8,6 \times 10^4$
Χρόνων κανονικών χτύπων καρδιάς	$8,0 \times 10^{-1}$
Ημιζωή του μιονίου	$2,2 \times 10^{-6}$
Τυπική περίοδος περιστροφής μορίου	1×10^{-12}
Περίοδος ταλαντώσεως μιας ακτίνας γ 1 MeV	4×10^{-21}
Χρόνος για να περάσει ένα σωματίδιο μέσα από έναν τυπικό πυρήνα	2×10^{-23}

ΤΑΞΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ: ΜΗΚΟΣ (m)

Απόσταση κβάζαρ	6×10^{25}
Απόσταση του Γαλαξία της Ανδρομέδας	2×10^{22}
Ακτίνα του Γαλαξία μας	6×10^{19}
Απόσταση του πιο κοντινού αστεριού (άλφα Κενταύρου)	$4,3 \times 10^{16}$
Ακτίνα του Ήλιου	$6,9 \times 10^8$
Ακτίνα της Γης	$6,4 \times 10^6$
Ύψος ανθρώπου	$1,8 \times 10^0$
Ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου	$5,0 \times 10^{-11}$
Ενεργός ακτίνα πρωτονίου	$1,2 \times 10^{-15}$

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Η Φυσική «διαίρεείται» σε κλάδους που περιγράφουν διαφορετικά φυσικά φαινόμενα και βασίζονται σε διαφορετικές μαθηματικές σχέσεις και εξισώσεις.

Η Κλασική Μηχανική περιγράφει την φυσική σε αυτό που αποκαλούμε «μακρόκοσμο». Ο μακρόκοσμος περιλαμβάνει τις διαστάσεις που είναι οικείες στον άνθρωπο (~ μέτρα), μικρότερες διαστάσεις μέχρι και 10^{-6} - 10^{-8} m, καθώς και μεγαλύτερες διαστάσεις (έως και αστρονομικής κλίμακας).

Η αναθεώρηση/απόρριψη των τελεολογικών και ανιμιστικών υποθέσεων περί της κίνησης σωμάτων και άλλων φυσικών φαινομένων ξεκίνησε με την παραδοχή του Γαλιλαίου του χρόνου ως μία παράμετρο της κίνησης. Η πραγματική επανάσταση, που σηματοδότησε την απαρχή της Φυσικής Επιστήμης όπως την εννοούμε σήμερα, έγινε με την διατύπωση από τον Νεύτωνα των σχετικών νόμων.

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Η Κλασική Μηχανική πραγματεύεται τις αλληλεπιδράσεις που σχετίζονται με **βαρυτικά πεδία**, την περιγραφή και καταγραφή των δυνάμεων που ασκούνται σε σώματα (**δυναμική**), καθώς και την μαθηματική περιγραφή της κίνησης των σωμάτων (**κινηματική**).

Η Κλασική Ηλεκτροδυναμική έχει ως αντικείμενο την περιγραφή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ **φορτίων** (είτε σε ηρεμία, είτε σε κίνηση). Οι αλληλεπιδράσεις σχετίζονται με τις λεγόμενες **ηλεκτροστατικές και μαγνητικές δυνάμεις**.

Η Κλασική Ηλεκτροδυναμική πήρε την μορφή με την οποία την γνωρίζουμε σήμερα με την διατύπωση των νόμων της μέσω των (διαφορικών) **εξισώσεων του Maxwell**.

ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Σε πολύ μικρή κλίμακα (nm ή μικρότερες διαστάσεις) η κλασική μηχανική και η κλασική ηλεκτροδυναμική αδυνατούν να εξηγήσουν και να περιγράψουν με ακρίβεια τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα.

Είναι αδύνατο να εξηγήσουμε με βάση τους νόμους της κλασικής φυσικής γιατί τα άτομα (ως συστήματα ηλεκτρονίων και πυρήνων με τα πρώτα να περιφέρονται γύρω από τους πυρήνες) είναι σταθερά!

ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα επήλθε μια ριζική αναθεώρηση των αντιλήψεών μας σχετικά με τον χαρακτήρα της κινήσεως σωμάτων σε μικρή κλίμακα, εισάγοντας μια **πιθανοκρατική περιγραφή**.

Η νέα θεωρία ονομάστηκε **Κβαντική Θεωρία** (ή *Κβαντομηχανική*) καθώς κατέδειξε ότι διάφορα φυσικά μεγέθη είναι δυνατόν να λαμβάνουν μόνο **διακριτές τιμές** (για παράδειγμα, υπάρχουν διακριτές τιμές ενέργειας που ονομάζονται κβάντα).

Το «πάντρεμα» της Κβαντομηχανικής με την Κλασσική Ηλεκτροδυναμική έχει οδηγήσει στην **Κβαντική Ηλεκτροδυναμική** και την **Κβαντική Θεωρία Πεδίου**.

ΕΙΔΙΚΗ – ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Οι νόμοι της Φυσικής **αποκλίνουν** από τους νόμους της Κλασσικής Μηχανικής για σώματα που κινούνται με **πολύ υψηλές ταχύτητες**. Η θεωρία που περιγράφει αυτά τα φαινόμενα είναι η **Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας**.

Σε περιοχές του χώρου όπου υπάρχουν **ισχυρά βαρυτικά πεδία**, οι νόμοι του Νεύτωνα πρέπει να αντικατασταθούν από τις **εξισώσεις του Einstein** της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

ΕΥΚΛΕΙΔΙΟΣ ΧΩΡΟΣ

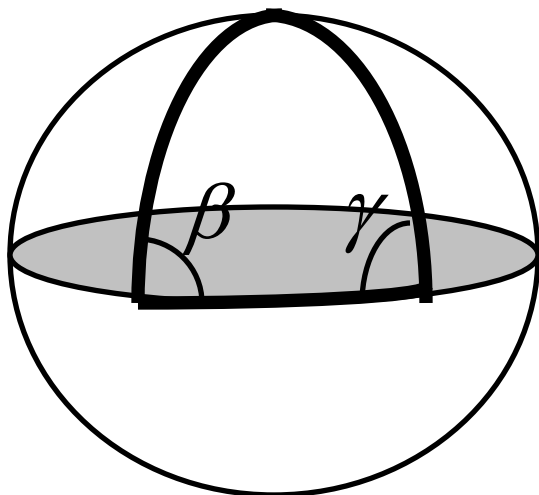
Υποθέτουμε ότι στον φυσικό χώρο ισχύει η Ευκλείδειος Γεωμετρία.

Από ένα σημείο του χώρου άγεται μόνο μία ευθεία που να είναι παράλληλη προς άλλη ευθεία.

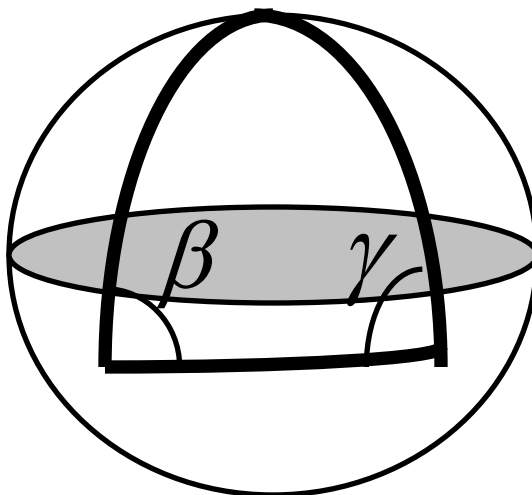
Ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

ΚΑΜΠΥΛΟΣ ΧΩΡΟΣ

Σε καμπύλο χώρο (π.χ. επιφάνεια σφαίρας) δεν ισχύουν τα παραπάνω



$$\beta = \gamma = 90^\circ$$



$$\beta + \gamma > 180^\circ$$

Δεν υπάρχουν ενδείξεις
ότι ο χώρος δεν είναι
Ευκλείδειος («επίπεδος»)

τουλάχιστον στον
Μακρόκοσμο.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ – ΣΥΝΟΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

Βαθμωτά Μεγέθη: Είναι μεγέθη που περιγράφονται πλήρως από μια τιμή.

Για παράδειγμα, η μάζα, η πίεση, η θερμοκρασία, κ.ά.

Διανυσματικά ή Ανυσματικά Μεγέθη: Για να περιγραφούν πλήρως πρέπει να δώσουμε πλέον της μιας τιμής.

Για παράδειγμα, σε έναν διδιάστατο χώρο χρειάζονται 2 τιμές, σε έναν τριδιάστατο χώρο 3 τιμές, κ.ο.κ. Τέτοια μεγέθη είναι το διάνυσμα θέσης, η ταχύτητα, η δύναμη, κ.ά.

Τανυστικά Μεγέθη: Είναι μεγέθη που για να περιγραφούν χρειάζεται ένας πίνακας τιμών. Η διάσταση του πίνακα μας δίνει και την διάσταση ή τάξη του τανυστή.

Ελαστικές σταθερές, η αγωγιμότητα, κ.ά. $J_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j$

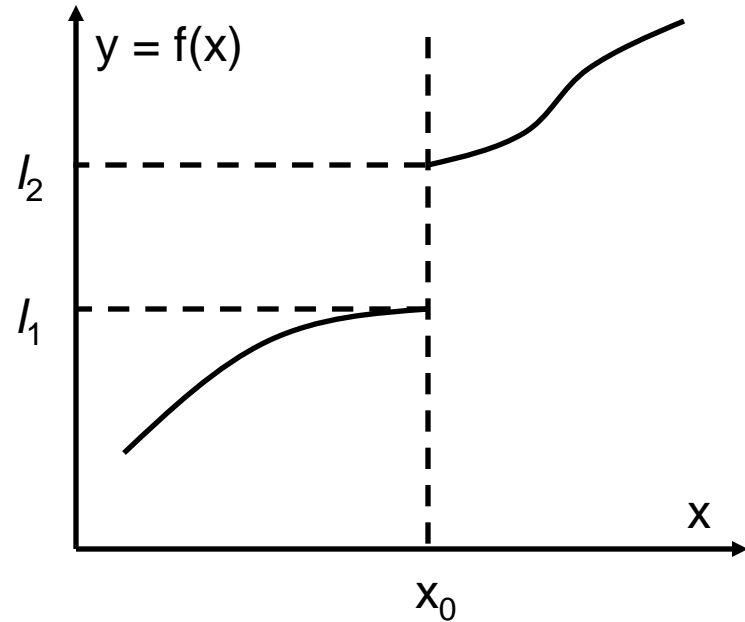
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Βαθμωτά Μεγέθη: Εάν αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων τότε η τιμή του μεγέθους σε συγκεκριμένο σημείο παραμένει η ίδια. $f' = f$

Διανυσματικά Μεγέθη: Αλλαγή συντεταγμένων απαιτεί πολλαπλασιασμό με πίνακα: $A'_i = \sum_j R_{ij} A_j$

Τανυστικά Μεγέθη: Αλλαγή συντεταγμένων απαιτεί πολλαπλασιασμούς με πίνακες: $\sigma'_{ij} = \sum_{k,l} R_{ik} R_{jl} \sigma_{kl}$

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ



Ορισμός Συνάρτησης: Μια συνάρτηση ορίζει μια αντιστοιχία 1 προς 1 από σύνολο τιμών σε ένα άλλο σύνολο τιμών.

Όριο Συνάρτησης: Όταν $\forall \delta > 0$ και $0 < |x - x_0| < \delta$, $\exists \varepsilon > 0$ ούτως ώστε $0 < |f(x) - l| < \varepsilon$, τότε το l καλείται όριο της f στο x_0 [$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$]

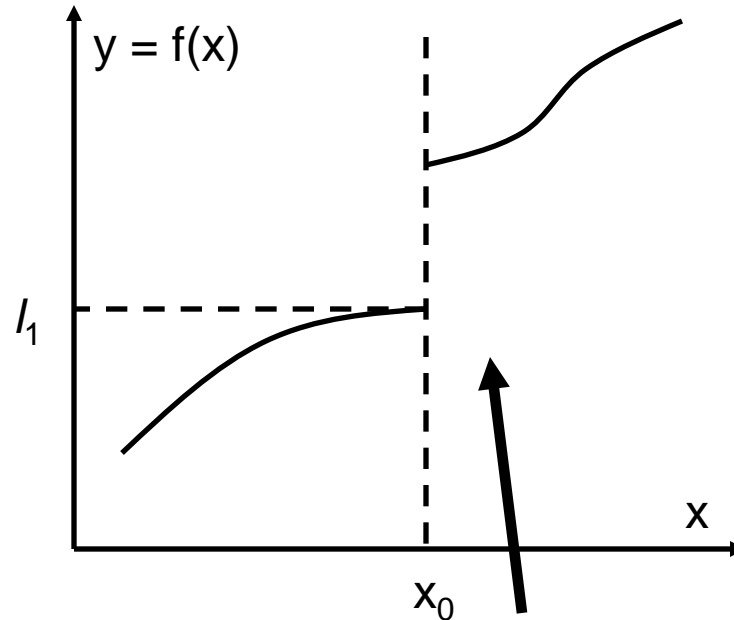
Πλευρικά όρια Συνάρτησης:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πλευρικά όρια Συνάρτησης :

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$



Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

Μια συνάρτηση είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $x = x_0$, τότε και οι $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 ,

ενώ η $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής εφόσον $g(x_0) \neq 0$.

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλα τα ορισμένα διαστήματα : τα πολυώνυμα, $\sin x$, $\cos x$, a^x (με $a > 0$).

Η συνεχής συνάρτηση μιας συνεχούς συνάρτησης είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Δηλαδή, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 ,

και η $z = g(y)$ είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$,

τότε και η $z = g[f(x)]$ είναι συνεχής στο x_0 .

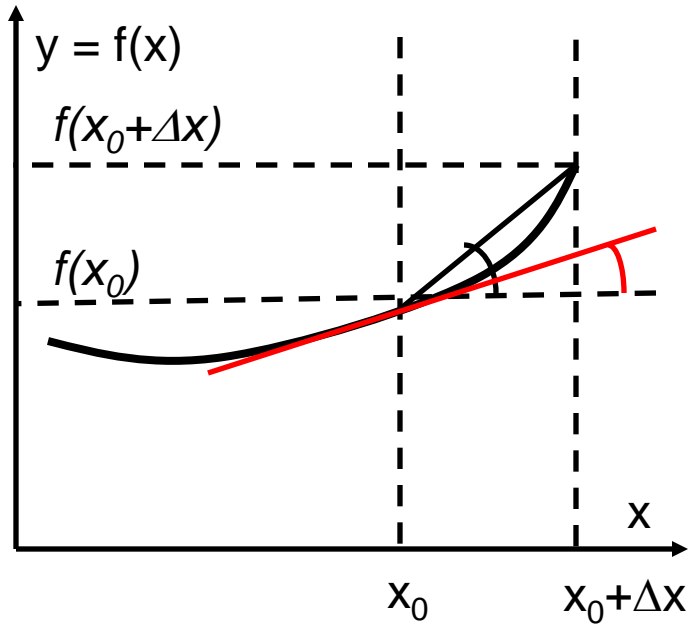
Παράδειγμα: Η $f(x) = 3x^2 + 1$ είναι συνεχής στο 1. Η $g(y) = 1/y$ είναι συνεχής στο $y = 4$. Άρα και η $1/f(x) = 1/(3x^2 + 1)$ είναι συνεχής στο 1.

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ Ι – 1ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΗΜΜΥ

1ο ΤΜΗΜΑ: Επώνυμα Σπουδαστών Α-ΚΑ, ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ 3
(Διδάσκουσα: Καθ. Ρ. Ζάννη-Βλαστού)

2ο ΤΜΗΜΑ: Επώνυμα Σπουδαστών ΚΕ-ΠΑ, ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ 4
(Διδάσκοντας: Επ. Καθ. Λ. Τσέτσερης)

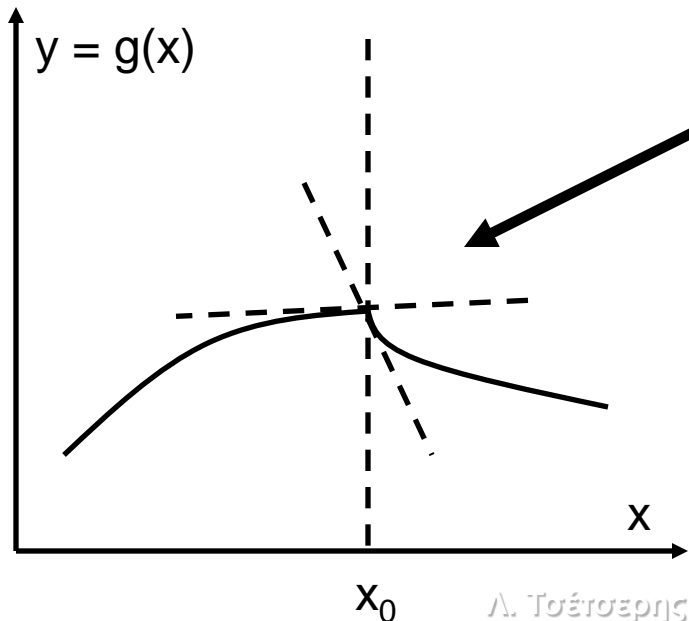
3ο ΤΜΗΜΑ: Επώνυμα Σπουδαστών ΠΕ-Ω, ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ 5
(Διδάσκοντας: Αν. Καθ. Κ. Φαράκος)



Παράγωγος Συνάρτησης :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Όταν η παράγωγος υπάρχει τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο x_0 .



Η $g(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Αν $f(x)$ είναι διαφορίσιμη, τότε γράφουμε

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x) dx.$$

Η σχέση αυτή

ορίζει το διαφορικό dy της $y = f(x)$.

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f', \text{ όπου } c \text{ μια σταθερά.}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'[g(x)]g'(x)$$

Αν $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

Π.χ. αν $f(x) = \sin 2x$ τότε

$$\frac{df}{dx} = (\cos 2x)(2) = 2 \cos 2x$$

Π.χ. αν $y = f(x) = e^x$ τότε $x = \ln y$

$$\text{και } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = 1/e^x = 1/y$$

Αν $x = f(t)$ και $y = g(t)$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Αρμονική κίνηση: $x = A \sin \omega t$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t = v(\text{ταχύτητα})$$

Αν $f'(x)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη, τότε μπορούμε να ορίσουμε

την "δεύτερη" παράγωγο $f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}$.

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι $\frac{d^n y}{dx^n}$ οποιασδήποτε τάξης n .

Αν όλες οι παράγωγοι της $y = f(x)$ είναι συνεχείς και διαφορίσιμες στο διάστημα (a, b) ,

τότε $\exists \xi$ με $x \leq \xi \leq x_0$ ώστε για τα δύο σημεία x και x_0 του (a, b) έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, τότε έχουμε την σειρά Taylor.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

Είναι $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x \forall n.$

Οπότε $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

Έχουμε: $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$

και $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$

Οπότε: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

και $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

Για πολύ μικρές διαφορές $x - x_0$

$$\text{είναι } \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} (x - x_0)^2 \ll \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Αν θέλουμε μπορούμε να κρατήσουμε ψηλότερους όρους

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Το ανάπτυγμα Taylor μας δίνει *προσεγγίσεις* για τις οποίες μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα.

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΕΥΛΕΡ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

Είναι $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x \forall n$. Οπότε $e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$

Έχουμε $\frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta}$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right)$$

Είναι όμως: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ και $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$$\text{Οπότε: } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

ΚΑΝΟΝΕΣ Λ' HOPITAL

$$\text{Έστω } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B.$$

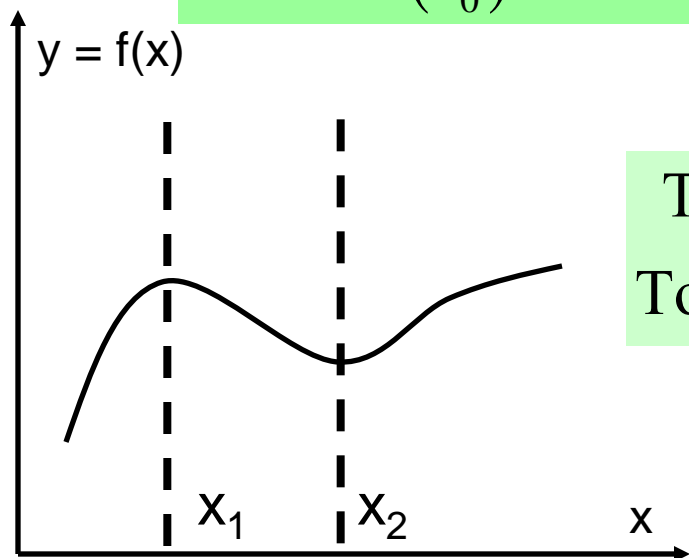
$$\text{Αν } A = B = 0, \text{ ή } A = B = \infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2p-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(2p)}(x_0) \neq 0$
για κάποιον θετικό ακέραιο p , τότε

Αν $f^{(2p)}(x_0) < 0$ τότε η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Αν $f^{(2p)}(x_0) > 0$ τότε η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .



Τοπικό μέγιστο στο x_1 : $f'(x_1) = 0, f''(x_1) < 0$.
Τοπικό ελάχιστο στο x_2 : $f'(x_2) = 0, f''(x_2) > 0$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Πολλά φυσικά μεγέθη χαρακτηρίζονται όχι μόνο από κάποια "ποσότητα", αλλά και από μία κατεύθυνση.

Για την περιγραφή των φυσικών αυτών μεγεθών χρειαζόμαστε διανύσματα,

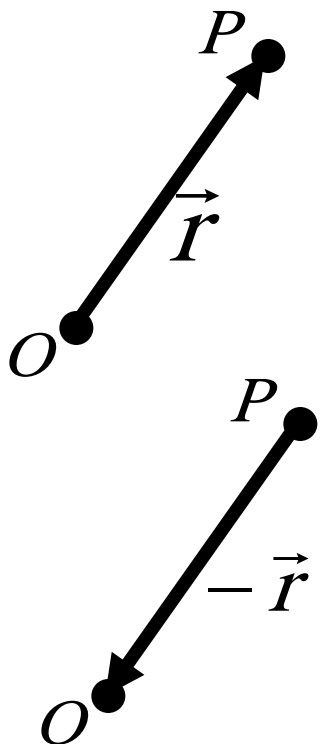
δηλαδή μαθηματικά αντικείμενα με μέτρο ("ποσότητα") και κατεύθυνση.

Γράφουμε : $\vec{r} = r \hat{r}$, όπου \vec{r} είναι το διάνυσμα,

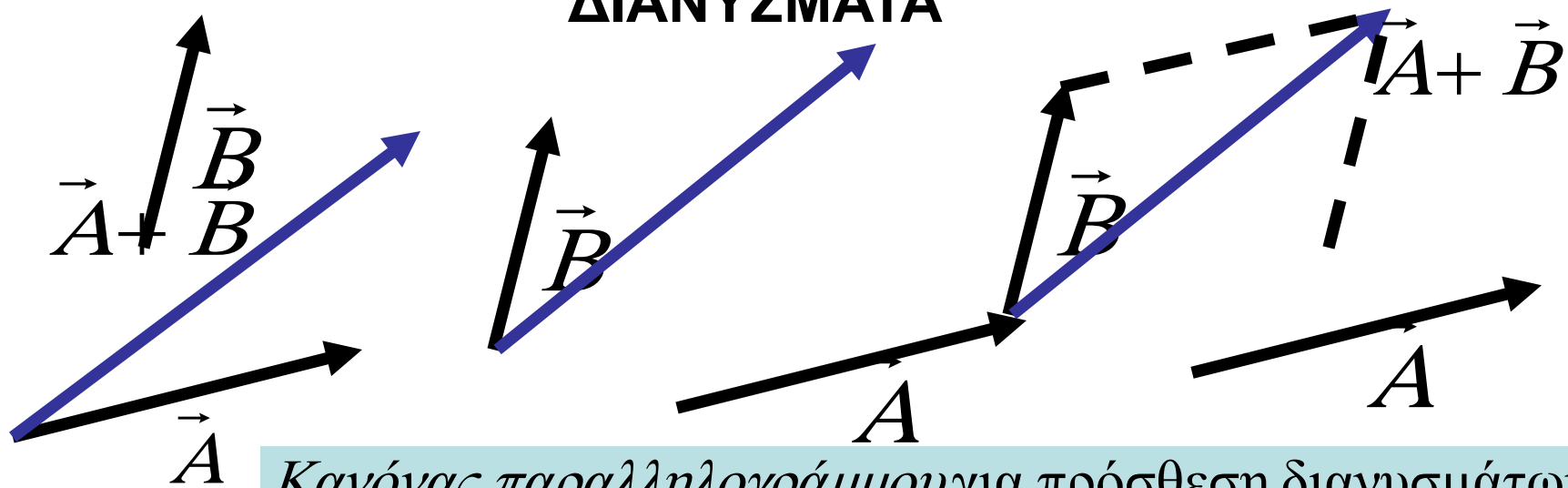
$r (\equiv |\vec{r}|)$ το μέτρο του διανύσματος,

\hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα ($|\hat{r}| = 1$) που δηλώνει την κατεύθυνση του \vec{r} .

Παραδείγματα διανυσματικών φυσικών μεγεθών : διάνυσμα θέσης, ταχύτητα, δύναμη, ηλεκτρικό πεδίο, κ.ά.



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



Κανόνας παραλληλογράμμου για πρόσθεση διανυσμάτων.

Για να ορίσουμε μεγέθη ως διανύσματα απαιτούμε να ισχύει :

1) Η προσεταιριστική ιδιότητα $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

2) Η μεταθετική ιδιότητα $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

3) Ορίζεται ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό μέγεθος ούτως ώστε $k\vec{A}$ να είναι το διάνυσμα με μέτρο $|k|A$ και κατεύθυνση $sign(k)\hat{A}$.

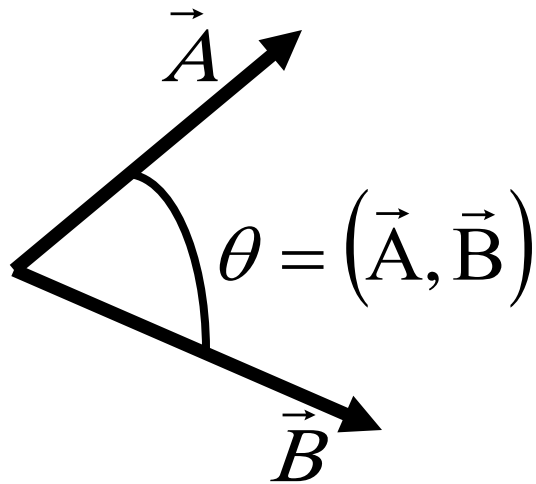
4) Να ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό μέγεθος $k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Υπάρχουν μεγέθη που συνδυάζουν "ποσότητα" και κατεύθυνση, ωστόσο δεν συμπεριφέρονται ως διανύσματα.

Παράδειγμα : Πεπερασμένες περιστροφές γύρω από διαφορετικούς άξονες.

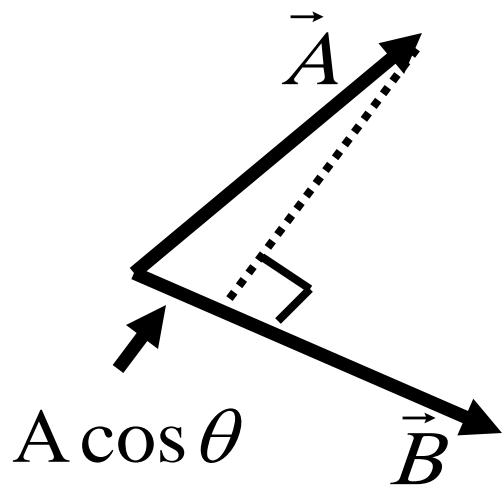
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ



Ορισμός: Είναι $\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos(\vec{A}, \vec{B})$.

Η προβολή του \vec{A} πάνω στο \vec{B} δίνεται από την σχέση $A \cos(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \hat{B}$

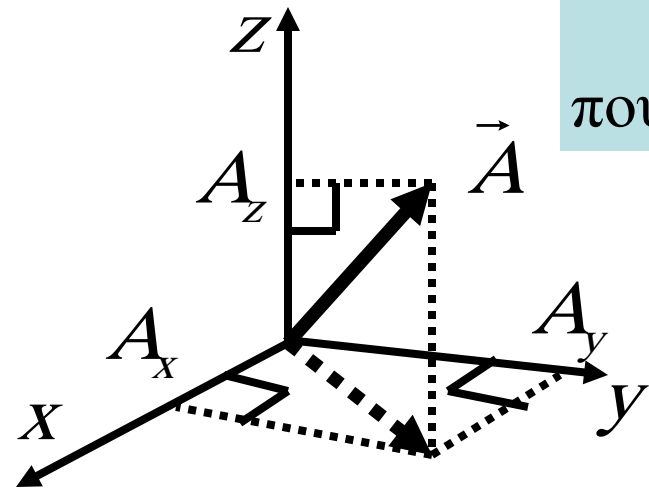
Είναι $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ για διανύσματα που είναι *κάθετα* ή *ορθογώνια* μεταξύ τους.



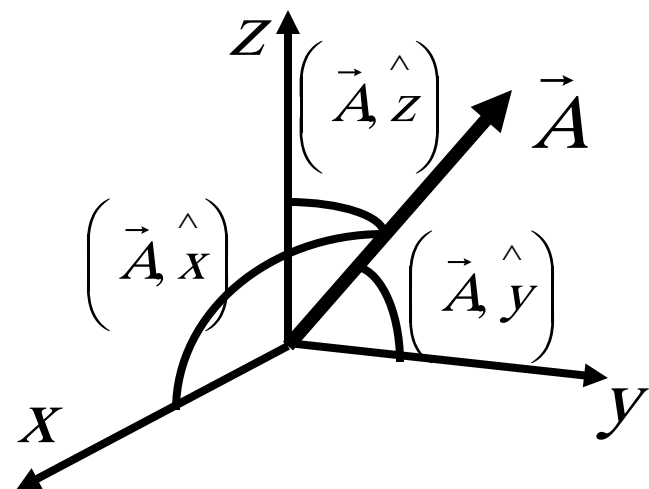
Έχουμε, για παράδειγμα, $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$
 και $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xyz
που ορίζεται από τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.



Οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{A} μπορεί να γραφεί ως $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$, όπου $A_x = \vec{A} \cdot \hat{x}$, $A_y = \vec{A} \cdot \hat{y}$, $A_z = \vec{A} \cdot \hat{z}$.



Αν $\alpha = \left(\vec{A}, \hat{x} \right)$, $\beta = \left(\vec{A}, \hat{y} \right)$, $\gamma = \left(\vec{A}, \hat{z} \right)$
τότε $\vec{A} = A \left(\cos \alpha \hat{x} + \cos \beta \hat{y} + \cos \gamma \hat{z} \right)$

$$\text{Είναι } A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\text{και } \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

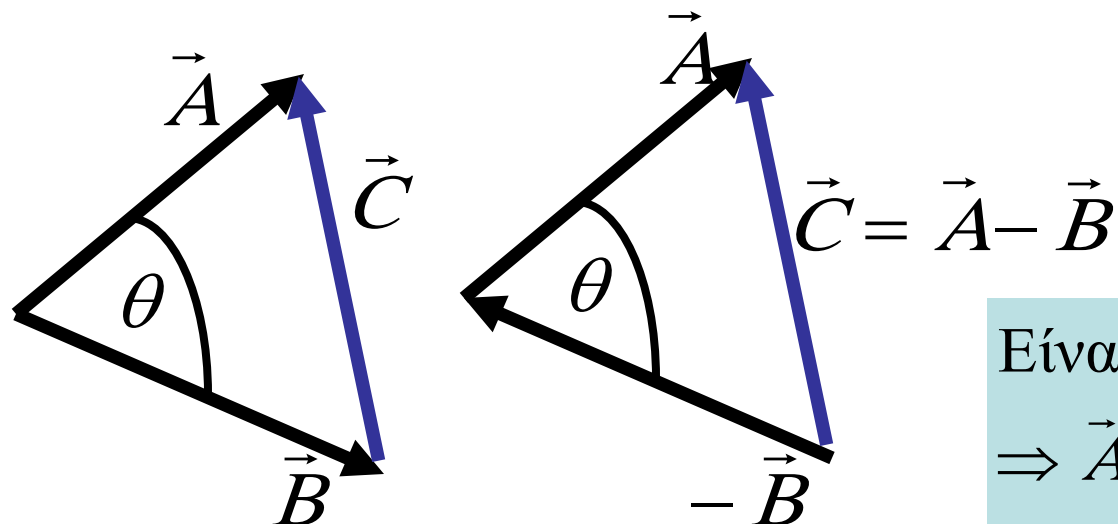
Έστω $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Τότε :

$$1) \vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2 \text{ και } a_3 = b_3$$

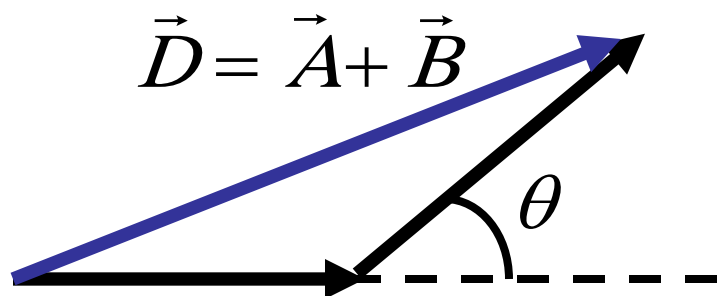
$$2) \vec{A} \pm \vec{B} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

$$3) c\vec{A} = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

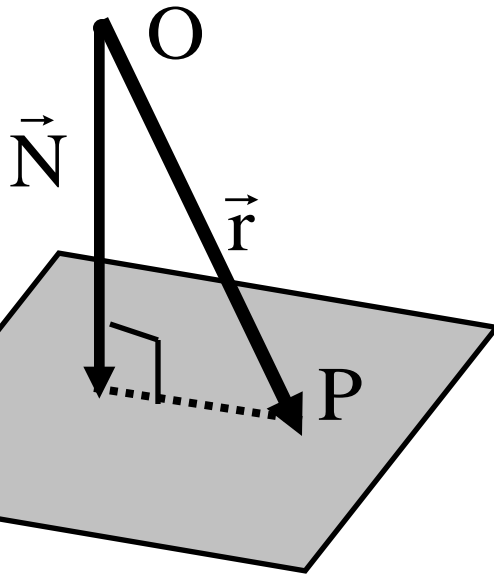


$$\begin{aligned} \text{Είναι } (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) &= \vec{C} \cdot \vec{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} - 2\vec{A} \cdot \vec{B} &= C^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A^2 + B^2 - 2AB\cos(\vec{A}, \vec{B}) &= C^2. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Είναι } (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= \vec{D} \cdot \vec{D} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} &= D^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos(\vec{A}, \vec{B}) &= D^2. \end{aligned}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ



Το κοινό γνώρισμα όλων των σημείων του επιπέδου είναι ότι το αντίστοιχο διάνυσμα \vec{r} έχει την ίδια προβολή πάνω στο \vec{N} :

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = N^2$$

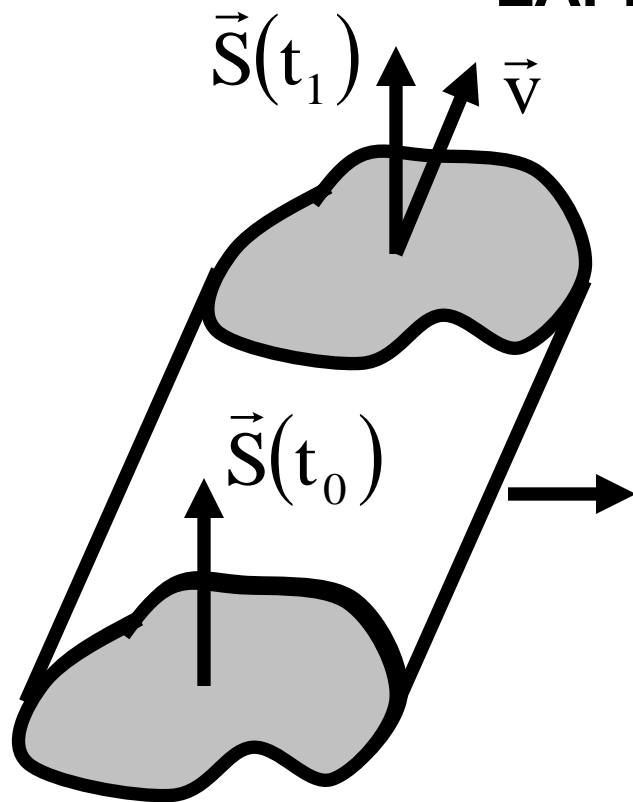
Αν $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ και $\vec{N} = N_x\hat{x} + N_y\hat{y} + N_z\hat{z}$ βρίσκουμε

$$x \frac{N_x}{N^2} + y \frac{N_y}{N^2} + z \frac{N_z}{N^2} = 1$$

που είναι η συνήθης μορφή της εξίσωσης ενός επιπέδου

$$ax + by + cz = 1$$

ΣΑΡΩΣΗ ΟΓΚΟΥ

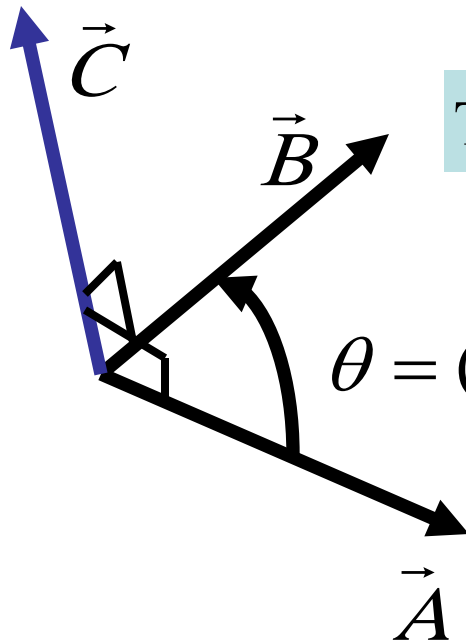


Όγκος V που σαρώθηκε
μεταξύ t_0 και t_1 .

Ρυθμός σάρωσης όγκου :

$$\frac{dV}{dt} = \vec{S} \cdot \vec{v}$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ



Το εξωτερικό γινόμενο των \vec{A} και \vec{B} είναι το διάνυσμα:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv AB \left| \sin(\vec{A}, \vec{B}) \right| \hat{C},$$

όπου \hat{C} ορίζει μία κατεύθυνση ως εξής

1) Φέρνουμε τα \vec{A} και \vec{B} σε μία κοινή αρχή.

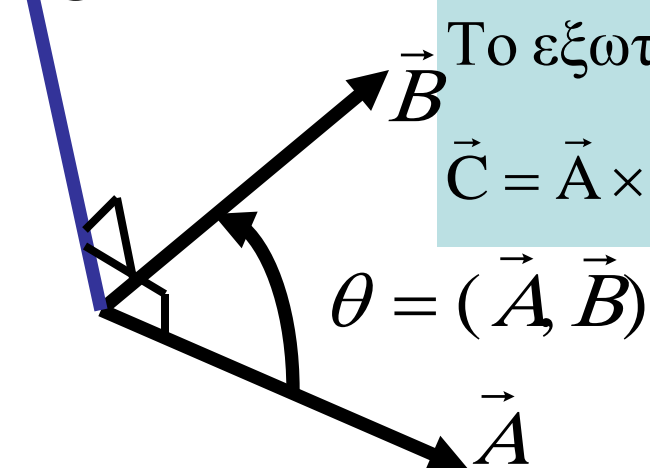
2) Το \vec{C} είναι κάθετο στο επίπεδο των \vec{A}, \vec{B}

3) Η κατεύθυνση του \vec{C} προκύπτει από τον αντίχειρα του δεξιού μας χεριού όταν η υπόλοιπη παλάμη "ακολουθεί" την μικρότερη δυνατή γωνία που πρέπει να διαγράψει το \hat{A} για να συμπέσει με το \hat{B} .

(κανόνας του δεξιόστροφου κοχλίου).

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$



$$\theta = (\vec{A}, \vec{B})$$

Το εξωτερικό γινόμενο των \vec{A} και \vec{B} είναι το διάνυσμα :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv AB \left| \sin(\vec{A}, \vec{B}) \right| \hat{C}.$$

Είναι :

$$1) \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}.$$

$$2) \vec{A} \times \vec{A} = 0 \text{ (αφού } \sin(\vec{A}, \vec{A}) = 0)$$

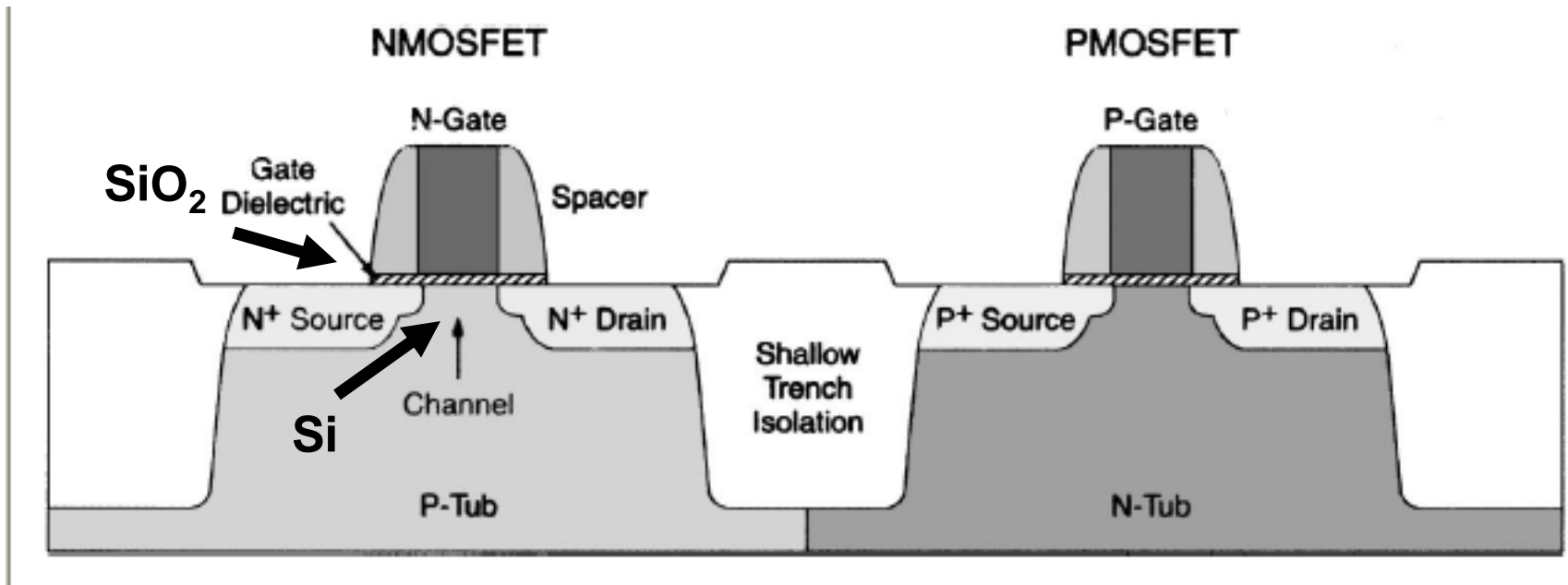
$$3) \vec{A} \times \vec{B} = 0, \forall \vec{A}, \vec{B} \text{ με } \vec{A} \parallel \vec{B}.$$

$$4) \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \text{ και ίδιες σχέσεις με κυκλική εναλλαγή των } x, y, z \text{ (π.χ. } \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y})$$

$$\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$$

Nobel Φυσικής 2010: Από το πυρίτιο στο γραφένιο (;;;)

“SiO₂ enabled the microelectronics revolution” (Green et al., JAP’01)



CMOS (complimentary metal-oxide-semiconductor)

Si-SiO₂ interface

J. Appl. Phys., Vol. 96, No. 6, 15 September 2004

Cho et al.

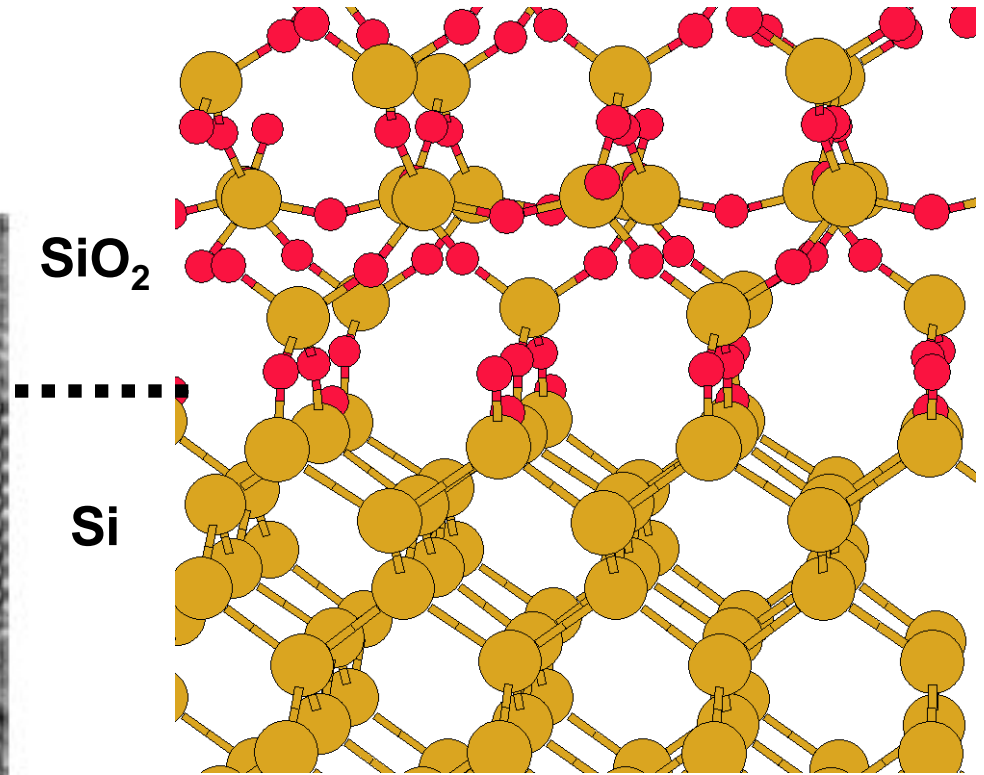
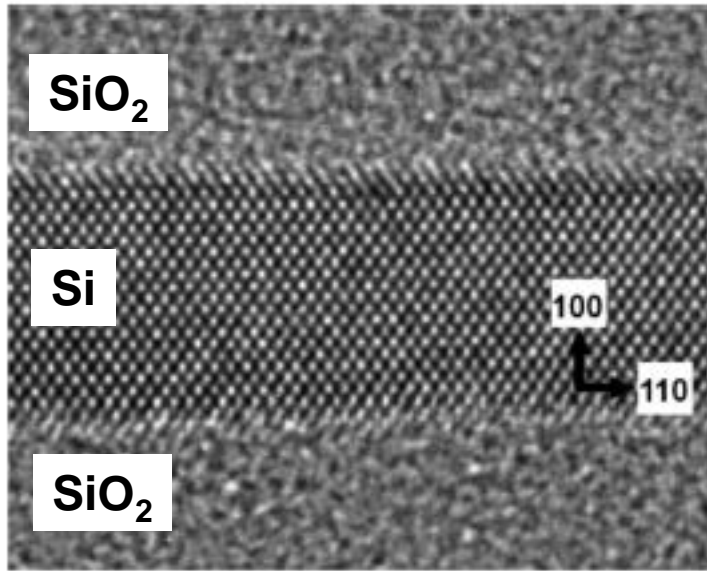
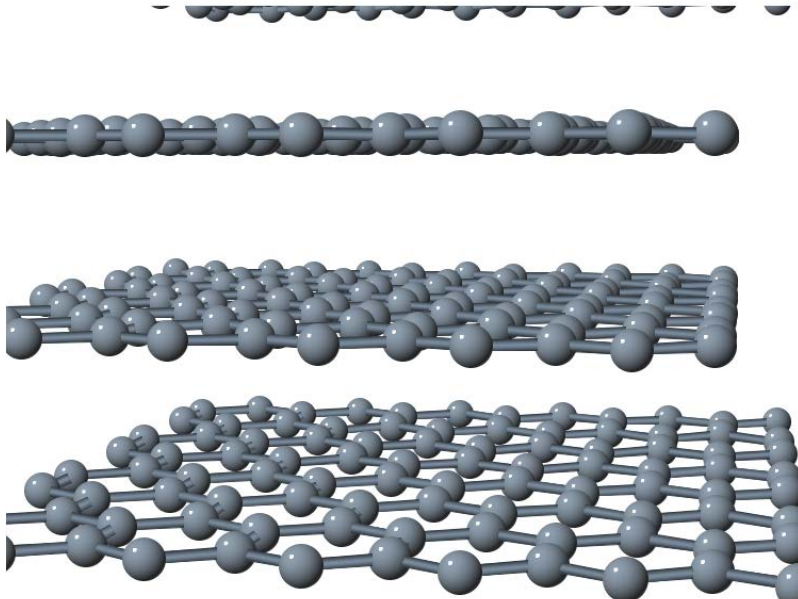


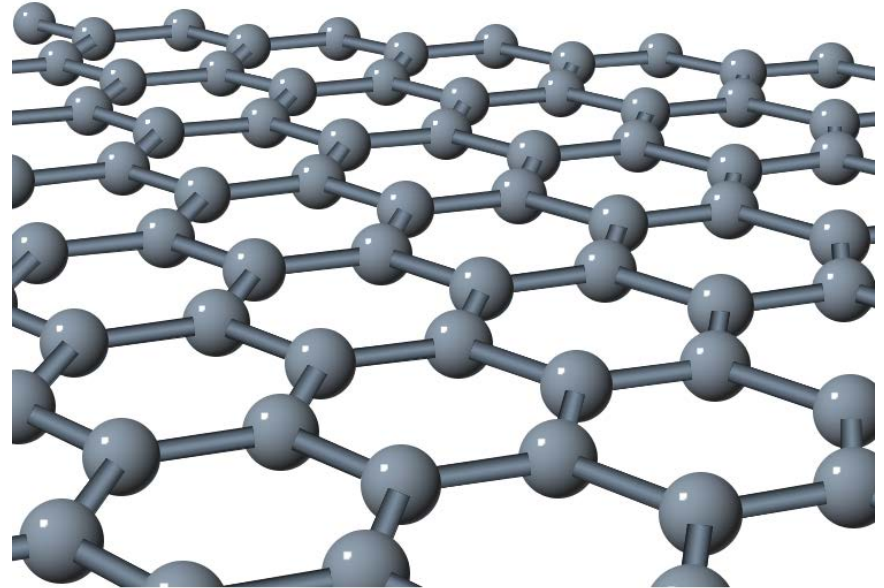
FIG. 3. HRTEM image of a ~5.2-nm-thick Si(100) encased by SiO₂.

Atomically-flat interface

Γραφίτης - Γραφένιο



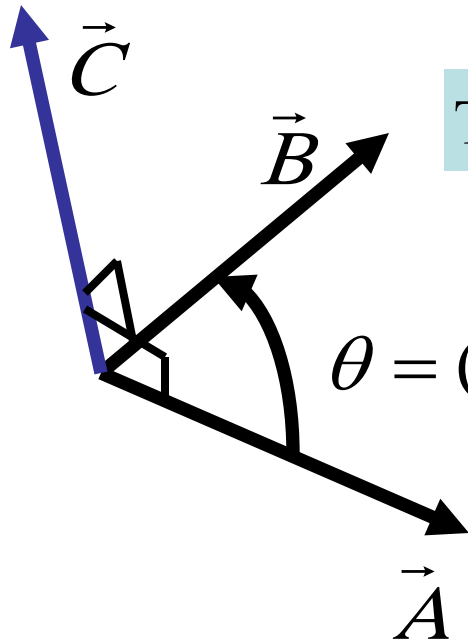
Γραφίτης



Γραφένιο (Graphene)

Οι φορείς του ηλεκτρισμού είναι δεκάδες και εκατοντάδες χιλιάδες φορές πιο ευκίνητοι πάνω σε γραφένιο σε σύγκριση με το πυρίτιο!

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ



Το εξωτερικό γινόμενο των \vec{A} και \vec{B} είναι το διάνυσμα:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv AB \left| \sin(\vec{A}, \vec{B}) \right| \hat{C},$$

όπου \hat{C} ορίζει μία κατεύθυνση ως εξής

1) Φέρνουμε τα \vec{A} και \vec{B} σε μία κοινή αρχή.

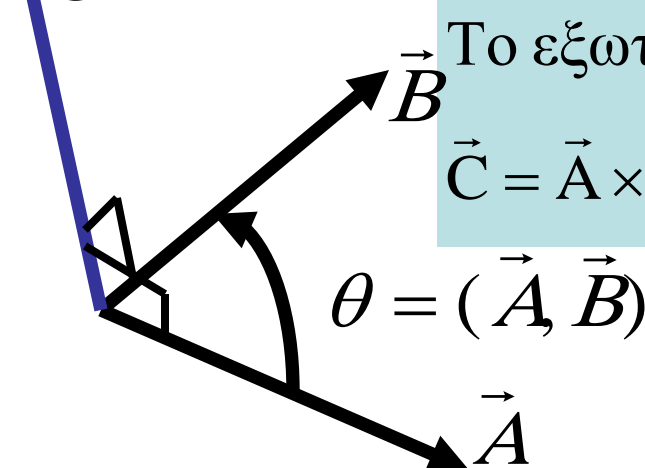
2) Το \vec{C} είναι κάθετο στο επίπεδο των \vec{A}, \vec{B}

3) Η κατεύθυνση του \vec{C} προκύπτει από τον αντίχειρα του δεξιού μας χεριού όταν η υπόλοιπη παλάμη "ακολουθεί" την μικρότερη δυνατή γωνία που πρέπει να διαγράψει το \hat{A} για να συμπέσει με το \hat{B} .

(κανόνας του δεξιόστροφου κοχλίου).

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$



$$\theta = (\vec{A}, \vec{B})$$

Το εξωτερικό γινόμενο των \vec{A} και \vec{B} είναι το διάνυσμα :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \equiv AB \sin(\vec{A}, \vec{B}) \hat{C}$$

Είναι :

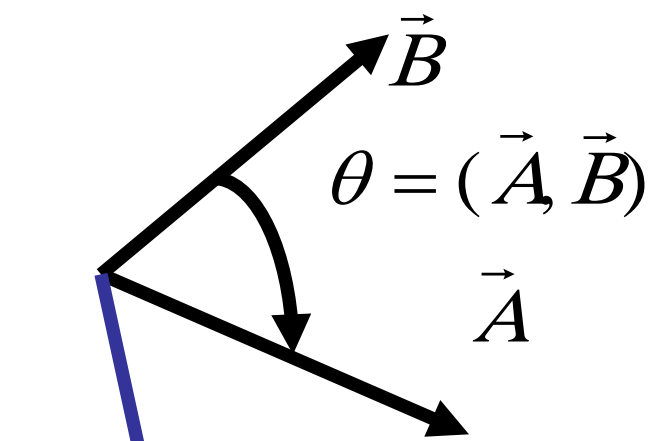
$$1) \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}.$$

$$2) \vec{A} \times \vec{A} = 0 \text{ (αφού } \sin(\vec{A}, \vec{A}) = 0)$$

$$3) \vec{A} \times \vec{B} = 0, \forall \vec{A}, \vec{B} \text{ με } \vec{A} \parallel \vec{B}.$$

$$4) \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \text{ και ίδιες σχέσεις με κυκλική εναλλαγή των } x, y, z \text{ (π.χ. } \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y})$$

$$\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$$



$$\theta = (\vec{A}, \vec{B})$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ισχύει η *επιμεριστική ιδιότητα*:

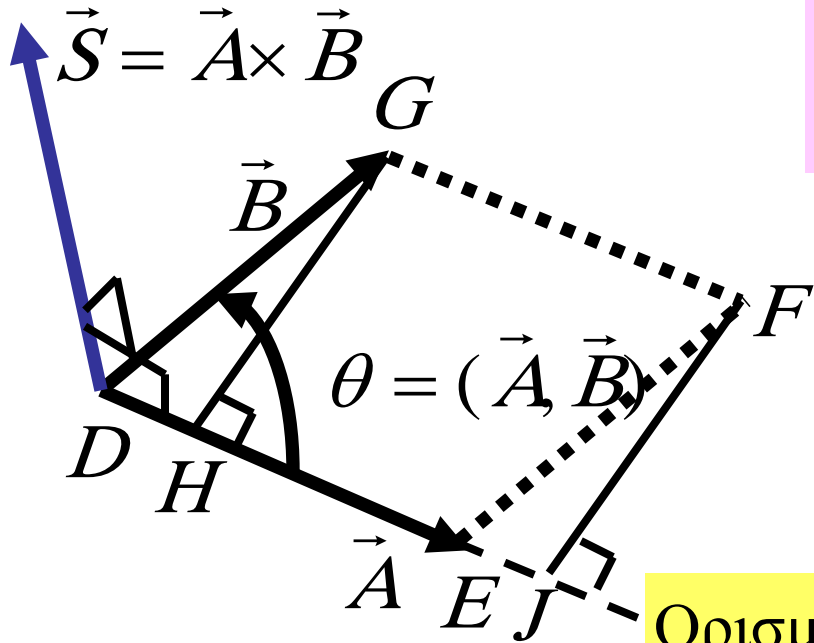
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \quad (1)$$

Όπως είδαμε: $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ και σχέσεις κυκλικής εναλλαγής των x, y, z .

Οπότε, αν $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ και $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$

$$\text{τότε: } \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \quad (2)$$

$$\text{ή αλλιώς } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3)$$



Το εμβαδό του DEFG είναι ίσο με αυτό του FGHI και ίσο με $AB|\sin(\vec{A}, \vec{B})|$.

Έχουμε λοιπόν ότι το $|\vec{A} \times \vec{B}|$ μας δίνει το εμβαδό S του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα \vec{A} και \vec{B} .

Ορισμός του εμβαδού S ως διάνυσμα $\vec{S} = \vec{A} \times \vec{B}$.

Με παρόμοιους συλλογισμούς αποδεικνύεται ότι το *μικτό γινόμενο*

$$|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| = V \quad (1),$$

όπου V είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τρία διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

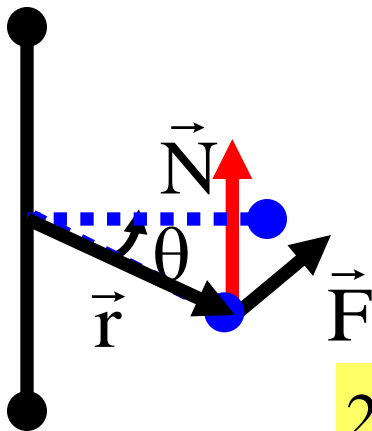
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

$$\text{Είναι : } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\text{Οπότε, αν } \vec{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z} \quad (2)$$

$$\text{τότε } \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\left[\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \quad (1') \right]$$

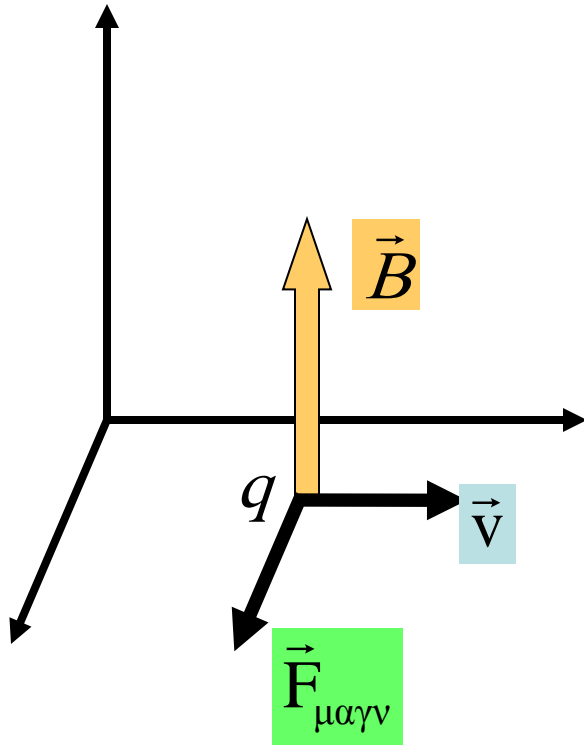


Μεγέθη που ορίζονται ως εξωτερικά γινόμενα :

$$1) \text{ Ροπή: } \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$2) \text{ Στροφορμή: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \text{ όπου } \vec{p} = m\vec{v} \text{ η ορμή σώματος}$$

Έστω φορτίο q που κινείται με ταχύτητα \vec{v} μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης \vec{B} .



Τότε η δύναμη $\vec{F}_{\text{μαγν}}$ που ασκείται στο q είναι :

$$\vec{F}_{\text{μαγν}} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \quad (1)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (2)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (3)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D})]\vec{C} - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})]\vec{D} \quad (4)$$

$$\vec{A} \times [\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})] = (\vec{A} \times \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \times \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (5)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω διανυσματική συνάρτηση $\vec{A}(u) = A_1(u)\hat{i} + A_2(u)\hat{j} + A_3(u)\hat{k}$

Η παράγωγος της $\vec{A}(u)$ δίνεται από την σχέση :

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_1(u)}{du}\hat{i} + \frac{dA_2(u)}{du}\hat{j} + \frac{dA_3(u)}{du}\hat{k} \quad (1)$$

Παράδειγμα : Από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ (2)

βρίσκουμε την ταχύτητα $\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$ (3)

την επιτάχυνση $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$ (4)

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω $n = n(u)$ βαθμωτή συνάρτηση βαθμωτής μεταβλητής και $\vec{A} = \vec{A}(u)$ διανυσματική συνάρτηση βαθμωτής μεταβλητής.

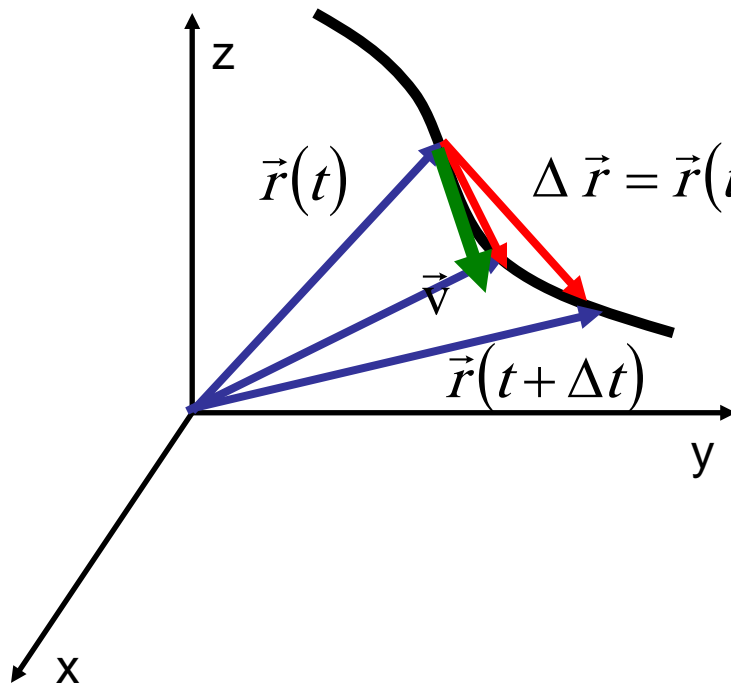
$$1) \frac{d(n\vec{A})}{du} = \frac{dn}{du} \vec{A} + n \frac{d\vec{A}}{du}$$

$$2) \frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du}$$

$$3) \frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du}$$

Από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ ($\hat{i} = \hat{x}, \hat{j} = \hat{y}, \hat{k} = \hat{z}$)

βρίσκουμε την ταχύτητα $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Η $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ εφάπτεται στην τροχιά $\vec{r}(t)$

Μέση ταχύτητα στο διάστημα Δt : $\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$

Στιγμιαία ταχύτητα την στιγμή t_1 : $\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_1}$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Σημεία στην περιφέρεια τροχού (ακτίνας R) που περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα ω ως προς σταθερό άξονα

Έστω ότι το σώμα βρίσκεται στον άξονα x για $t = 0$

$$\text{Διάνυσμα θέσης: } \vec{r}(t) = \hat{x} R \cos\omega t + \hat{y} R \sin\omega t$$

$$\text{Ταχύτητα: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\hat{x} R\omega \sin\omega t + \hat{y} R\omega \cos\omega t$$

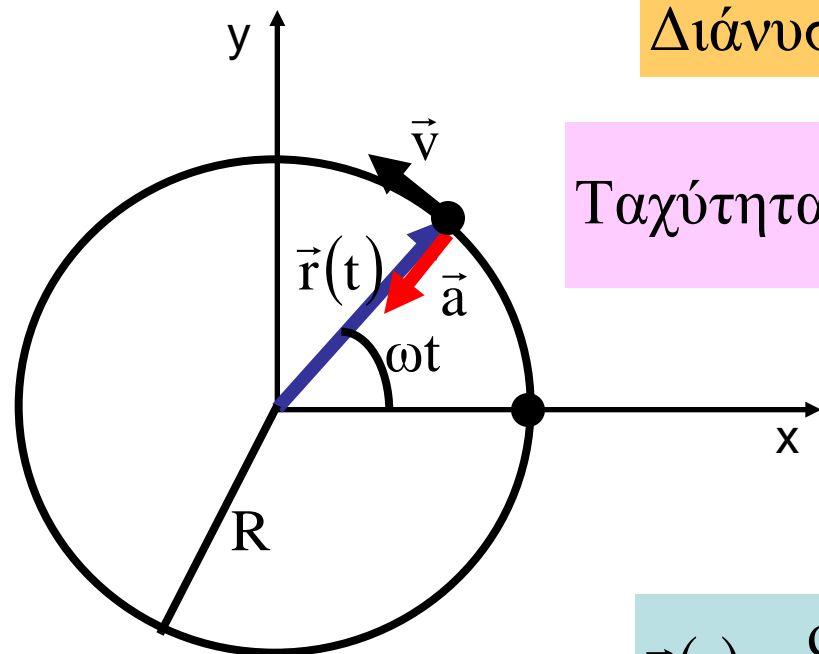
$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \omega R, \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

(Κεντρομόλος) Επιτάχυνση:

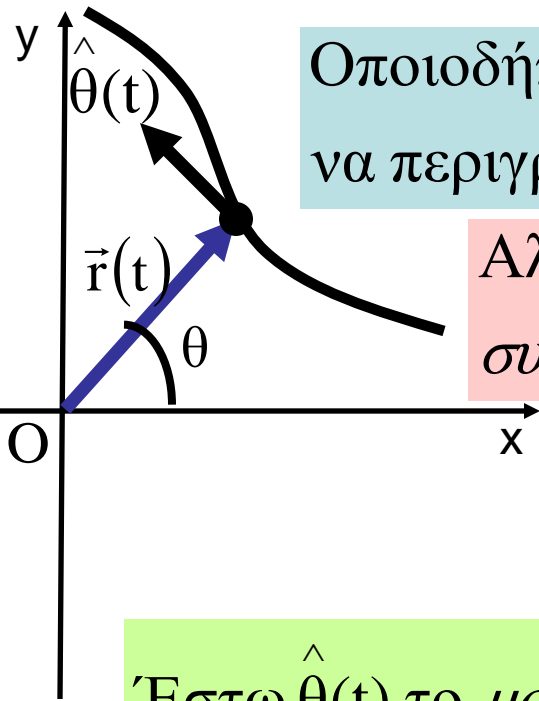
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\hat{x} R\omega^2 \cos\omega t - \hat{y} R\omega^2 \sin\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t) = -\omega^2 R \hat{r}(t)$$

$$a = \frac{v^2}{R}$$



ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ: ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ¹²



Οποιοδήποτε σώμα σε ένα επίπεδο $x - y$ μπορεί να περιγραφεί από *καρτεσιανές συντεταγμένες* (x, y) .

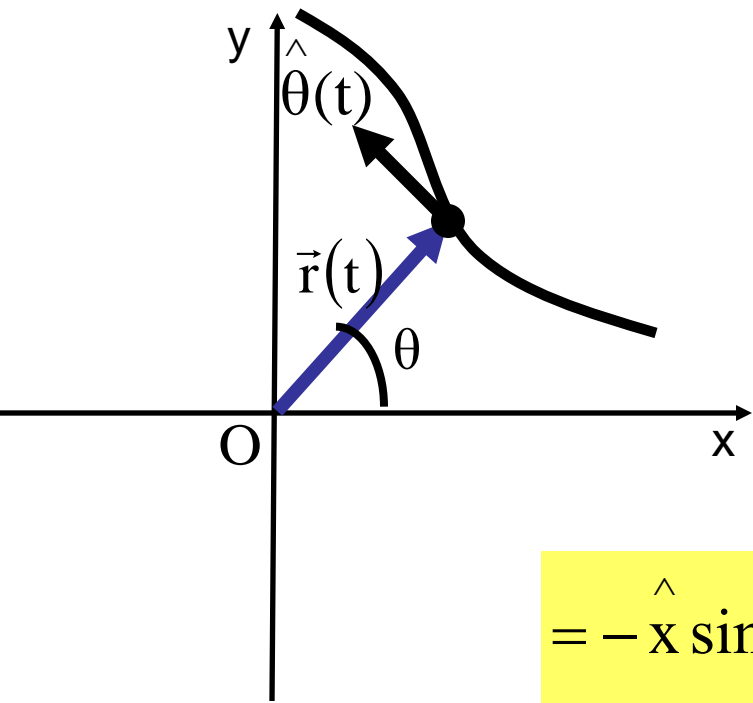
Αλλιώς, μπορεί να περιγραφεί από τις *πολικές συντεταγμένες* (r, θ) , όπου $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

$$\text{Είναι } \vec{r}(t) = r(t) \hat{r}(t)$$

Έστω $\hat{\theta}(t)$ το *μοναδιαίο διάνυσμα* που είναι *κάθετο* στο $\hat{r}(t)$ και δείχνει στην *κατεύθυνση* που αυξάνεται το θ .

$$\text{Είναι } \hat{r}(t) = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} = \frac{x(t)}{r(t)} \hat{x} + \frac{y(t)}{r(t)} \hat{y} = \hat{x} \cos[\theta(t)] + \hat{y} \sin[\theta(t)].$$

$$\text{Είναι ακόμη : } \hat{\theta}(t) = -\hat{x} \sin[\theta(t)] + \hat{y} \cos[\theta(t)].$$



$$\text{Είναι } \hat{r}(t) = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (1).$$

$$\text{και } \hat{\theta}(t) = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (2).$$

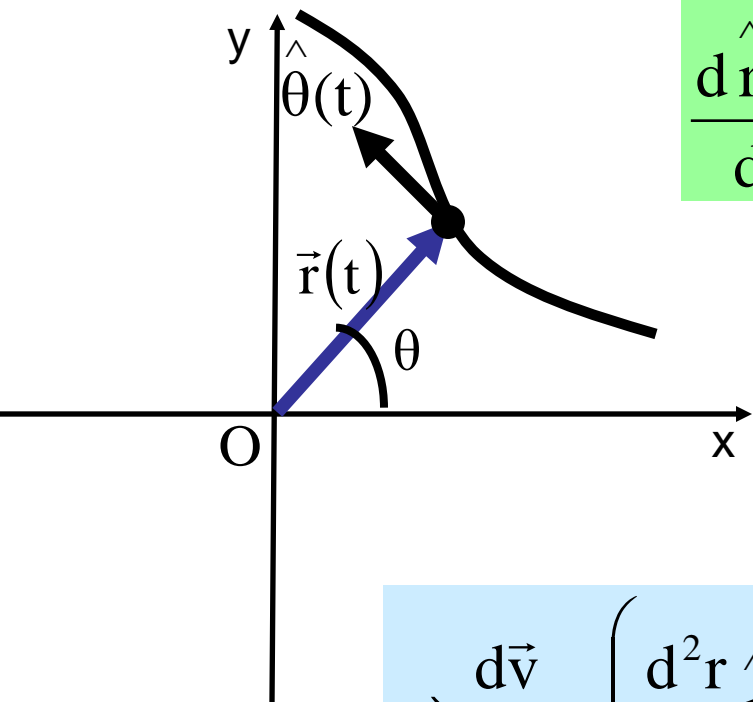
$$\text{Οπότε: } \frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{x} \frac{d\cos\theta}{dt} + \hat{y} \frac{d\sin\theta}{dt} =$$

$$= -\hat{x} \sin\theta \frac{d\theta}{dt} + \hat{y} \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3).$$

$$\text{Επομένως: } \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r(t) \hat{r}(t) \right) = \hat{r}(t) \frac{dr(t)}{dt} + r(t) \frac{d\hat{r}(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\text{και λόγω της (3) βρίσκουμε: } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta} \quad (4)$$

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ: ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ¹⁴



$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3).$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} \hat{r} + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta} \quad (4)$$

Για την επιτάχυνση $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ έχουμε :

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} \hat{r} + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r} + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} \right) + \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \hat{\theta} + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt} \right) \quad (5)$$

$$\text{Όμως: } \hat{\theta} = -\hat{x} \sin\theta + \hat{y} \cos\theta \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \left(-\hat{x} \cos\theta - \hat{y} \sin\theta \right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{r} \quad (6)$$

Εισάγοντας την (6)
στην (5) παίρνουμε :

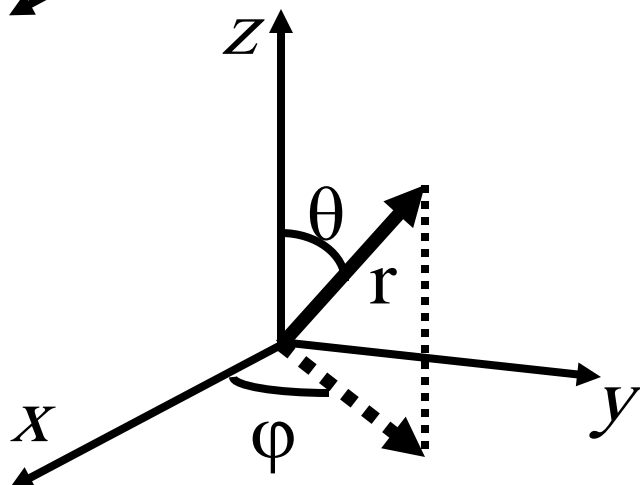
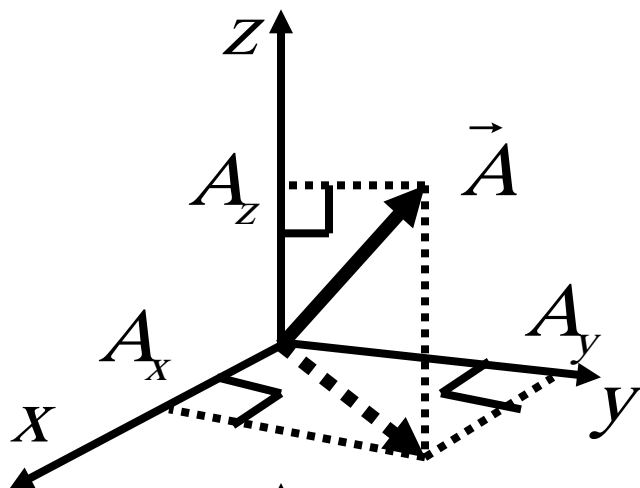
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \hat{r} + \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta} \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \hat{r} + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta} \quad (8)$$

Για τις παραγώγους ως προς χρόνο γράφουμε $\frac{df}{dt} = \dot{f}$, $\frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \hat{\theta} \quad (8')$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos\varphi \sin\theta, \quad y = r \sin\varphi \sin\theta, \quad z = r \cos\theta$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

mycourses.ntua.gr: online πληροφορία για το μάθημα

Συνολικά θα δοθούν 4 φυλλάδια ασκήσεων.

Η σωστή επίλυση όλων των προβλημάτων όλων των φυλλαδίων δίνει ένα “bonus” 10% στον τελικό βαθμό.

Π.χ., αν ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι 9 και έχετε λύσει σωστά όλα τα προβλήματα όλων των φυλλαδίων (και τα έχετε παραδώσει πριν την καταληκτική ημερομηνία που θα αναγράφεται σε κάθε φυλλάδιο), τότε ο τελικός βαθμός του μαθήματος θα είναι 10.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Θα πρέπει να κρατάτε στο αρχείο σας φωτοαντίγραφα των λύσεων που θα παραδίδετε.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

1

Έστω ο μετασχηματισμός $\hat{i} \rightarrow \hat{i}', \hat{j} \rightarrow \hat{j}', \hat{k} \rightarrow \hat{k}'$ (1)

Τότε $\vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} = a_1' \hat{i}' + a_2' \hat{j}' + a_3' \hat{k}'$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά
το αριστερό και δεξιό

$$a_1' = \vec{A} \cdot \hat{i}' = a_1 \left(\hat{i} \cdot \hat{i}' \right) + a_2 \left(\hat{j} \cdot \hat{i}' \right) + a_3 \left(\hat{k} \cdot \hat{i}' \right) \quad (3),$$

μέρος της (2) με \hat{i}', \hat{j}' , και \hat{k}'

$$a_2' = \vec{A} \cdot \hat{j}' = a_1 \left(\hat{i} \cdot \hat{j}' \right) + a_2 \left(\hat{j} \cdot \hat{j}' \right) + a_3 \left(\hat{k} \cdot \hat{j}' \right) \quad (4),$$

Βρίσκουμε τις σχέσεις (3) - (5)

$$a_3' = \vec{A} \cdot \hat{k}' = a_1 \left(\hat{i} \cdot \hat{k}' \right) + a_2 \left(\hat{j} \cdot \hat{k}' \right) + a_3 \left(\hat{k} \cdot \hat{k}' \right) \quad (5),$$

$$\text{ή αλλιώς: } \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \hat{i}' & \hat{j} \cdot \hat{i}' & \hat{k} \cdot \hat{i}' \\ \hat{i} \cdot \hat{j}' & \hat{j} \cdot \hat{j}' & \hat{k} \cdot \hat{j}' \\ \hat{i} \cdot \hat{k}' & \hat{j} \cdot \hat{k}' & \hat{k} \cdot \hat{k}' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΕ ΑΛΛΑΓΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ²

Έστω ο μετασχηματισμός $\hat{i} \rightarrow \hat{i}', \hat{j} \rightarrow \hat{j}', \hat{k} \rightarrow \hat{k}'$ (1)

$$\text{Τότε } \vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} = a_1' \hat{i}' + a_2' \hat{j}' + a_3' \hat{k}' \quad (2)$$

Εάν πρόκειται για περιστροφή τότε

Τα $A, \vec{A} \cdot \vec{B}$ και $\vec{A} \times \vec{B}$ παραμένουν τα ίδια για οποιαδήποτε διανύσματα \vec{A} και \vec{B} .

Έστω $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$. α) Ποιο είναι το μέτρο του \vec{A} ; β) Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του \vec{A} πάνω στο επίπεδο $x - y$; γ) Κατασκευάστε ένα μοναδιαίο διάνυσμα \vec{B} που να είναι κάθετο στο \vec{A} και να ανήκει στο επίπεδο $x - y$. δ) Βρείτε το μέτρο της προβολής του \vec{A} στην κατεύθυνση του $\vec{C} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$. ε) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{A} \times \vec{C}$.

ΛΥΣΗ: α) Είναι $A = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

β) Το διάνυσμα που προκύπτει από την προβολή του \vec{A} στο επίπεδο xy είναι το $3\hat{x} + \hat{y}$. Το μέτρο αυτής της προβολής είναι $\sqrt{10}$

γ) Έστω $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$. Για να είναι $\vec{B} \perp \vec{A}$ πρέπει $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow 3B_x + B_y = 0 \Rightarrow B_y = -3B_x$. Είναι λοιπόν $\vec{B} = B_x \left(\hat{x} - 3\hat{y} \right)$ και $\vec{B} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\hat{x} - 3\hat{y} \right)$.

Έστω $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$. α) Ποιο είναι το μέτρο του \vec{A} ; β) Ποιο είναι το μέτρο της προβολής του \vec{A} πάνω στο επίπεδο $x - y$; γ) Κατασκευάστε ένα μοναδιαίο διάνυσμα \hat{B} που να είναι κάθετο στο \vec{A} και να ανήκει στο επίπεδο $x - y$. δ) Βρείτε το μέτρο της προβολής του \vec{A} στην κατεύθυνση του $\vec{C} = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$. ε) Βρείτε το διάνυσμα $\vec{A} \times \vec{C}$.

δ) Είναι $C = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ και άρα $\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{14}} \left(\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z} \right)$. Οπότε η

προβολή που ζητούμε είναι ίση με $\vec{A} \cdot \hat{C} = \frac{1}{14} (3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = \frac{11}{14}$.

$$\varepsilon) \text{ Είναι } \vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{x}(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) - \hat{y}(3 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + \hat{z}(3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) =$$

$$= -\hat{x} - 7\hat{y} + 5\hat{z}.$$

Έργο που παράγεται από δυνάμεις. Οι σταθερές δυνάμεις $\vec{F}_1 = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$ (N) και $\vec{F}_2 = 4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}$ (N) δρουν συγχρόνως σε ένα σωματίδιο κατά την διάρκεια της μετατόπισής του από το σημείο $A(20,15,0)$ (m) στο σημείο $B(0,0,7)$ (m). α) Πόσο είναι το έργο (σε J) που παράγουν οι ασκούμενες δυνάμεις; Το έργο δίνεται σε αυτήν την περίπτωση από την έκφραση $\vec{F} \cdot \vec{r}$, όπου \vec{F} η συνισταμένη δύναμη ($\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$) και \vec{r} η μετατόπιση.

(α) Έχουμε για την μετατόπιση από το A στο B

$$\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 7\hat{z} - (20\hat{x} + 15\hat{y}) = -20\hat{x} - 15\hat{y} + 7\hat{z}$$

και $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (1\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}) + (4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}) = 5\hat{x} - 3\hat{y} + \hat{z}$ (N).

Αν W είναι το παραγόμενο από την F έργο, τότε

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = -20 \cdot 5 + (-15) \cdot (-3) + 7 = -100 + 45 + 7 = -48 \text{ (J)}.$$

Έργο που παράγεται από δυνάμεις. Οι σταθερές δυνάμεις $\vec{F}_1 = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$ (N) και $\vec{F}_2 = 4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}$ (N) δρουν συγχρόνως σε ένα σώμα κατά την διάρκεια της μετατόπισής του από το σημείο $A(20,15,0)$ (m) στο σημείο $B(0,0,7)$ (m).

β) Υπολογίστε χωριστά το έργο που παράγουν οι δυνάμεις \vec{F}_1 και \vec{F}_2 ;

γ) Υποθέτουμε ότι δρουν οι ίδιες δυνάμεις, αλλά ότι η μετατόπιση γίνεται από το σημείο B στο σημείο A. Πόσο είναι το έργο που παράγουν οι δυνάμεις στην περίπτωση αυτή;

ΛΥΣΗ: (β) Αν W_1 (W_2) είναι το παραγόμενο από την \vec{F}_1 (\vec{F}_2) έργο, τότε

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{r} = -20 - 30 + 21 = -29 \text{ J και}$$

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{r} = -80 + 75 - 14 = -19 \text{ J}$$

(γ) Σε κάθε περίπτωση το έργο αλλάζει πρόσημο διότι αλλάζει πρόσημο η μετατόπιση.

Έργο που παράγεται από δυνάμεις. Οι σταθερές δυνάμεις $\vec{F}_1 = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$ (N) και $\vec{F}_2 = 4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}$ (N) δρουν συγχρόνως σε ένα σώμα κατά την διάρκεια της μετατόπισής του από το σημείο $A(20,15,0)$ (m) στο σημείο $B(0,0,7)$ (m).

δ) Αν η μετατόπιση από το A στο B διαρκεί 10 s και συμβαίνει με σταθερή ταχύτητα, ποιος είναι ο ρυθμός παραγωγής έργου;

ΛΥΣΗ: (δ) Η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \frac{1}{10} \left(-20\hat{x} - 15\hat{y} + 7\hat{z} \right)$ (m/s).

Ο ρυθμός P παραγωγής έργου είναι: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{r})}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -4,8 \text{ J/s}$.

Ροπή δύναμης ως προς σημείο. Θεωρούμε μια δύναμη $\vec{F} = -3\hat{x} + \hat{y} + 5\hat{z}$ (N) που εφαρμόζεται στο σημείο $\vec{r} = 7\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$ (m). (α) Ποια είναι η ροπή της \vec{F} ως προς την αρχή των συντεταγμένων; (β) Ποια είναι η ροπή ως προς το σημείο (0,10,0);

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} =$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 7 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{x}(3 \cdot 5 - 1 \cdot 1) - \hat{y}(7 \cdot 5 - 1 \cdot (-3)) + \hat{z}(7 \cdot 1 - 3 \cdot (-3)) =$$

$$= 14\hat{x} - 38\hat{y} + 16\hat{z} \text{ (Nm).}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

9

Ροπή δύναμης ως προς σημείο. Θεωρούμε μια δύναμη $\vec{F} = -3\hat{x} + \hat{y} + 5\hat{z}$ (N) που εφαρμόζεται στο σημείο $\vec{r} = 7\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$ (m). (α) Ποια είναι η ροπή της \vec{F} ως προς την αρχή των συντεταγμένων; (β) Ποια είναι η ροπή ως προς το σημείο (0,10,0);

ΛΥΣΗ: (β) Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $\vec{r} = \left(7\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}\right) - 10\hat{y} = 7\hat{x} - 7\hat{y} + \hat{z}$ (m)

$$\text{και } \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 7 & -7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{x}(-7 \cdot 5 - 1 \cdot 1) - \hat{y}(7 \cdot 5 - 1 \cdot (-3)) + \hat{z}(7 \cdot 1 - (-7) \cdot (-3)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{N} = -36\hat{x} - 38\hat{y} - 14\hat{z} \text{ (Nm).}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σωματιδίου, του οποίου η θέση καθορίζεται από ένα από τα παρακάτω διανύσματα (συναρτήσεις του χρόνου t):

$$(α) \vec{r} = 16t\hat{x} + 25t^2\hat{y} + 33\hat{z},$$

$$(β) \vec{r} = 10\sin(15t)\hat{x} + 35t\hat{y} + e^{6t}\hat{z}.$$

$$\text{ΛΥΣΗ: (α) Για την ταχύτητα } \vec{v} \text{ έχουμε: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 16\hat{x} + 50t\hat{y},$$

$$\text{οπότε βρίσκουμε για την επιτάχυνση } \vec{a}: \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 50\hat{y}.$$

$$(β) \text{ Έχουμε: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 150\cos(15t)\hat{x} + 35\hat{y} + 6e^{6t}\hat{z},$$

$$\text{και } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2250\sin(15t)\hat{x} + 36e^{6t}\hat{z}.$$

ΠΡΩΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Κάθε σώμα συνεχίζει να παραμένει σε κατάσταση *ηρεμίας ή ομαλής κίνησης* εφ' όσον *καμμία δύναμη* δεν δρα πάνω σε αυτό (Galileo Galilei, 1564 - 1642)

Εισαγωγή της έννοιας της *αδράνειας* (μάζα : μέτρο της αδράνειας)

Αδρανειακά συστήματα αναφοράς
(Γη, Ήλιος, Γαλαξίας, Κέντρο μάζας Σύμπαντος)

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος είναι ανάλογος της συνολικής δύναμης που ασκείται πάνω στο σώμα.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}), \text{ όπου } \vec{P} = M\vec{v} \text{ είναι η ορμή του σώματος}$$

Μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι το Newton (N), $1 \text{ N} = 1 \text{ Kg} \times 1 \text{ m/s}^2$

Ο δεύτερος νόμος ορίζει την λεγόμενη αδρανειακή μάζα που μπορεί να προσδιοριστεί μέσω μέτρησης χρόνων και αποστάσεων και με την βοήθεια σταθερής δύναμης.

Υπάρχουν διάφορα είδη δυνάμεων που σχετίζονται με πεδία :

Βαρυτική (εμβέλεια ∞)

Ηλεκτρομαγνητική (εμβέλεια ∞)

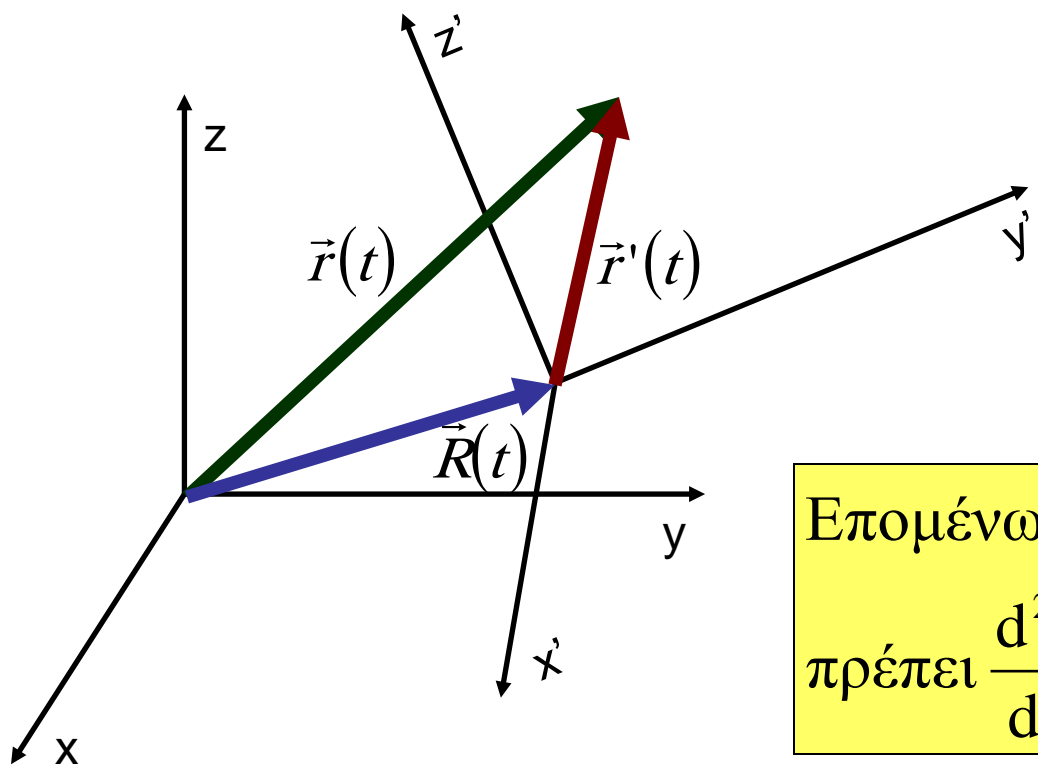
Ασθενής (εμβέλεια 10^{-13} cm)

Ισχυρή (εμβέλεια 10^{-13} cm)

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ: ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα σώμα μάζας m φαίνεται να κινείται υπό την επίδραση των ίδιων δυνάμεων ως προς δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς αν αυτά κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο.

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$



Οπότε

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'(t)}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} + \vec{F}'.$$

Επομένως, για να έχουμε $\vec{F} = \vec{F}'$

πρέπει $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0$, δηλαδή $\frac{d\vec{R}}{dt} = \text{σταθερά}.$

ΤΡΙΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

Δύο σώματα που αλληλεπιδρούν άμεσα ασκούν το ένα στο άλλο ίσες και αντίθετες δυνάμεις :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

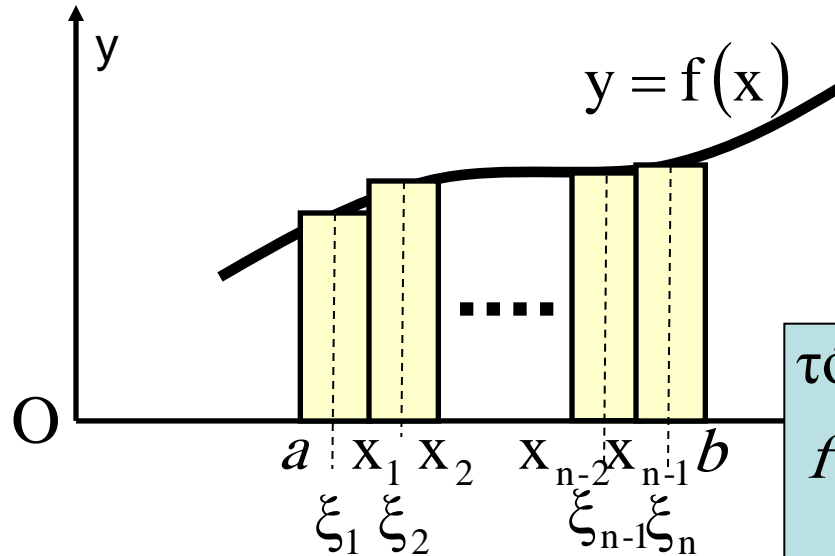
Μη τοπικότητα : Δεν ισχύει επακριβώς σε περιπτώσεις πεπερασμένης ταχύτητας μετάδοσης των αλληλεπιδράσεων σε μεγάλες αποστάσεις

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα υπονοεί ότι η ολική ορμή δύο αλληλεπιδρώντων σωμάτων παραμένει σταθερή :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} &\Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) &= 0 \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{σταθερά.} \end{aligned}$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1



$$S = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{\Delta x \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$

τότε λέμε ότι το *ορισμένο ολοκλήρωμα* της $f(x)$ στο $[a, b]$ είναι το

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος:

$$1) \int_a^b [Af(x) \pm Bg(x)]dx = A \int_a^b f(x)dx \pm B \int_a^b g(x)dx$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$4) \int_a^a f(x)dx = 0$$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Κάθε συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ώστε $F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$
ονομάζεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της $f(x)$.

Συμβολικά: $\int f(x)dx = F(x) + C$, όπου C μία σταθερά (ολοκλήρωσης).

$$\text{Είναι: } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$$\text{Παράδειγμα 1: } \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\text{Παράδειγμα 2: } \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\text{Παράδειγμα 3: } \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\text{Για σταθερή μάζα έχουμε : } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a} = M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{M} \quad (1)$$

Εάν γνωρίζουμε την δύναμη ως συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, τότε η σχέση αυτή ορίζει μια *διαφορική εξίσωση* λύση της οποίας μας περιγράφει την κίνηση του σώματος (θέση συναρτήσει του χρόνου).

Αν η δύναμη δεν εξαρτάται από τον χρόνο, τότε η (1) ορίζει μία *διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης*, η λύση της οποίας απαιτεί τον προσδιορισμό δύο αόριστων ολοκληρωμάτων (αυτών της ταχύτητας και της θέσης),

$$\frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} \Rightarrow \vec{v}(\vec{r}, t) = \int \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} dt + \vec{v}_0, \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{r}(t) = \int \vec{v}(\vec{r}, t) dt + \vec{r}_0$$

καθώς και δύο σταθερών ολοκλήρωσης. Οι σταθερές προσδιορίζονται (συνήθως) από γνωστές τιμές της λύσης σε κάποια χρονική στιγμή t_0 (ή στιγμές). Αν t_0 είναι η αρχική στιγμή, τότε μιλάμε για αρχικές συνθήκες.

ΚΙΝΗΣΗ ΥΠΟ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Έστω ότι σε ένα σώμα μάζας M ασκείται δύναμη $\vec{F} = M \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

Τότε έχουμε: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$, όπου \vec{v}_0, \vec{r}_0 είναι σταθερές.

Για τις επιμέρους συνιστώσες της ταχύτητας έχουμε:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow x = v_{0x} t + x_0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_{0y} \Rightarrow y = v_{0y} t + y_0$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v_{0z} \Rightarrow z = v_{0z} t + z_0$$

ΚΙΝΗΣΗ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΗ ΔΥΝΑΜΗ

Έστω ότι σε ένα σώμα μάζας m ασκείται σταθερή δύναμη \vec{F}

Τότε έχουμε :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m} \Rightarrow v_x = v_{0x} + \frac{F_x}{m}(t - t_0)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m} \Rightarrow v_y = v_{0y} + \frac{F_y}{m}(t - t_0)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{m} \Rightarrow v_z = v_{0z} + \frac{F_z}{m}(t - t_0)$$

Για τις συνιστώσες της θέσης βρίσκουμε :

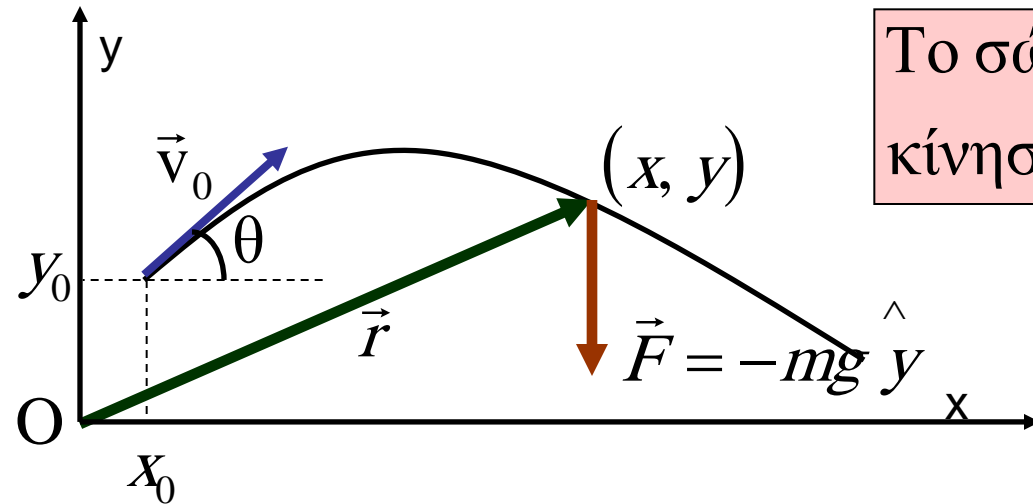
$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{F_x}{2m}(t - t_0)^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{F_y}{2m}(t - t_0)^2$$

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{F_z}{2m}(t - t_0)^2$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = -g \hat{y} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{x} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{y} = -g \hat{y}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \text{ και } \frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$



Το σώμα εκτελεί *ευθύγραμμη ομαλή* κίνηση κατά τον *άξονα των x*:

$$x = x_0 + (v_0 \cos \theta)t$$

Κατά τον άξονα των *y* το σώμα εκτελεί *ομαλά επιταχυνόμενη* κίνηση

$$y = y_0 + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

ΒΟΛΕΣ: ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ

$$x = x_0 + (v_0 \cos \theta) t \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \longrightarrow y = y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ας ορίσουμε $\tilde{y} = y - y_0$
και $\tilde{x} = x - x_0$. Τότε

$$\tilde{y} = \tilde{x} \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g \tilde{x}^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = a \tilde{x} + b \tilde{x}^2$$

$$\text{όπου } a \equiv \tan \theta \quad (1), \quad b \equiv -\frac{1}{2} \frac{g \tilde{x}^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (2).$$

$$\text{Είναι λοιπόν } \tilde{y} = b \left(\frac{a}{b} \tilde{x} + \tilde{x}^2 \right) = b \left[2 \frac{a}{2b} \tilde{x} + \tilde{x}^2 + \left(\frac{a}{2b} \right)^2 - \left(\frac{a}{2b} \right)^2 \right]$$

$$\text{Δηλαδή } \tilde{y} = b \left(\tilde{x} + \frac{a}{2b} \right)^2 - \frac{a^2}{4b} \Rightarrow \tilde{y} + \frac{a^2}{4b} = b \left(\tilde{x} + \frac{a}{2b} \right)^2$$

Αντικαθιστώντας από τις (1), (2) βρίσκουμε την εξίσωση της τροχιάς

ΒΟΛΕΣ: ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ

$$x = x_0 + (v_0 \cos \theta) t$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta}$$



$$y - \underbrace{\left(y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \right)}_{y_1} = \underbrace{\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}}_A \left[x - \underbrace{\left(x_0 + \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g} \right)}_{x_1} \right]^2$$

$$y - y_1 = A(x - x_1)^2$$

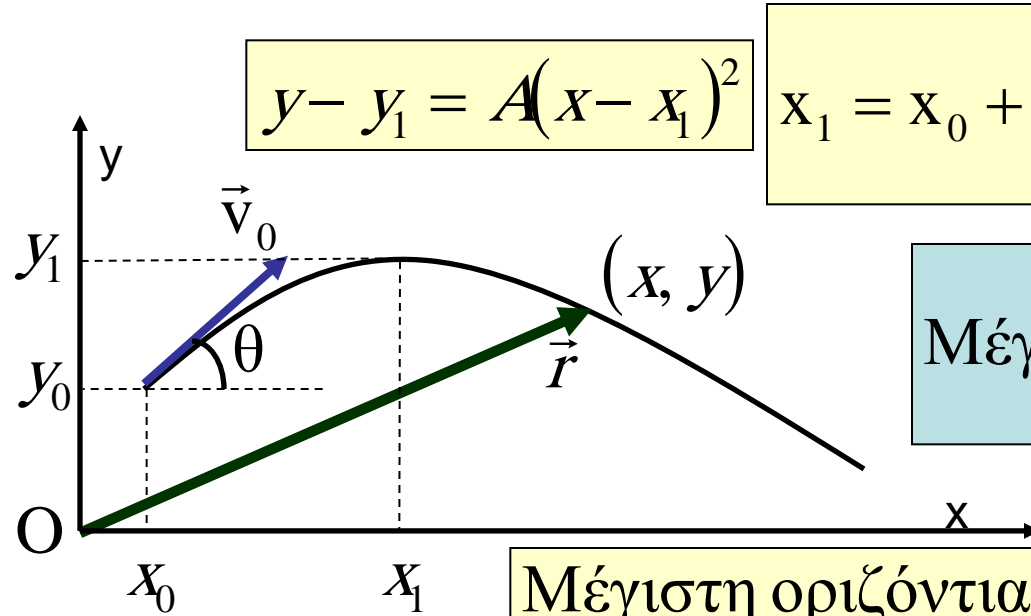
$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Εξίσωση παραβολής που περνάει από το σημείο (x_1, y_1)

ΒΟΛΕΣ: ΜΕΓΙΣΤΟ ΥΨΟΣ ΚΑΙ ΒΕΛΗΝΕΚΕΣ

9



$$y - y_1 = A(x - x_1)^2$$

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\text{Μέγιστο ύψος : } h_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Μέγιστη οριζόντια απόσταση (βεληνεκές):

$$R = 2(x_1 - x_0) = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Μέγιστο βεληνεκές:

$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \Rightarrow 2 \frac{v_0^2 \cos 2\theta}{g} = 0$$

Άρα R_{\max} προκύπτει για $\theta = 45^\circ$

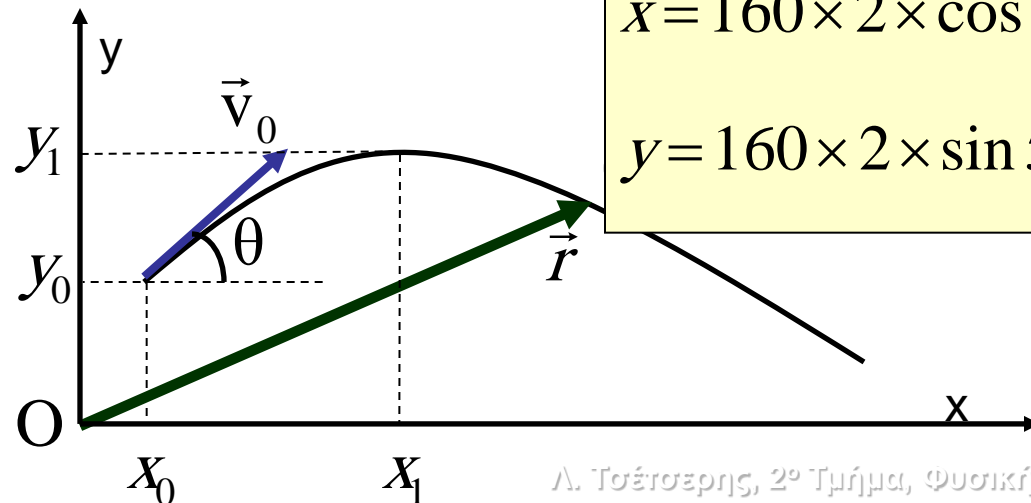
Ένα σώμα βάλλεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 160 \text{ m/s}$ σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta_0 = 53^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο.

(α) Βρείτε την θέση, το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος μετά από $t = 2 \text{ s}$. (β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος της βολής και σε ποια χρονική στιγμή φτάνει το σώμα σε αυτό το ύψος. (γ) Ποιο είναι το βεληνεκές της τροχιάς;

ΛΥΣΗ: (α) Είναι $x = x_0 + (v_0 \cos \theta) t$ και $y = y_0 + (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2$

Για $\theta = 53^\circ$ και $t = 2 \text{ s}$ (υποθέτουμε $x_0 = y_0 = 0$) βρίσκουμε :

$$x = 160 \times 2 \times \cos 53^\circ = 160 \times 2 \times 3/5 = 192,5 \text{ m και}$$
$$y = 160 \times 2 \times \sin 53^\circ - \frac{1}{2} 9,81 \times 2^2 = 235,9 \text{ m.}$$



Ένα σώμα βάλλεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 160 \text{ m/s}$ σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta_0 = 53^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο.

(α) Βρείτε την θέση, το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος μετά από $t = 2 \text{ s}$. (β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος της βολής και σε ποια χρονική στιγμή φτάνει το σώμα σε αυτό το ύψος. (γ) Ποιο είναι το βεληνεκές της τροχιάς;

Για τις συνιστώσες της ταχύτητας έχουμε :

$$v_x = v_0 \cos\theta = 96,3 \text{ m/s}, \quad v_y = v_0 \sin\theta - gt = 128,78 - 9,81 \times 2 = 109,16 \text{ m/s}.$$

$$\text{Το μέτρο της ταχύτητας είναι } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{96^2 + 109,16^2} = 145,57 \text{ m/s}.$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο

$$\text{τέτοια ώστε : } \tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{109,16}{96,3} = 1,133 \Rightarrow \varphi = 48,6^\circ.$$

Ένα σώμα βάλλεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0 = 160 \text{ m/s}$ σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\theta_0 = 53^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο.

(α) Βρείτε την θέση, το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος μετά από $t = 2 \text{ s}$. (β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος της βολής και σε ποια χρονική στιγμή φτάνει το σώμα σε αυτό το ύψος. (γ) Ποιο είναι το βεληνεκές της τροχιάς;

ΛΥΣΗ: (β) Στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς έχουμε $v_y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_0 \sin \theta - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{160 \times \sin 53^\circ}{9,81} = 13,02 \text{ s.}$$

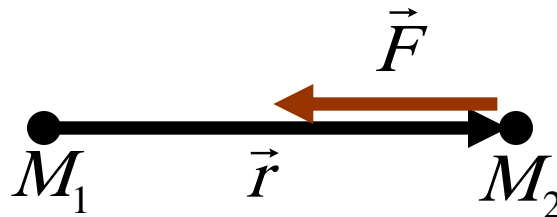
$$\text{Το μέγιστο ύψος είναι } h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = 832,2 \text{ m.}$$

$$\text{(γ) Για το βεληνεκές } R \text{ έχουμε } R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{160^2 \sin(2 \times 53^\circ)}{9,81} = 2508,5 \text{ m.}$$

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ

Η βαρυτική δύναμη που ασκεί μία μάζα M_1 σε μία άλλη μάζα M_2 δίνεται από την σχέση :

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{r},$$



όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο μαζών και \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα μεταξύ των δύο σωμάτων.

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$

Πως καταλήγουμε στην σχέση για την επιτάχυνση της βαρύτητας πάνω στην Γη;

$$F = G \frac{mM_{\Gamma}}{r^2} = \frac{GmM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \frac{R_{\Gamma}^2}{r^2} = mg \left(\frac{R_{\Gamma}}{r} \right)^2,$$

$$\text{όπου } g = \frac{GmM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2}$$

$$\text{όπου } r = R_{\Gamma} + h \text{ και } \frac{R_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h} = 1 - \frac{h}{R_{\Gamma}} + \left(\frac{h}{R_{\Gamma}} \right)^2 \dots$$

$$\text{Τελικά : } F = mg(1 - 2h/R_{\Gamma} + \dots)$$

Για ύψη h πολύ μικρότερα από $R_{\Gamma} = 6380 \text{ Km}$ έχουμε $F \approx mg$

ΔΟΥΦΟΡΟΣ ΣΕ ΚΥΚΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ

Σε ποιο υψόμετρο πρέπει να βρίσκεται η τροχιά ενός δορυφόρου ούτως ώστε ένας παρατηρητής πάνω στην Γη να τον βλέπει ακίνητο;

Στον δορυφόρο ασκείται η βαρυτική έλξη από την Γη, η οποία δρα ως κεντρομόλος για την περιστροφή.

$$G \frac{M_{\Delta} M_{\Gamma}}{r^2} = M_{\Delta} \omega^2 r \Rightarrow r^3 = \frac{GM_{\Gamma}}{\omega^2} = \frac{GM_{\Gamma} T^2}{(2\pi)^2}$$

$$\text{Είναι } \omega_{\Gamma} = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ hours}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{86400 \text{ sec}} = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$$

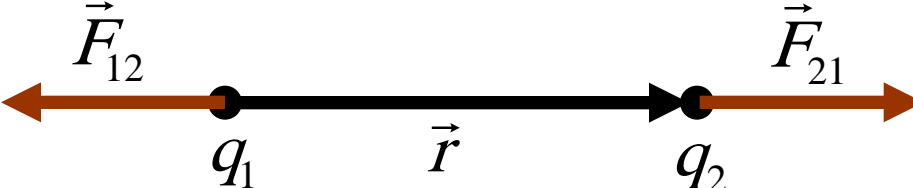
$$\text{και } M_{\Gamma} = 5,98 \times 10^{24} \text{ Kg}$$

$$\text{Οπότε } r = 4,2 \times 10^7 \text{ m} = 42000 \text{ Km.}$$

ΔΥΝΑΜΗ COULOMB

Έστω δύο ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2 .

Η δύναμη \vec{F}_{21} που ασκεί το φορτίο q_1 στο q_2 δίνεται από την σχέση :

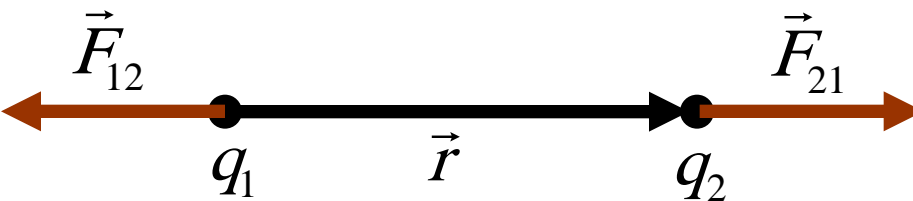
$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1),$$


The diagram illustrates two point charges, q_1 and q_2 , positioned on a horizontal line. A vector \vec{r} is drawn from q_1 to q_2 . Two force vectors are shown: \vec{F}_{12} is a red arrow pointing from q_2 towards q_1 , and \vec{F}_{21} is a red arrow pointing from q_1 towards q_2 .

ενώ για την δύναμη \vec{F}_{12} που ασκείται στο φορτίο q_1 από το q_2

$$\text{έχουμε } \vec{F}_{12} = -\frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.$$

Απωστική δύναμη για ομώνυμα φορτία, ελκτική για ετερόνυμα.

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1),$$


The diagram illustrates two point charges, q_1 and q_2 , positioned on a horizontal line. A vector \vec{r} is drawn from q_1 to q_2 . Two force vectors are shown: \vec{F}_{12} is a red arrow pointing from q_2 towards q_1 , and \vec{F}_{21} is a red arrow pointing from q_1 towards q_2 .

Η δύναμη έχει την μορφή της εξίσωσης (1) στο σύστημα Gauss με μονάδα μέτρησης φορτίου την ηλεκτροστατική μονάδα esu.

Στο πρότυπο σύστημα μονάδων SI (System International) η μονάδα φορτίου είναι το Coulomb (C) ορίζεται μέσω της μονάδας μέτρησης ηλεκτρικού ρεύματος Ampere (A).

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \times 1 \text{ sec}$$

Στο SI η (1) παίρνει την μορφή:
$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (2),$$

ϵ_0 είναι η επιτρεπτότητα (permittivity) του κενού.

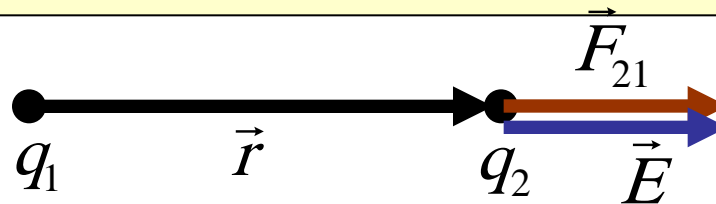
Το φορτίο του πρωτονίου (και του ηλεκτρονίου) είναι το μικρότερο (ελεύθερο) φορτίο στην φύση.

Το θεμελιώδες αυτό φορτίο e είναι ίσο με $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο q_2 είναι $\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = q_2 \vec{E}$,

όπου \vec{E} είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το φορτίο q_1 στο σημείο που βρίσκεται το φορτίο q_2 .

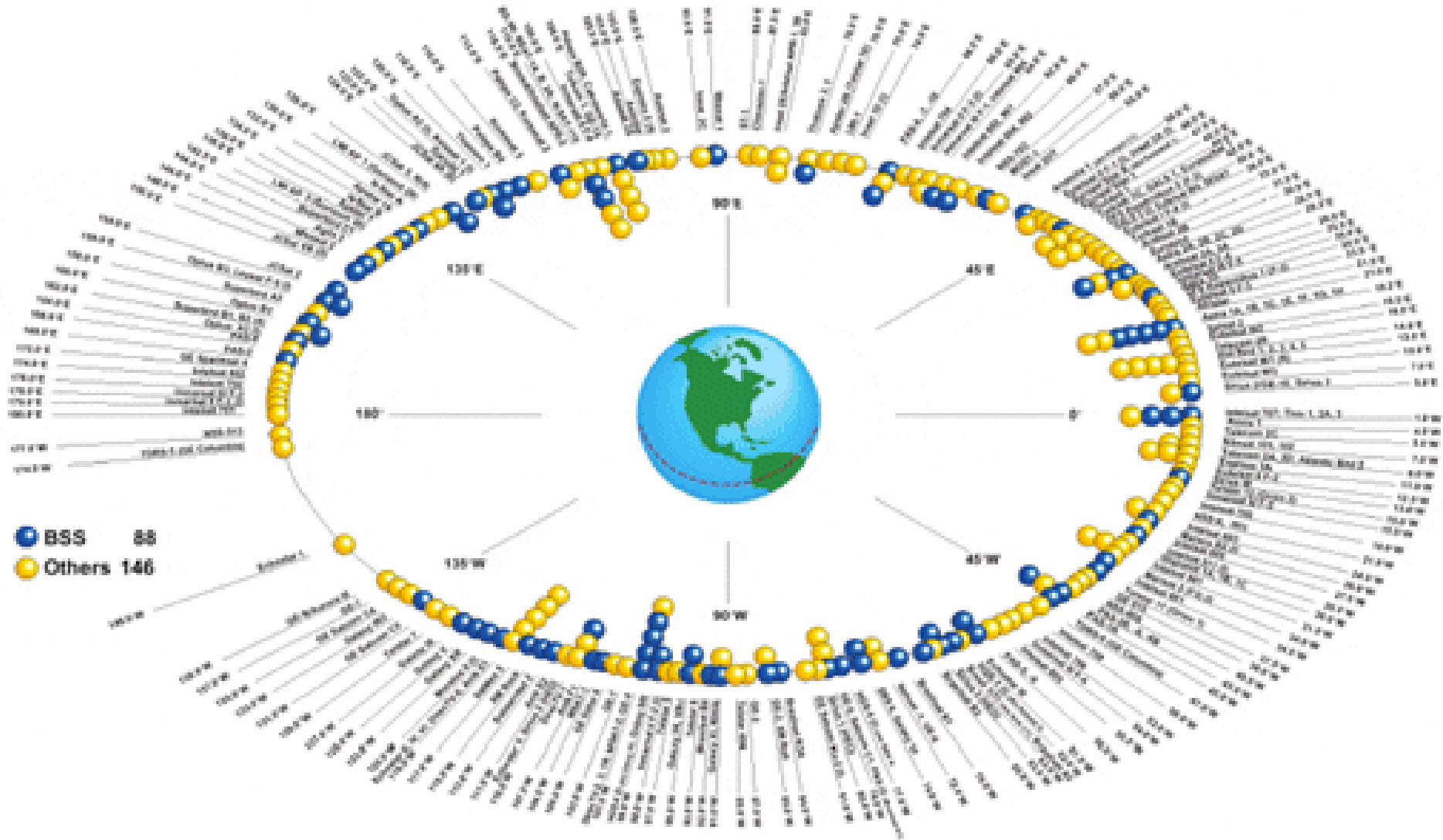


Το πεδίο είναι θεμελιώδης έννοια της σύγχρονης φυσικής, ιδιαίτερα χρήσιμη για την περιγραφή αλληλεπιδράσεων από πολλά σωματίδια.

ΓΕΩΣΤΑΤΙΚΟΙ ΔΟΡΥΦΟΡΟΙ ΣΕ ΤΡΟΧΙΑ

Figure 3: Geostationary Satellites by Orbital Location

Commercial Communications Satellites Geosynchronous Orbit



Έστω μαγνητικό πεδίο έντασης \vec{B} και φορτίο q που κινείται με ταχύτητα \vec{v} . Τότε η δύναμη που ασκείται q στο είναι :

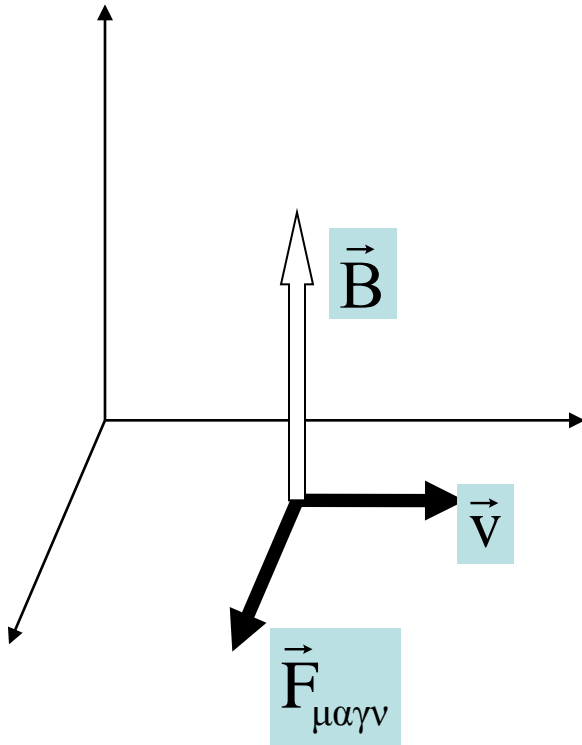
$$\vec{F}_{\text{μαγν}} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Μονάδα για το \vec{B} : 1 Tesla (T) = N sec m⁻¹C⁻¹.

Οι μαγνητικές δυνάμεις είναι γένει πολύ πιο ασθενείς από τις ηλεκτροστατικές.

Π.χ., ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με το 1/10 της ταχύτητας του φωτός σε μαγνητικό πεδίο $B = 1$ T δέχεται δύναμη

$$F_{\text{μαγν}} = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3 \times 10^7 \text{ m/sec})(1,0 \text{ T}) = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$



ΔΥΝΑΜΗ LORENTZ

Έστω ότι σε ένα μέρος του χώρου συνυπάρχουν και ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} και μαγνητικό πεδίο \vec{B} .

Τότε η συνολική δύναμη που ασκείται σε φορτίο q το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{v} είναι

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Η δύναμη αυτή ονομάζεται δύναμη Lorentz.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση κίνησης για ένα σώμα που κινείται μέσα σε ομογενές πεδίο έντασης \vec{E} (δηλαδή το πεδίο έχει σταθερή ένταση σε όλο το μέρος του χώρου που μας ενδιαφέρει).

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E}.$$

Επειδή το πεδίο είναι σταθερό η εξίσωση κίνησης είναι όμοια με αυτήν σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο. Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

την εξίσωση για την ταχύτητα $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$.

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά βρίσκουμε την εξίσωση για την

$$\text{θέση : } \vec{r} = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0.$$

Πρωτόνιο που ξεκινά από την ηρεμία επιταχύνεται από ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E_x = 30000\text{V/m}$ (30 kV/m). Αν η επιτάχυνση διαρκεί ένα νανοδευτερόλεπτο ($\text{ns} = 10^{-9}\text{ sec}$), ποια είναι η τελική ταχύτητα του πρωτονίου;

Όπως είδαμε παραπάνω, η ταχύτητα δίνεται από τον τύπο

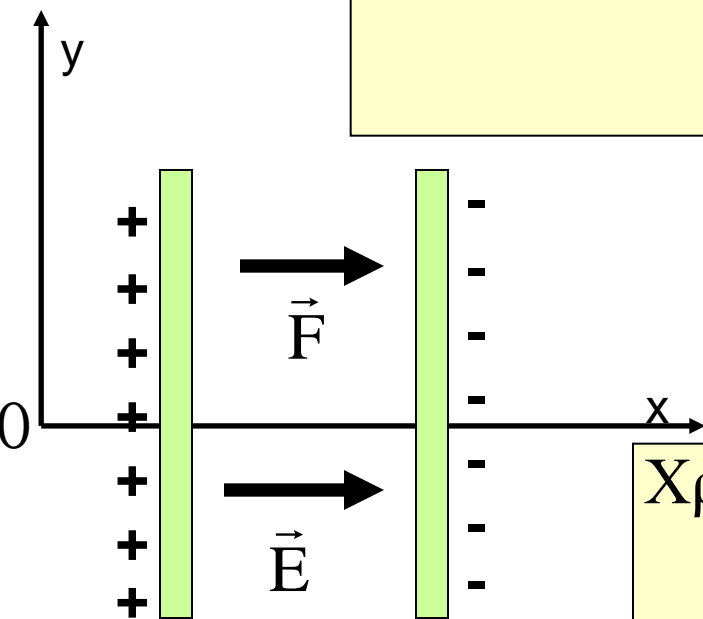
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{q\vec{E}}{M} t + \vec{v}_0.$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε έχουμε

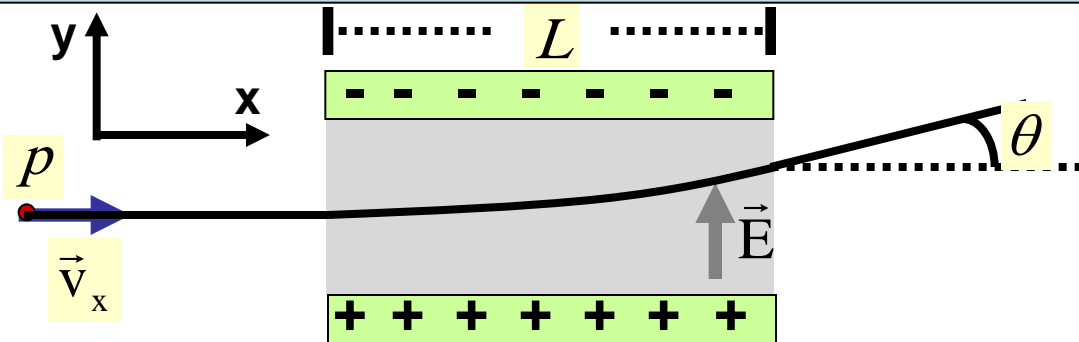
$$v_x(t) = \frac{e}{M_p} E_x t, v_y = v_z = 0.$$

Χρησιμοποιώντας αριθμητικές τιμές βρίσκουμε

$$v_x = \frac{(1,6 \times 10^{-19}\text{ C})(30\text{ kV/m})(10^{-9}\text{ s})}{2 \times 10^{-27}\text{ Kg}} = 2,4\text{ km/s}$$



Πρωτόνιο κινείται με ταχύτητα 10^7 m/s παράλληλα προς φορτισμένες μεταλλικές πλάκες μήκους $L = 0,01$ m που δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο 3kV/m . Το πρωτόνιο εισέρχεται στον χώρο μεταξύ των πλακών και μετά από χρόνο τ εξέρχεται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με την αρχική του κατεύθυνση. Βρείτε την γωνία εκτροπής θ .



Η κίνηση είναι όμοια αυτής της βολής στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης.

Ο χρόνος τ που χρειάζεται το πρωτόνιο να διασχίσει το μήκος L των πλακών

$$\text{είναι } v_x = L/\tau \Rightarrow \tau = L/v_x = 0,01\text{m}/10^7 \text{ m/s} = 10^{-9} \text{ s} = 1\text{ns}.$$

Για την ταχύτητα που έχει το πρωτόνιο όταν εξέρχεται από τις πλάκες έχουμε :

$$v_y = eE_y \tau/m = 4,8 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

$$\text{Για την γωνία } \theta \text{ έχουμε : } \tan \theta = v_y/v_x \Rightarrow \theta \approx \tan^{-1} 0,05 \approx 0,05.$$

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ 6

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κίνηση σώματος με μάζα M και φορτίο q σε χώρο όπου υπάρχει ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{z}$.

Τότε από την έκφραση για την δύναμη Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ βρίσκουμε $\dot{v}_x = qv_y B/M, \dot{v}_y = -qv_x B/M, \dot{v}_z = 0$ (1).

$$\left[\left(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} \right) \times B \hat{z} = -v_x \hat{y} + v_y \hat{x} \right].$$

Έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων.

Δοκιμάζουμε την λύση :

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega t, v_y(t) = v_1 \cos \omega t, v_z = \text{σταθερά} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στις (1) βρίσκουμε

$$\omega v_1 \cos \omega t = \frac{qB}{M} v_1 \cos \omega t, -\omega v_1 \sin \omega t = -\frac{qB}{M} v_1 \sin \omega t.$$

Επομένως, για να είναι η (2) λύση του συστήματος (1) πρέπει $\omega = \frac{qB}{M}$.

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ 7

Η προβολή της κίνησης του σώματος στο επίπεδο *xy* είναι ένας κύκλος.

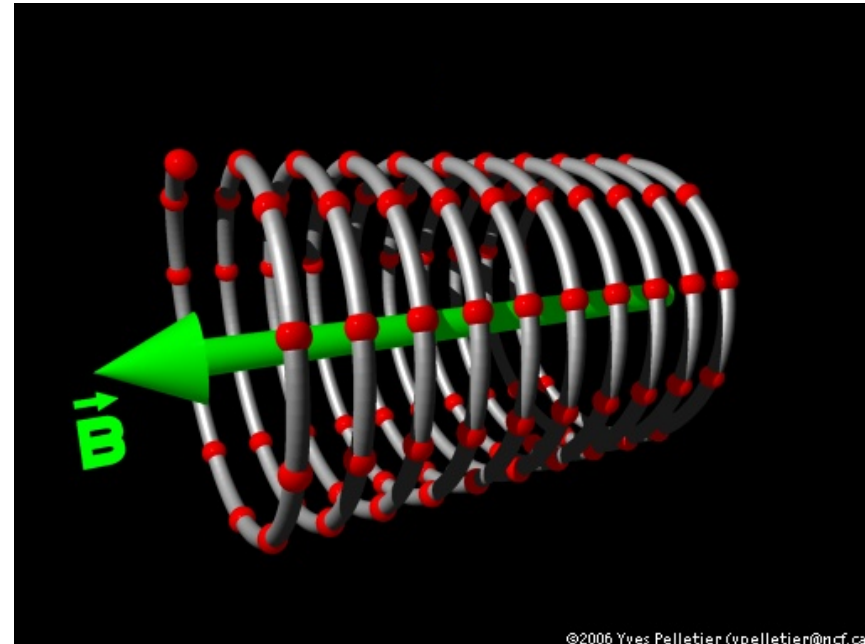
Η μαγνητική δύναμη ενεργεί ως κεντρομόλος ($qBv_1 = M\omega_c^2 r$) όπου

$r = Mv_1/qB$ είναι η ακτίνα του κύκλου

και $\omega_c = \frac{qB}{M}$ η *κυκλοτρονική συχνότητα*.

Η συνολική κίνηση του σώματος είναι ένας συνδυασμός της κυκλικής περιστροφής στο επίπεδο *x-y* και της ελεύθερης κίνησης κατά τον άξονα *z*.

Σπειροειδής κίνηση.



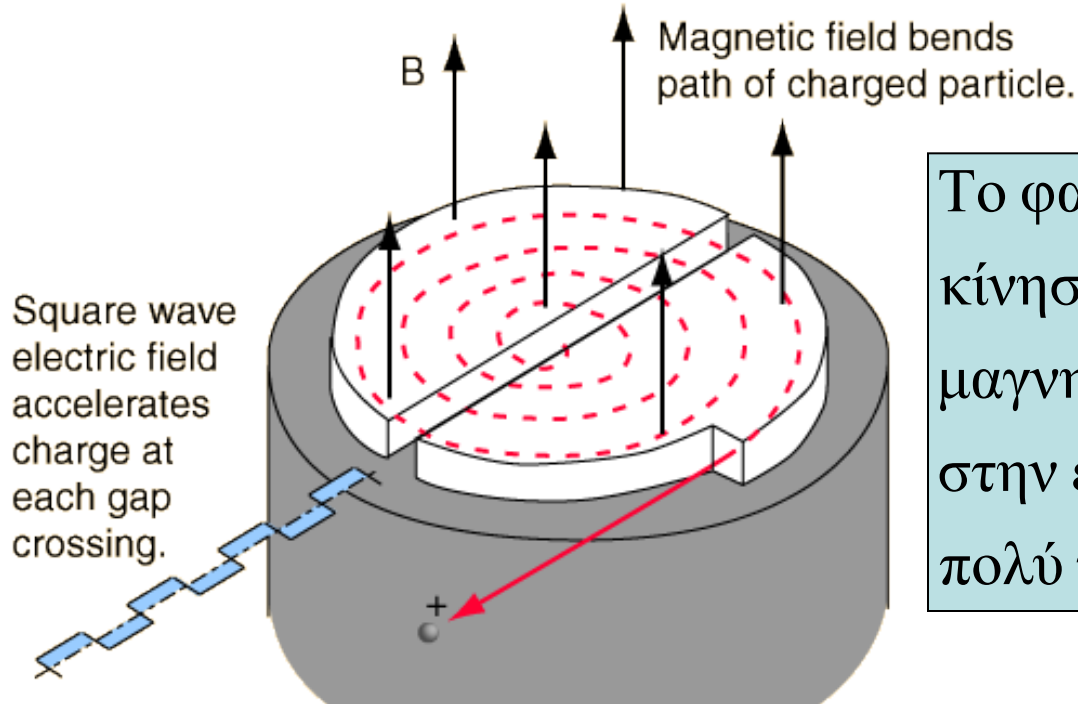
©2006 Yves Pelletier (ypelletier@mcf.ca)

Ποια είναι η κυκλοτρονική συχνότητα ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο 1 T;

$$\text{Είναι } \omega_c = \frac{eB}{m_e} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1,0 \text{ T})}{(0,91 \times 10^{-30} \text{ kg})} \approx 1,6 \times 10^{11} \text{ rad/s}$$

Για την συχνότητα ν_c έχουμε $\nu_c = \omega_c / 2\pi \approx 3 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

Η κυκλοτρονική συχνότητα ενός πρωτονίου είναι 1836 μικρότερη λόγω της σχετικής διαφοράς μάζας ηλεκτρονίου - πρωτονίου.



Το φαινόμενο της περιστροφικής κίνησης φορτίων μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο βρίσκει εφαρμογή στην επιτάχυνση σωματιδίων σε πολύ υψηλές ταχύτητες.

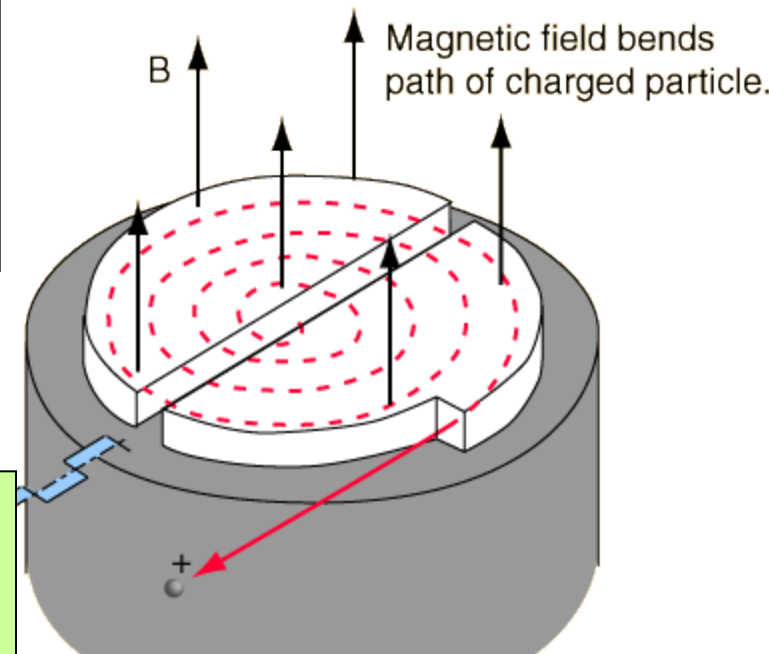
Κάθε φορά που το σωματίδιο φθάνει στο άνοιγμα επιταχύνεται από ένα εναλλασσόμενο ρεύμα που έχει συχνότητα ίση με την κυκλοτρονική συχνότητα του σωματιδίου.

Η ακτίνα όμως σχετίζεται με την ταχύτητα

$$r_c = \frac{v}{\omega_c},$$

άρα με την αύξηση της ταχύτητας έχουμε και αύξηση της ακτίνας περιστροφής.

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μπορούμε να "υποχρεώσουμε" το σωματίδιο να αυξήσει σταδιακά την ταχύτητά του και τελικά να φτάσει σε πολύ υψηλές ενέργειες.



Π.χ. για πρωτόνιο σε κύκλοτρο ακτίνας $r_c = 0,5\text{m}$ έχουμε $v = \omega_c r_c \approx 5 \times 10^7 \text{ m/s}$ και

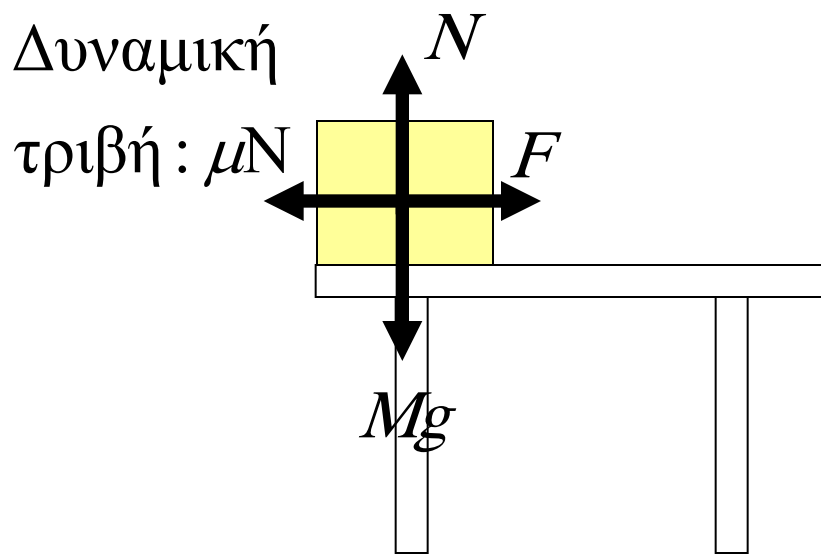
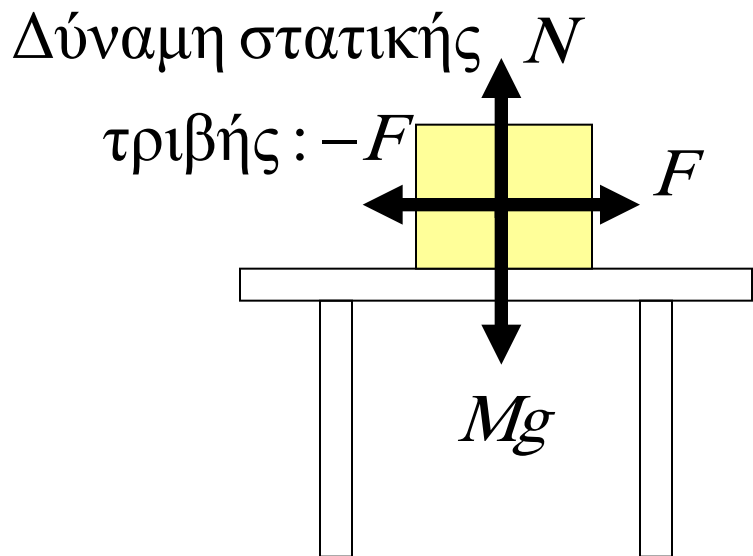
$$E = \frac{1}{2} M_p v^2 = (10^{-27} \text{ kg})(5 \times 10^7 \text{ m/s})^2 = 2,5 \times 10^{-12} \text{ J} \approx 15 \text{ MeV}$$

Οι σύνθετες δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο επιφανειών παρουσιάζονται μακροσκοπικά ως αυτό που ονομάζουμε *τριβή*.

Η τριβή δρα ως αντίσταση στην έναρξη ή διατήρηση της κίνησης.

Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για *στατική τριβή* που εμποδίζει την μετακίνηση σώματος που ηρεμεί πάνω σε κάποια επιφάνεια.

Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε την *δυναμική τριβή*.



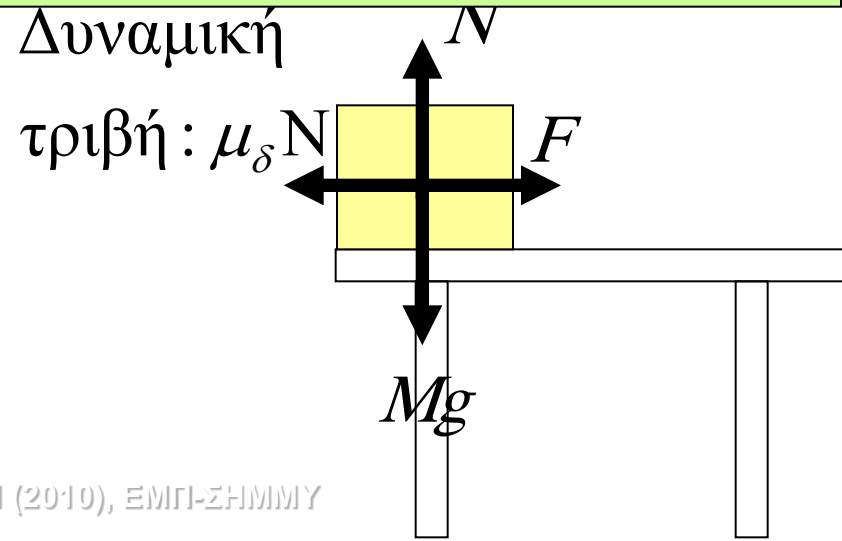
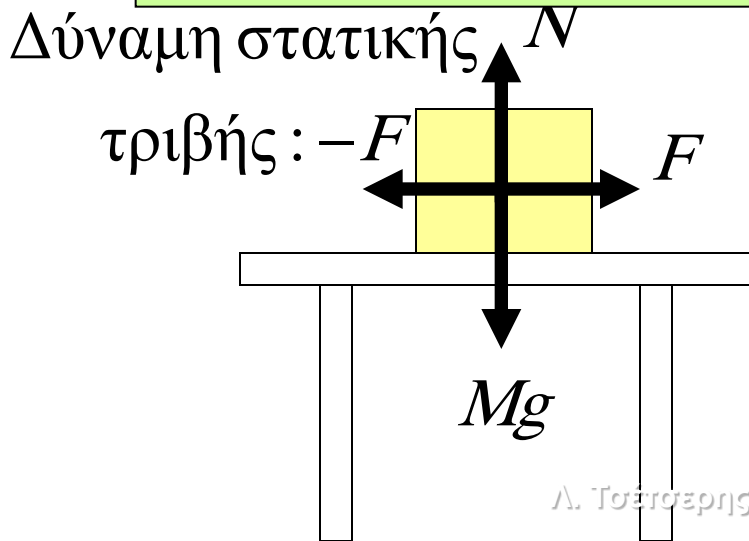
Όταν εφαρμόζουμε μια μικρή δύναμη στο σώμα του σχήματος, τότε αναπτύσσεται μια ίση και αντίθετη δύναμη τριβής ($F_{\tau\rho}$) που δεν επιτρέπει στο σώμα να κινηθεί.

Καθώς μεγαλώνει η εφαρμοζόμενη δύναμη, μεγαλώνει και η $F_{\tau\rho}$.

μέχρι μια μέγιστη τιμή $F_{\max} = \mu_{\sigma\tau} N$,
όπου $\mu_{\sigma\tau}$ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής.

Για $F > F_{\max}$ το σώμα αρχίζει να κινείται.

Κατόπιν $F_{\tau\rho} = F_{\delta} = \mu_{\delta} N$, όπου μ_{δ} ο συντελεστής δυναμικής τριβής.



ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΤΡΙΒΗΣ

Έστω σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ τέτοιας ώστε το σώμα μόλις να αρχίζει να ολισθαίνει.

Η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι υπάρχει *ισορροπία* μεταξύ των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα :

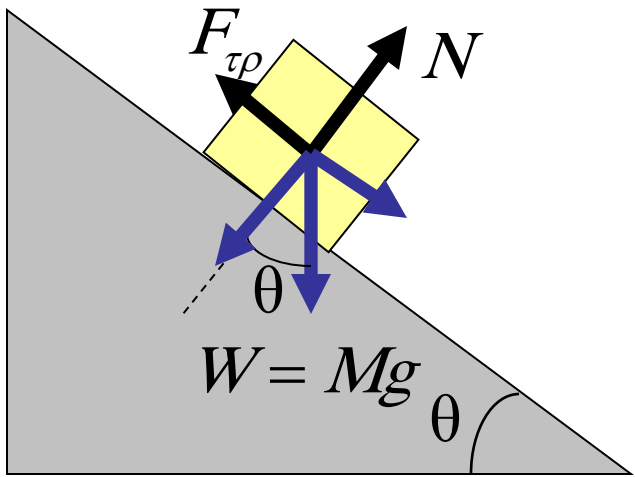
$$\vec{W} + \vec{N} + \vec{F}_{\tau\rho} = 0$$

Αναλύοντας τις δυνάμεις κατά τις διευθύνσεις των \vec{N} και $\vec{F}_{\tau\rho}$

βρίσκουμε $N = Mg \cos \theta$ και $F_{\tau\rho} = Mg \sin \theta$.

Είναι όμως $F_{\tau\rho} = \mu_{\sigma\tau} N$.

$$\text{Άρα: } \mu_{\sigma\tau} N = Mg \sin \theta \Rightarrow \mu_{\sigma\tau} = \tan \theta.$$

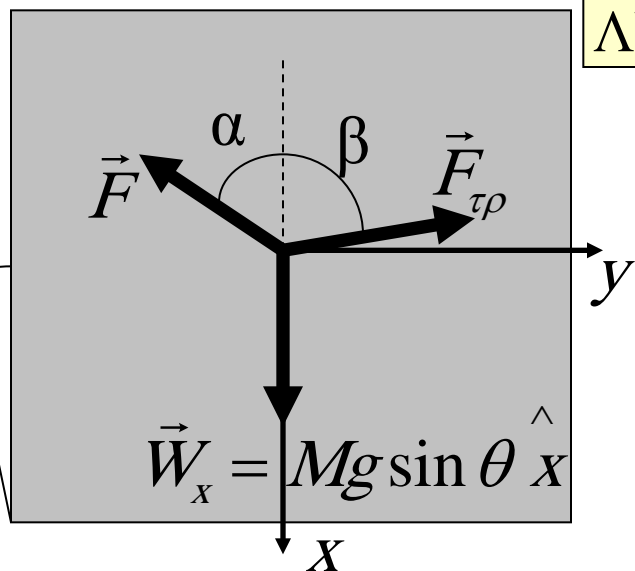


Υλικά	$\mu_{\sigma\tau}$
Γυαλί σε γυαλί	0,9 – 1,0
Πάγος σε πάγο	0,05 – 0,15
Λάστιχο σε στερεό	1 – 4

Έστω σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ τέτοιας ώστε $\mu > \tan\theta$.

Στο σώμα ασκείται μία δύναμη \vec{F} παράλληλη στο επίπεδο και σε γωνία α με το επίπεδο που σχηματίζουν η \vec{N} και το βάρος \vec{W} .

Ποιο το μέτρο της \vec{F} αν το σώμα μόλις που αρχίζει να ολισθαίνει;



ΛΥΣΗ:

Ορίζουμε το σύστημα συντεταγμένων x - y πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ούτως ώστε ο άξονας x να βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν το βάρος \vec{W} και η κάθετη αντίδραση \vec{N} .

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις (Σημείωση: Γνωρίζουμε μόνο ότι η δύναμη τριβής είναι κάθετη στην \vec{N} , δηλαδή, δεν γνωρίζουμε από την αρχή την γωνία β).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ - ΛΥΣΗ

Αναλύουμε τις δυνάμεις κατά τους $x-y$

και χρησιμοποιούμε την συνθήκη ισορροπίας

Άξονας x : $Mg \sin \theta = F \cos \alpha + F_{\tau\rho} \cos \beta$

Αλλά: $F_{\tau\rho} = \mu Mg \cos \theta$

Οπότε $Mg \sin \theta - F \cos \alpha = \mu Mg \cos \theta \cos \beta$ (1)

Άξονας y : $F \sin \alpha = F_{\tau\rho} \sin \beta = \mu Mg \cos \theta \sin \beta$ (2)

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις (1) και (2) και προσθέτοντας απαλείφουμε την γωνία β .

Τελικά επιλύουμε ως προς F και βρίσκουμε :

$$F / Mg = \cos \alpha \sin \theta \pm \sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \theta + \mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$$

Επειδή $\mu > \tan \theta$, $\frac{F}{Mg} = \cos \alpha \sin \theta + \sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \theta + \mu^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

Μπορείτε να πάρετε μία συλλογή ασκήσεων με τίτλο «ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΜΗΧΑΝΙΚΗ» (Συγγραφείς: Θ. Αλεξόπουλος και Γ. Τσιπολίτης) από το γραφείο 202 του Κτιρίου Φυσικής (κ. Άλκηστη Δημακοπούλου)

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Υποβολή λύσεων για την 1^η Σειρά Ασκήσεων έως τις 22/10/2010.

Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευτεί ένα σώμα για να σταματήσει πάνω σε επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ αφού διανύσει απόσταση D ,

$$\text{Η εξίσωση κίνησης είναι : } M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu Mg \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu g$$

$$\frac{dx}{dt} = -\mu g t + v_0 \quad (1) \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \mu g t^2 + v_0 t + x_0 \quad (2).$$

Από την (1) βρίσκουμε τον χρόνο τ που χρειάζεται για να μηδενιστεί

$$\text{η ταχύτητα : } \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow -\mu g \tau + v_0 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{v_0}{\mu g} \quad (3).$$

Χρησιμοποιώντας το τ στην (2) και για $x - x_0 = D$ βρίσκουμε

$$D = -\frac{1}{2} \mu g \left(\frac{v_0}{\mu g} \right)^2 + v_0 \left(\frac{v_0}{\mu g} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 D \mu g}$$

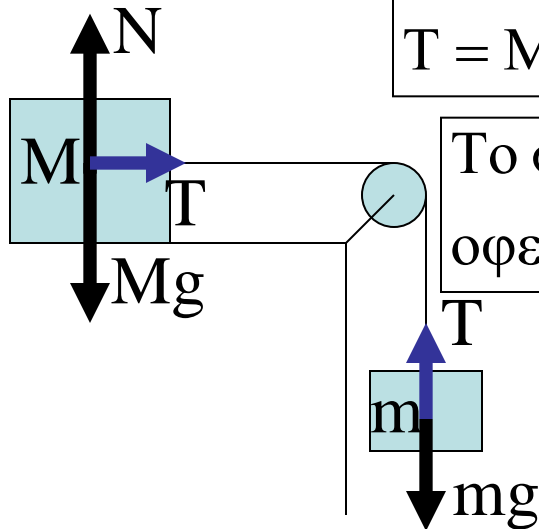
Έστω κύβος μάζας M πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Ο κύβος έλκεται από ένα σκοινί δεμένο σε ένα βάρος μάζας m το οποίο εξαρτιέται από μια τροχαλία. Υποθέτουμε ότι η τροχαλία δεν έχει μάζα, ούτε προκαλεί τριβές, παρά μόνο αλλάζει την διεύθυνση της τάσης του σκοινιού. Βρείτε την επιτάχυνση του συστήματος και την τάση του σκοινιού.

ΛΥΣΗ: Το σώμα M επιταχύνεται λόγω της τάσης T , άρα $T = Ma$, όπου a είναι η επιτάχυνση.

Το σώμα m επιταχύνεται και αυτό με επιτάχυνση a που οφείλεται στον συνδυασμό του βάρους και της τάσης:

$$mg - T = ma \Rightarrow mg - Ma = ma \Rightarrow a = \frac{m}{m + M} g.$$

$$\text{Οπότε για την τάση βρίσκουμε } T = \frac{mM}{m + M} g$$



Έστω ότι ο κύβος του προηγούμενου παραδείγματος βρίσκεται πάνω σε επιφάνεια με συντελεστή δυναμικής τριβής μ_δ . Βρείτε την επιτάχυνση του συστήματος.

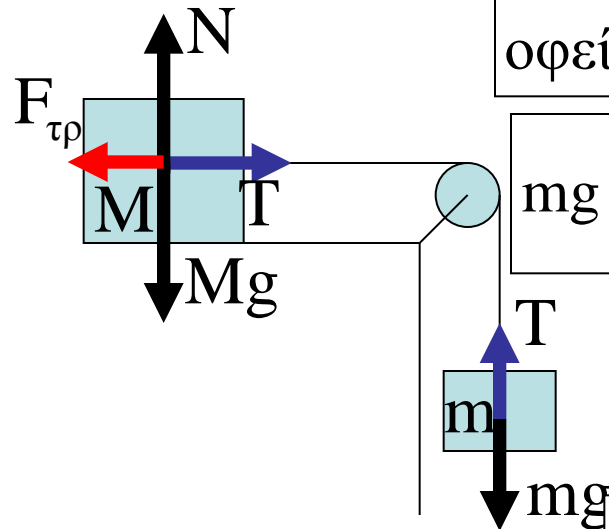
ΛΥΣΗ: Είναι τώρα $T - F_{\tau\rho} = Ma$, όπου $F_{\tau\rho} = \mu_\delta Mg$ η δύναμη τριβής.

Το σώμα m επιταχύνεται και αυτό με επιτάχυνση a που οφείλεται στον συνδυασμό του βάρους και της τάσης:

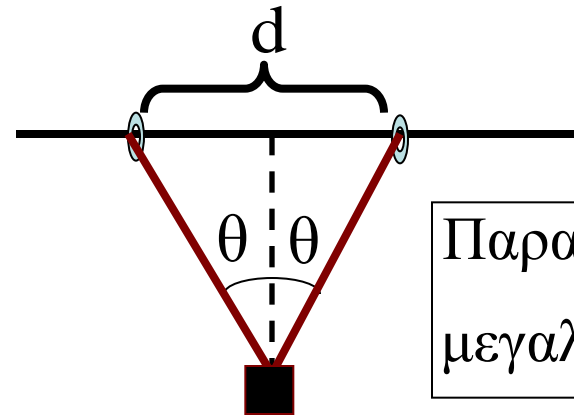
$$mg - T = ma \Rightarrow mg - Ma - \mu_\delta Mg = ma \Rightarrow a = \frac{m - \mu_\delta M}{m + M} g.$$

Επομένως, για να επιταχυνθεί η μάζα m προς τα κάτω πρέπει $m > \mu_\delta M$

Αν οι μάζες είναι αρχικά σε ηρεμία, για να ξεκινήσει κίνηση θα πρέπει $m > \mu_\sigma M$, όπου μ_σ ο συντελεστής στατικής τριβής.



Σώμα κρέμεται από το μέσο σχοινιού μήκους $L = 1 \text{ m}$ που είναι δεμένο στα δύο του άκρα σε δαχτυλίδια. Αν τα δαχτυλίδια είναι περασμένα σε οριζόντια δοκό με συντελεστή στατικής τριβής $\mu = 0,35$, ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση των δαχτυλιδιών ούτως ώστε το σώμα να ισορροπεί;



ΛΥΣΗ: Καταρχήν αναλύουμε τις δυνάμεις πάνω σε ένα από τα δαχτυλίδια.

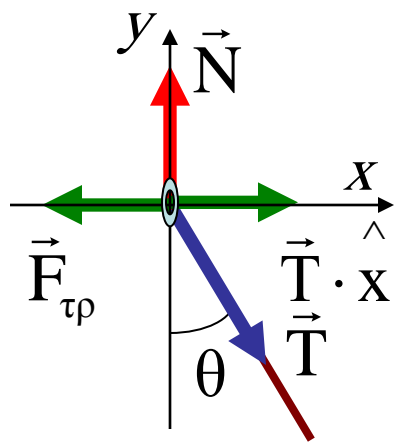
Παρατηρούμε ότι καθώς μεγαλώνει το θ , άρα και το d , μεγαλώνει η προβολή της \vec{T} πάνω στην δοκό, άρα και η $F_{\tau\rho}$.

Το μέγιστο d προκύπτει όταν η στατική τριβή γίνεται μέγιστη και ίση με μN .

$$T \cos \theta = N \text{ και } T \sin \theta = \mu N.$$

$$\text{Άρα } \tan \theta = \mu = 0,35 \Rightarrow \theta = 19,6^\circ.$$

$$\text{Από το σχήμα βρίσκουμε } d = 2 \frac{L}{2} \sin \theta = 2 \frac{1 \text{ m}}{2} \sin \theta = 0,33 \text{ m}$$



Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι: $\frac{dy}{dx} = H(x, y)$ (1).

Έστω ότι για την $H(x, y)$ έχουμε $H(x, y) = f(x)g(y)$.

Τότε από την (1) και τον ορισμό του διαφορικού $dy \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)dx$ βρίσκουμε:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x)dx \quad (2).$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη της (2) βρίσκουμε: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx$ (3).

Επομένως, αν γνωρίζουμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = G(y) + C_y \quad \text{και} \quad \int f(x)dx = F(x) + C_x$$

οι λύσεις της (1) προσδιορίζονται από την (αλγεβρική) σχέση $G(y) = F(x) + C$.

Παράδειγμα 1: Επιλύστε την διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = y$.

ΛΥΣΗ: Είναι $\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln y = x + C \Rightarrow y = Ae^x$,

όπου C μία σταθερά ολοκλήρωσης και $A = e^C$.

Παράδειγμα 2: Επιλύστε την διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = -yx$.

ΛΥΣΗ: Είναι $\frac{dy}{y} = -x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x dx \Rightarrow \ln y = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$,

Παράδειγμα 3: Βρείτε ποιο σχήμα ικανοποιεί την εξίσωση $x dx + y dy = 0$.

ΛΥΣΗ: Από την διαφορική εξίσωση βρίσκουμε με ολοκλήρωση

$$\int y dy = -\int x dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \quad (3),$$

όπου C και $R = \sqrt{2C}$ είναι σταθερές. Η (3) είναι η εξίσωση κύκλου ακτίνας R .

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΕΚΟΝΤΑΙ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ

Σώμα που κινείται μέσα σε υγρό ή αέριο δέχεται αντίσταση που αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητά του.

Οι αντιστάσεις αυτές είναι εν γένει περίπλοκες συναρτήσεις της ταχύτητας του σώματος, καθώς και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του.

Δύο απλές περιπτώσεις θεωρούν ότι η αντίσταση \vec{R} είναι

(α) ανάλογες της ταχύτητας ($\vec{R} = -b\vec{v}$),

(β) ανάλογες του τετραγώνου της ταχύτητας ($\vec{R} = -bv^2 \hat{v}$)

Παράδειγμα της περίπτωσης (α) είναι πτώση σωμάτων μέσα σε υγρό ή μικροί κόκκοι σκόνης στον αέρα.

Παράδειγμα (β) είναι η ελεύθερη πτώση ανθρώπου στον αέρα.

Έστω σφαίρα μάζας m που είναι αρχικά ακίνητη και αφήνεται ελεύθερη μέσα σε υγρό. Περιγράψτε την κίνηση της σφαίρας αν οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται πάνω της είναι το βάρος της και η δύναμη αντίστασης $\vec{R} = -b\vec{v}$.

ΛΥΣΗ: Η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στην σφαίρα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και μέτρο $F_{\text{tot}} = mg - bv$.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$ (1)

Η (1) είναι μια διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές.

Είναι: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \Rightarrow -\frac{m}{b} \frac{d\tilde{v}}{dt} = \tilde{v}$ (2), όπου $\tilde{v} \equiv g - \frac{b}{m}v$ (3)

Από την (2) βρίσκουμε $\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = -\frac{b}{m}dt \Rightarrow \int \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = \int -\frac{b}{m}dt$ (4)

Ολοκληρώνουμε την (4), αντικαθιστούμε από την (3) και βρίσκουμε μία σχέση $v = v(t)$.

Ολοκληρώνοντας ακόμη μια φορά βρίσκουμε την συνάρτηση του $y = y(t)$.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Σε ένα απομονωμένο σύστημα στο οποίο δρουν μόνο εσωτερικές δυνάμεις, η ολική ορμή διατηρείται σταθερή ως προς τον χρόνο.

Ο δεύτερος και τρίτος νόμος του Νεύτωνα έχουν ως συνέπεια την αρχή διατήρησης της ορμής αλληλεπιδρώντων σωμάτων :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{σταθερά.}$$

Εφαρμογή σε κρούσεις σωμάτων : $(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)_{\text{πριν}} = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)_{\text{μετά}}$.

ή γενικά για πολλά σώματα : $\left(\sum_i \vec{P}_i \right)_{\text{πριν}} = \left(\sum_j \vec{P}_j \right)_{\text{μετά}}$.

$$\text{Αλλιώς: } \left(\sum_i \vec{P}_i \right) = \left(\sum_j \vec{P}_j \right).$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κρούση δύο σωμάτων ίσης μάζας M με ένα από τα δύο σώματα αρχικά ακίνητο. (α) Αν τα δύο σώματα ενώνονται κατά την κρούση, ποια η ταχύτητα του νέου σώματος; (β) Αν υποθέσουμε ότι μετά την κρούση το πρώτο σώμα μένει ακίνητο, ποια θα είναι η ταχύτητα του δεύτερου σώματος;

ΛΥΣΗ: (α) Έστω ότι πριν την κρούση είναι $\vec{p}_1 = Mv_x \hat{x}$ και $\vec{p}_2 = 0$.

Τότε μετά την κρούση και λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 2M\vec{v}' = \vec{p}_1 = Mv_x \hat{x}.$$

όπου \vec{p}'_1, \vec{p}'_2 είναι οι ορμές μετά την κρούση και \vec{v}' η ταχύτητα μετά την κρούση

$$\text{Άρα: } \vec{v}' = \frac{v_x}{2} \hat{x}$$

(β) Σε αυτή την περίπτωση είναι: $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = M\vec{v}' = \vec{p}_1 = Mv_x \hat{x}$.

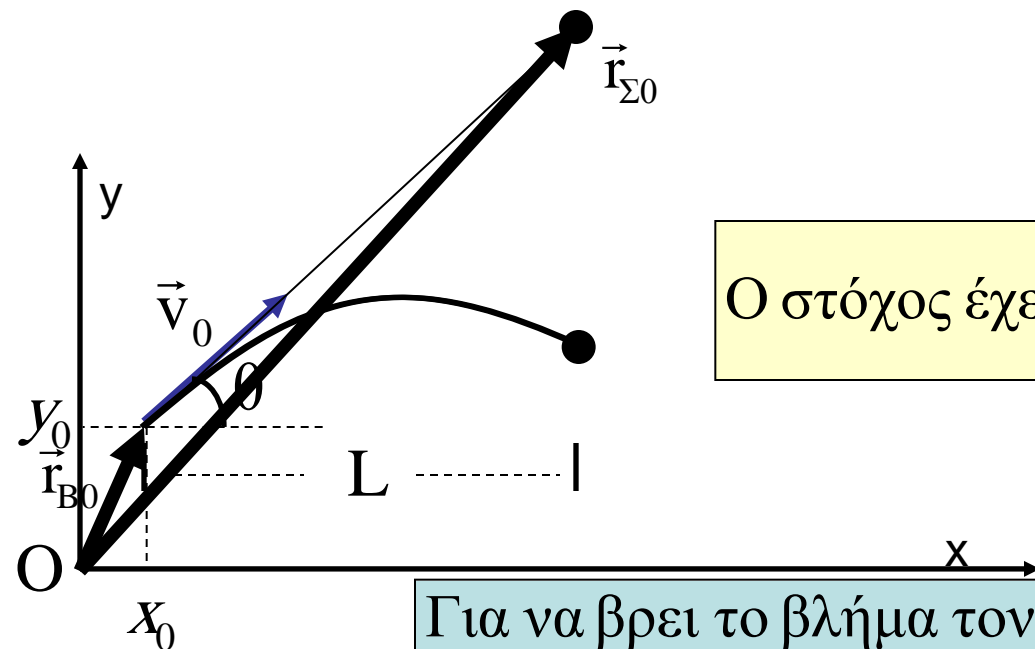
$$\text{Άρα: } \vec{v}' = v_x \hat{x}$$

Στοχεύουμε προς στόχο και βάλλουμε την στιγμή που ο στόχος αφήνεται να πέσει. Κάτω από ποιες συνθήκες βρίσκει το βλήμα τον στόχο;

ΛΥΣΗ: Το διάνυσμα θέσης του βλήματος υπακούει την εξίσωση:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{B0} + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}.$$

Ο στόχος έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}_\Sigma = \vec{r}_{\Sigma 0} - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}$.



Για να βρει το βλήμα τον στόχο πρέπει για κάποιο t να είναι

$$\vec{r}_B = \vec{r}_\Sigma \Leftrightarrow \vec{r}_{B0} + \vec{v}_0 t = \vec{r}_{\Sigma 0} \Leftrightarrow \vec{v}_0 t = \vec{r}_{\Sigma 0} - \vec{r}_{B0} \quad (1).$$

Η (1) ισχύει για κάθε v_0 αρκεί το βεληνεκές της τροχιάς να είναι μεγαλύτερο από την οριζόντια απόσταση L.

Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακόρυφα λόγω της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας, η ακτίνα αυξάνει με ρυθμό $dr/dt = \lambda r$, όπου λ μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι r_0 και η αρχική της μάζα m_0 . (α) Βρείτε την μάζα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t . (β) Βρείτε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t . (γ) Δείξτε ότι η ταχύτητα της σταγόνας τείνει προς μια οριακή τιμή καθώς $t \rightarrow \infty$.

$$\text{ΛΥΣΗ: (α) Είναι } \frac{dr}{dt} = \lambda r \Rightarrow \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \int_{t_0=0}^t \lambda \Rightarrow \ln r - \ln r_0 = \lambda t \Rightarrow r = r_0 e^{\lambda t}$$

Αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα της σταγόνας δεν αλλάζει καθώς η σταγόνα μεγαλώνει, τότε σε δεδομένη χρονική στιγμή t η σταγόνα έχει μάζα $m = \rho V$, όπου ρ η πυκνότητα και V ο όγκος της σταγόνας.

$$\text{Είναι όμως } V = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ και άρα } m = \frac{4\pi \rho r^3}{3} = \frac{4\pi \rho (r_0 e^{\lambda t})^3}{3} = \frac{4\pi \rho r_0^3}{3} e^{3\lambda t} = m_0 e^{3\lambda t}$$

Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακόρυφα λόγω της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας, η ακτίνα αυξάνει με ρυθμό $dr/dt = \lambda r$, όπου λ μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι r_0 και η αρχική της μάζα m_0 . (α) Βρείτε την μάζα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t .

(β) Βρείτε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t .

(γ) Δείξτε ότι η ταχύτητα της σταγόνας τείνει προς μια οριακή τιμή καθώς $t \rightarrow \infty$.

$$\text{Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε : } F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (1)$$

Είναι όμως $F = mg$ και $m = m_0 e^{3\lambda t}$. Άρα η (1) δίνει

$$m_0 e^{3\lambda t} \frac{dv}{dt} + 3\lambda v m_0 e^{3\lambda t} = m_0 g e^{3\lambda t} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - 3\lambda v \quad (2)$$

$$\text{Ολοκληρώνοντας την (2) βρίσκουμε } v = \frac{g}{3\lambda} (1 - e^{-3\lambda t})$$

$$\text{Είναι } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-3\lambda t} = 0$$

$$\text{άρα } v_{\infty} = \frac{g}{3\lambda}$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε : $F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$ (1)

$$m_0 e^{3\lambda t} \frac{dv}{dt} + 3\lambda v m_0 e^{3\lambda t} = m_0 g e^{3\lambda t} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - 3\lambda v$$
 (2)

Από την (2) μπορούμε να εξάγουμε τα χαρακτηριστικά της κίνησης ως εξής : Πρώτον, βλέπουμε ότι η μεταβολή της μάζας έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση του όρου $-3\lambda v$, δηλαδή μιας φαινομενικής "αντίστασης" που είναι ανάλογη της ταχύτητας. Στην αρχή της κίνησης το v είναι μικρό, και άρα από την (2) η σταγόνα επιταχύνεται με επιτάχυνση που είναι κατά προσέγγιση g . Καθώς το v μεγαλώνει η φαινομενική αντίσταση μεγαλώνει, έως ότου ο όρος $-3\lambda v$ "ακυρώσει" την επιτάχυνση g . Από εκεί και πέρα, το v δεν μπορεί να συνεχίσει να μεγαλώνει γιατί αν συνέβαινε αυτό θα είχαμε το άτοπο η (2) να αντιστοιχεί σε επιβραδυνόμενη κίνηση, ενώ το v αυξάνεται). Για αυτόν τον λόγο η σταγόνα θα κινείται ασυμπτωτικά (δηλαδή για μεγάλο t) με σταθερή ταχύτητα.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

Μπορείτε να πάρετε μία συλλογή ασκήσεων με τίτλο «ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΜΗΧΑΝΙΚΗ» (Συγγραφείς: Θ. Αλεξόπουλος και Γ. Τσιπολίτης) από το γραφείο 202 του Κτιρίου Φυσικής (κ. Άλκηστη Δημακοπούλου)

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Υποβολή λύσεων για την 1^η Σειρά Ασκήσεων έως τις 22/10/2010.

Σε περίπτωση που δεν πραγματοποιηθεί το μάθημα της Παρασκευής (22/10/2010), η παραπάνω προθεσμία θα αλλάξει για την Τρίτη 26/10/2010.

Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται με ταχύτητα \vec{v} μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_1 \hat{x} + E_2 \hat{y}$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{x}$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για τις συνιστώσες της ταχύτητας και δείξτε ότι

$$v_z = -\frac{E_2}{B} + A \sin(\omega t + \theta), \text{ όπου } A, \theta \text{ σταθερές και } \omega = \omega_c = \frac{qB}{m}.$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ (1)

Στην περίπτωση αυτή $\vec{v} \times \vec{B} = \left(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \right) \times \left(B \hat{x} \right) = B \left(v_z \hat{y} - v_y \hat{z} \right)$

Επομένως η (1) γράφεται ως $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left(E_1 \hat{x} + E_2 \hat{y} \right) + \omega \left(v_z \hat{y} - v_y \hat{z} \right)$ (2)

Άρα: $\frac{dv_x}{dt} = \frac{qE_1}{m}$ (3),

$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qE_2}{m} + \omega v_z$ (4),

$\frac{dv_z}{dt} = -\omega v_y$ (5)

Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται με ταχύτητα \vec{v} μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_1 \hat{x} + E_2 \hat{y}$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{x}$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για τις συνιστώσες της ταχύτητας και δείξτε ότι

$$v_z = f(t) = -\frac{E_2}{B} + A \sin(\omega t + \theta), \text{ όπου } A, \theta \text{ σταθερές και } \omega = \omega_c = \frac{qB}{m}.$$

$$\text{Όποτε: } \frac{dv_x}{dt} = \frac{qE_1}{m} \quad (3),$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qE_2}{m} + \omega v_z \quad (4),$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\omega v_y \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας τις (4) και (5) βρίσκουμε $\frac{d^2 v_z}{dt^2} = -\omega \frac{dv_y}{dt} = -\omega \left(\frac{qE_2}{m} + \omega v_z \right)$

$$\text{ή αλλιώς } \frac{d^2 v_z}{dt^2} + \omega^2 v_z = -\omega \frac{qE_2}{m} \quad (5)$$

Με αντικατάσταση μπορούμε να δείξουμε ότι η $f(t)$ ικανοποιεί την (5).

Θεωρούμε ότι ένα σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό αν ισχύουν για μετρήσεις μέσα σε αυτό ο πρώτος και δεύτερος νόμος του Νεύτωνα.

Αν σε ένα σύστημα αναφοράς ένα σώμα το οποίο είναι ελεύθερο (δηλαδή δεν ασκούνται πάνω σε αυτό δυνάμεις) εκτελεί μη ομαλή κίνηση τότε το σύστημα αναφοράς είναι μη αδρανειακό.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σώματος πάνω στον

ισημερινό λόγω της περιστροφής της Γης είναι : $a = \frac{v^2}{R_\Gamma} = \omega^2 R_\Gamma$

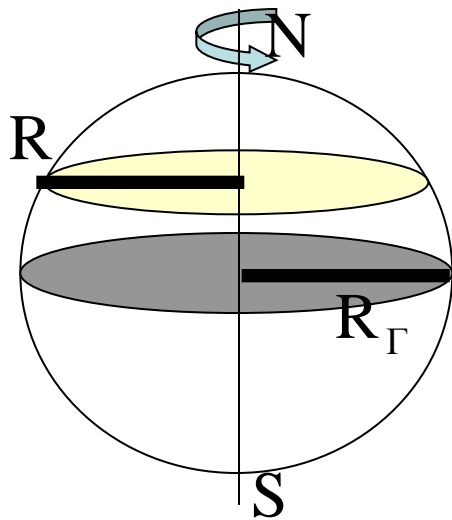
και χρησιμοποιώντας αριθμητικές τιμές βρίσκουμε
 $a = (0,73 \times 10^{-4}) (6,4 \times 10^6) = 0,034 \text{ m/s}^2$.

Δηλαδή, η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι πολύ μικρότερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για αυτόν τον λόγο, η επιφάνεια της Γης είναι με καλή προσέγγιση ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Ο παρατηρητής που μετέχει της περιστροφικής κίνησης της Γης "αισθάνεται" μια φυγόκεντρη δύναμη $m \times 0,034 \text{ m/s}^2$,

ή αλλιώς, το φαινόμενο βάρος του είναι λίγο μικρότερο από mM_{Γ}/R_{Γ}^2 .



Είναι $R < R_{\Gamma}$ και άρα
η φυγόκεντρος $m\omega^2 R < m\omega^2 R_{\Gamma}$

Επειδή η ακτίνα περιστροφής ελαττώνεται με το γεωγραφικό πλάτος,

η επιτάχυνση της βαρύτητας αυξάνεται καθώς μετακινούμαστε από τον ισημερινό προς τον Βόρειο Πόλο.

Η περίοδος της περιστροφής της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι $T \approx \pi \times 10^7$ s, ενώ η ακτίνα περιστροφής είναι $R = 1,5 \times 10^{11}$ m.

Επομένως η κεντρομόλος επιτάχυνση που σχετίζεται με αυτήν την

$$\text{περιστροφή είναι } a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \approx 6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Στην περίπτωση της περιστροφικής κίνησης του Ήλιου γύρω από το κέντρο του Γαλαξία η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι

$$a = \frac{v^2}{R} \approx \frac{(3 \times 10^5 \text{ m/s})^2}{3 \times 10^{20} \text{ m}} = 3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2.$$

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις που μας ενδιαφέρουν σε κάποιο πρόβλημα προκαλούν πολύ μεγαλύτερες επιταχύνσεις, η Γη, το Ηλιακό Σύστημα, ή ο Γαλαξίας μπορούν να θεωρηθούν αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Σε αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \text{ (για σταθερή μάζα } m\text{).}$$

Σε ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται με επιτάχυνση \vec{a}_0 έχουμε

$\vec{F} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$, όπου \vec{a} η επιτάχυνση που μετράει ο παρατηρητής του επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς

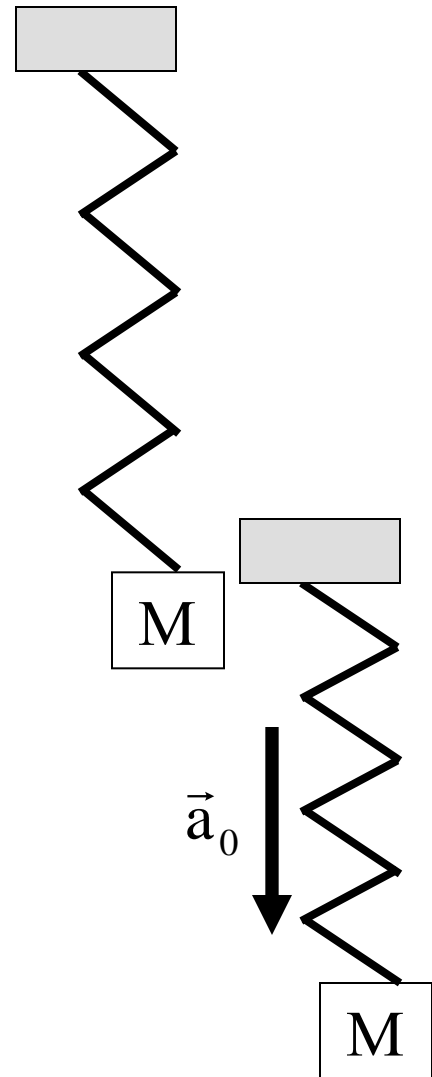
Δηλαδή, $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_0$, όπου $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ είναι μία ψευδοδύναμη που οφείλεται στην επιταχυνόμενη κίνηση του συστήματος αναφοράς.

Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο είναι $F = -Cx$, όπου x είναι η μετατόπιση του ελατηρίου από την θέση ισορροπίας και C η σταθερά του ελατηρίου.

Αν το ελατήριο τεθεί μέσα σε σύστημα αναφοράς (π.χ. αεροπλάνο ή αυτοκίνητο) που επιταχύνεται με επιτάχυνση \vec{a}_0 ,

τότε για μάζα M που είναι ακίνητη σε αυτό το σύστημα ισχύει (αγνοούμε την βαρύτητα) :

$$\vec{F} = M(\vec{a} + \vec{a}_0) = M\vec{a}_0 \Rightarrow -Cx = Ma_0 \Rightarrow x = -\frac{Ma_0}{C}$$



Έστω μάζα M ακίνητη μέσα σε σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα γύρω από άξονα που είναι σταθερός ως προς αδρανειακό σύστημα.

Η επιτάχυνση του σώματος ως προς αδρανειακό σύστημα είναι η κεντρομόλος $\vec{a}_0 = -\omega^2 \vec{r}$, όπου \vec{r} το διάνυσμα θέσης ως προς τον άξονα.

Ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα το σώμα δέχεται μια ψευδοδύναμη $\vec{F}_0 = M\omega^2 \vec{r}$ που καλείται *φυγόκεντρος*.

Έστω ανεγκυστήρας που εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Ένα σώμα που είναι μέσα στον ανεγκυστήρα, αλλά δεν είναι δεμένο σε αυτό, δέχεται την βαρυτική δύναμη $-mg\hat{z}$.

Επίσης δέχεται μια ψευδοδύναμη $\vec{F}_0 = -\left(-mg\hat{z}\right) = mg\hat{z}$.

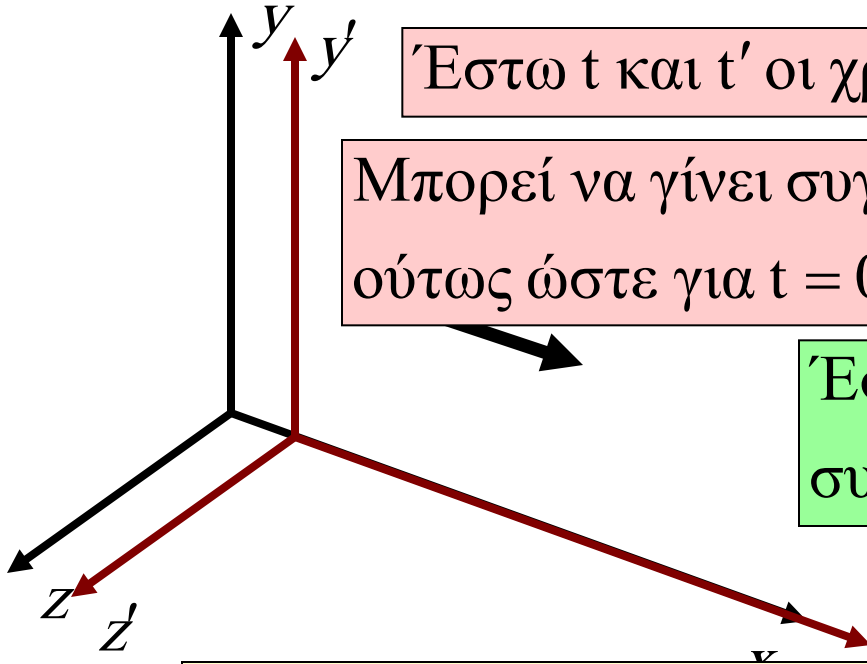
Επομένως, η συνολική δύναμη ως προς τον ανεγκυστήρα είναι μηδέν (φαινομενική έλλειψη βαρύτητας).

Οι νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι σε όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο.

Δεν υπάρχει απόλυτη ταχύτητα.

Δύο παρατηρητές που κινούνται με σταθερή ταχύτητα ο ένας ως προς τον άλλον χρησιμοποιούν τις ίδιες μεθόδους μέτρησης.

Έστω δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς $xyz(S)$ και $x'y'z'(S')$.



Έστω t και t' οι χρόνοι που μετρούνται στα S και S' .

Μπορεί να γίνει συγχρονισμός των ρολογιών στα S και S' ούτως ώστε για $t = 0$ να είναι $t' = 0$.

Έστω ακόμη ότι για $t = 0$ οι αρχές των συντεταγμένων O και O' συμπίπτουν.

Ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου παίρνει τότε την μορφή:

$$t = t', \quad x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z' \quad (1).$$

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο βρίσκουμε από την (1) ότι

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} = \frac{d(x' + Vt')}{dt'} = v'_x + V. \text{ Γενικά: } \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}.$$

Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου : $t = t'$, $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t'$ (1).

Οι βασικοί νόμοι της Φυσικής έχουν την ίδια μορφή σε δύο συστήματα αναφοράς που συνδέονται με μετασχηματισμούς του τύπου (1).

Αργότερα θα δούμε ότι στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας οι μετασχηματισμοί (1) αντικαθίστανται από τους λεγόμενους μετασχηματισμούς Lorentz.

Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου $t = t'$, $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t'$ (1).

Από την (1) βρίσκουμε $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ και αφού $\vec{V} = \text{σταθερά}$:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}' \text{ και } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt'} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}',$$

όπου \vec{a} και \vec{a}' είναι οι επιταχύνσεις που μετράνε οι παρατηρητές των S και S' για ένα σώμα.

$$\text{Είναι όμως : } \vec{F} = M\vec{a} = M\vec{a}' = \vec{F}'$$

Άρα οι δυνάμεις που μετρούν οι δύο παρατηρητές είναι ίδιες εφόσον η σχετική ταχύτητα \vec{V} είναι σταθερή. (Υποθέσαμε ακόμη ότι η μάζα M δεν εξαρτάται από την ταχύτητα).

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Ας θεωρήσουμε 2 ελεύθερα σωματίδια με μάζες M_1, M_2 και αρχικές ταχύτητες \vec{v}_1 και \vec{v}_2 .

Έστω ότι τα σωματίδια συγκρούονται και ότι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι \vec{w}_1 και \vec{w}_2 .

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε :

$$\frac{1}{2}M_1v_1^2 + \frac{1}{2}M_2v_2^2 = \frac{1}{2}M_1w_1^2 + \frac{1}{2}M_2w_2^2 + \Delta\varepsilon,$$

όπου $\Delta\varepsilon$ το ποσό της ενέργειας που μετατρέπεται από κινητική σε κάποια άλλη μορφή (π.χ. δυναμική, θερμική, κλπ).

Για παρατηρητή που κινείται με σταθερή ταχύτητα \vec{V} η διατήρηση της ενέργειας πρέπει να έχει παρόμοια μορφή :

$$\frac{1}{2}M_1(v'_1)^2 + \frac{1}{2}M_2(v'_2)^2 = \frac{1}{2}M_1(w'_1)^2 + \frac{1}{2}M_2(w'_2)^2 + \Delta\varepsilon,$$

όπου $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{w}'_1$, και \vec{w}'_2 οι ταχύτητες στο κινούμενο σύστημα αναφοράς πριν και μετά την κρούση.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

$$\text{Είναι : } \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 w_1^2 + \frac{1}{2} M_2 w_2^2 + \Delta \varepsilon \quad (1),$$

$$\text{και } \frac{1}{2} M_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v'_2)^2 = \frac{1}{2} M_1 (w'_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (w'_2)^2 + \Delta \varepsilon \quad (2).$$

$$\text{Είναι ακόμη : } \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{V}, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{V}, \quad \vec{w}_1 = \vec{w}'_1 + \vec{V} \quad \text{και} \quad \vec{w}_2 = \vec{w}'_2 + \vec{V}.$$

Άρα : $v_1'^2 = (\vec{v}_1 - \vec{V}) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{V}) = v_1^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V} + V^2$ και ανάλογες σχέσεις για $\vec{v}'_2, \vec{w}'_1, \vec{w}'_2$.

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} M_1 (v_1^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V}) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 - 2\vec{v}_2 \cdot \vec{V}) =$$

$$\frac{1}{2} M_1 (w_1^2 - 2\vec{w}_1 \cdot \vec{V}) + \frac{1}{2} M_2 (w_2^2 - 2\vec{w}_2 \cdot \vec{V}) + \Delta \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}M_1(v_1^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V}) + \frac{1}{2}M_2(v_2^2 - 2\vec{v}_2 \cdot \vec{V}) =$$

$$\frac{1}{2}M_1(w_1^2 - 2\vec{w}_1 \cdot \vec{V}) + \frac{1}{2}M_2(w_2^2 - 2\vec{w}_2 \cdot \vec{V}) + \Delta\varepsilon \quad (3)$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{2}M_1v_1^2 + \frac{1}{2}M_2v_2^2 = \frac{1}{2}M_1w_1^2 + \frac{1}{2}M_2w_2^2 + \Delta\varepsilon \quad (1).$$

και τελικά, λόγω της (1), η (3) δίνει :

$$(M_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2) \cdot \vec{V} = (M_1\vec{w}_1 + M_2\vec{w}_2) \cdot \vec{V} \quad (4).$$

Το αναλλοίωτο των φυσικών νόμων σημαίνει ότι η (4) πρέπει να ισχύει $\forall \vec{V}$,

$$\text{άρα πρέπει } M_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 = M_1\vec{w}_1 + M_2\vec{w}_2 \quad (5).$$

Η (5) εκφράζει την αρχή διατήρηση της ορμής.

(A)

(B)

(C)

Έστω ότι σώμα A μάζας M_A συγκρούεται με ένα συσσωμάτωμα δύο μαζών M_B και M_C . Μετά την κρούση το A ενώνεται με το C, το B κινείται μόνο του.

$$\text{Είναι } \frac{1}{2} M_A v_A^2 + \frac{1}{2} (M_B + M_C) v_{BC}^2 = \frac{1}{2} M_B w_B^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_C) w_{AC}^2 + \Delta \varepsilon \quad (1),$$

ενώ σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα V έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_A (v_A - V)^2 + \frac{1}{2} (M_B + M_C) (v_{BC} - V)^2 = \\ \frac{1}{2} M_B (w_B - V)^2 + \frac{1}{2} (M_A + M_C) (w_{AC} - V)^2 + \Delta \varepsilon \quad (2). \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα και χρησιμοποιώντας την (1) βρίσκουμε

$$M_A \vec{v}_A + (M_B + M_C) \vec{v}_{BC} = M_B \vec{w}_B + (M_A + M_C) \vec{w}_{AC}$$

δηλαδή την σχέση διατήρησης της ορμής.

Την 2η ώρα του σημερινού μαθήματος θα δοθεί, για όσους θέλουν και μπορούν να παρακολουθήσουν, ωριαία διάλεξη περί επιταχυντών και στοιχειωδών σωματιδίων. Η διάλεξη θα δοθεί από τον Αν. Καθηγητή Ν. Τράκα της ΣΕΜΦΕ στο Αμφιθέατρο 4 του Κτιρίου Γενικών Εδρών (ένα από τα κτίρια της ΣΕΜΦΕ).

Σε αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων ισχύει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \text{ (για σταθερή μάζα } m\text{).}$$

Σε ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται με επιτάχυνση \vec{a}_0 έχουμε

$\vec{F} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$, όπου \vec{a} η επιτάχυνση που μετράει ο παρατηρητής του επιταχυνόμενου συστήματος αναφοράς

Δηλαδή, $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_0$, όπου $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ είναι μία ψευδοδύναμη που οφείλεται στην επιταχυνόμενη κίνηση του συστήματος αναφοράς.

Όταν το όχημα κινείται σε ευθεία γραμμή δεν ασκούνται στον επιβάτη οριζόντιες δυνάμεις.

Καθώς το όχημα αρχίζει να μπαίνει στην στροφή, ο επιβάτης θα τείνει, αν δεν υπάρχει τριβή, να συνεχίσει να κινείται ευθύγραμμα ως προς ακίνητο παρατηρητή.

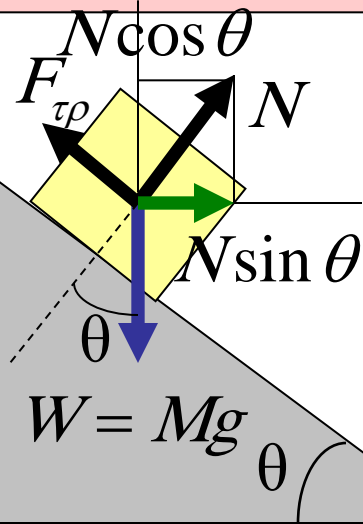
Για παρατηρητή μέσα στο αυτοκίνητο, ο επιβάτης δέχεται μια φυγόκεντρο δύναμη που τον ωθεί προς τα δεξιά.

Η φυγόκεντρος εξισορροπείται από την αντίδραση της πόρτας όταν πλέον ο επιβάτης έρθει σε επαφή με αυτήν.

Στην πραγματικότητα, η τριβή μεταξύ επιβάτη και καθίσματος εξισορροπεί την φυγόκεντρο προτού εμφανιστεί κίνηση προς τα δεξιά.



Όταν το όχημα στρίβει σε στροφή που φέρει κλίση η συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό (αγνοώντας την τριβή) είναι : $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{W} + \vec{N}$.



Επομένως, υπάρχει μία δύναμη που δρα ως κεντρομόλος αφού κατευθύνεται προς το κέντρο καμπυλότητας της στροφής.

Είναι : $N \cos \theta = W$ και $N \sin \theta = \frac{Mv^2}{R}$.

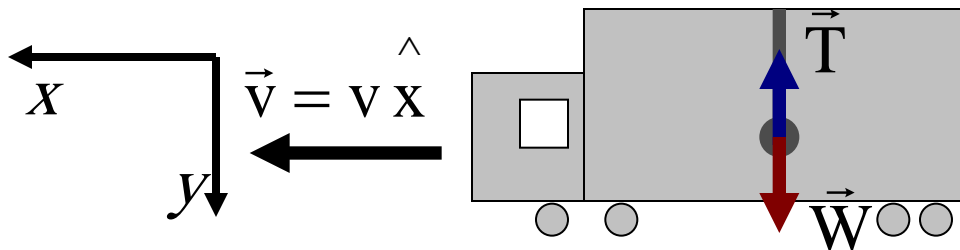
Επομένως : $\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$.

Για συγκεκριμένη ταχύτητα v και ακτίνα καμπυλότητας R η κλίση παρέχει από μόνη της την δυνατότητα στροφής.

Για μεγαλύτερες ή μικρότερες ταχύτητες εμφανίζεται και τριβή μεταξύ των ελαστικών και του οδοστρώματος.

Μια μάζα m κρέμεται από το άκρο νήματος το οποίο είναι δεμένο σε μια δοκό. Το σύστημα είναι τοποθετημένο σε πλατφόρμα με ρόδες όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε την γωνία θ που κάνει το νήμα με την κατακόρυφο, καθώς και την τάση T του νήματος όταν η πλατφόρμα κινείται : (α) με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = v \hat{x}$. (β) με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_0 = a_0 \hat{x}$. Σχεδιάστε τις δυνάμεις για την κάθε περίπτωση όπως αυτές τις μετράει ένας παρατηρητής μέσα στο φορτηγό.

ΛΥΣΗ : (α) Σε αυτήν την περίπτωση είναι για το σύστημα αναφοράς του φορτηγού $a_0 = 0$ (αδρανειακό σύστημα), επομένως ο παρατηρητής μετράει μόνο τις πραγματικές δυνάμεις και καμμία ψευδοδύναμη.



Το νήμα παραμένει κατακόρυφο.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του $\vec{W} = mg \hat{y}$ και η τάση του νήματος \vec{T} , με $\vec{W} + \vec{T} = 0$.

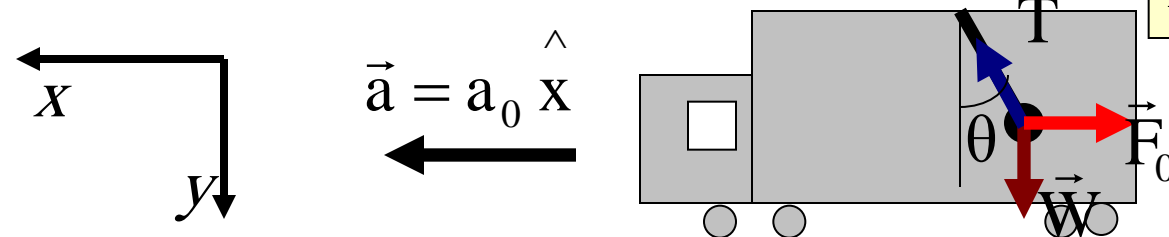
Μια μάζα m κρέμεται από το άκρο νήματος το οποίο είναι δεμένο σε μια δοκό. Το σύστημα είναι τοποθετημένο σε πλατφόρμα με ρόδες όπως φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε την γωνία θ που κάνει το νήμα με την κατακόρυφο, καθώς και την τάση T του νήματος όταν η πλατφόρμα κινείται : (α) με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = v \hat{x}$. (β) με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_0 = a_0 \hat{x}$. Σχεδιάστε τις δυνάμεις για την κάθε περίπτωση όπως αυτές τις μετράει ένας παρατηρητής μέσα στο φορτηγό..

ΛΥΣΗ : (β) Η σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}_0 = a_0 \hat{x}$ έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας ψευδοδύναμης $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$.

Το νήμα τώρα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο και η εξισορρόπηση των δυνάμεων σημαίνει ότι

$$T \sin \theta = m a_0 \text{ και } T \cos \theta = m g.$$

$$\text{Άρα : } \tan \theta = a_0 / g.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΚΩΝΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

6

Ένα μικρό σώμα μάζας m κρέμεται από μια κλωστή μήκους L . Το σώμα περιστρέφεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, ούτως ώστε η κλωστή να διαγράφει την επιφάνεια ενός κώνου. Βρείτε την ταχύτητα του σώματος και την περίοδο περιστροφής T_p .

ΛΥΣΗ: Από την ανάλυση των δυνάμεων σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα βρίσκουμε

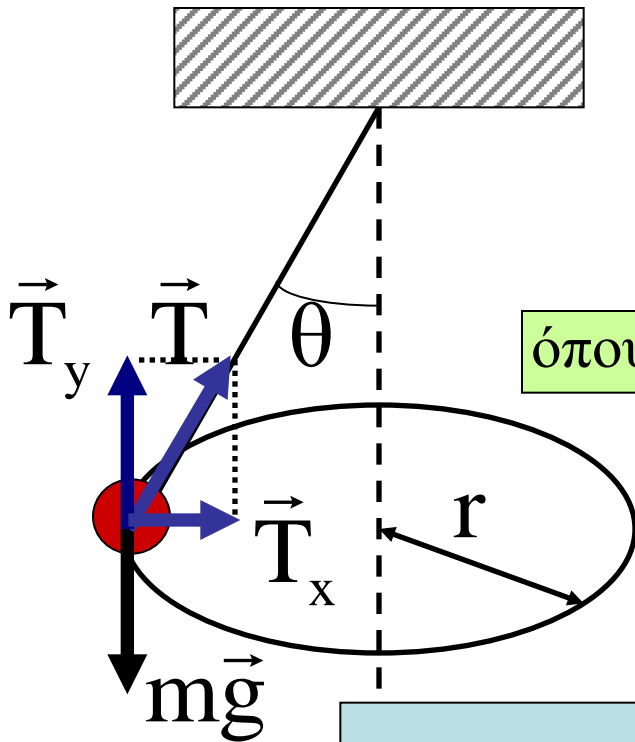
$$T \cos \theta = mg \quad (1) \text{ και } T \sin \theta = \frac{mv^2}{r} \quad (2),$$

όπου v η ταχύτητα της κυκλικής κίνησης του σώματος

$$\text{Από τις (1) και (2) παίρνουμε } \tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

και επειδή $r = L \sin \theta$, έχουμε $v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$

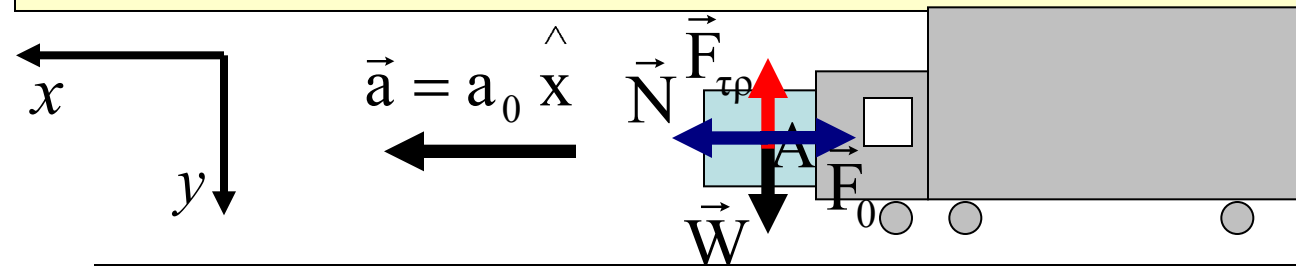
$$\text{Για την περίοδο } T_p \text{ έχουμε: } T_p = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$



Το μάθημα της Παρασκευής 29/10/2010 δεν θα πραγματοποιηθεί (για το 2^ο τμήμα της Φυσικής Ι).

Αντί για το μάθημα θα υπάρξουν αυτήν την Παρασκευή 29/10/2010 επιπλέον ώρες γραφείου μεταξύ 10:30-12:00 στο γραφείο 311 του κτιρίου Φυσικής.

Ποια είναι η ελάχιστη επιτάχυνση που πρέπει να έχει το όχημα του σχήματος ούτως ώστε το σώμα Α μάζας m να παραμένει προσκολλημένο στο εμπρόσθιο μέρος του οχήματος χωρίς να πέφτει; Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ Α και οχήματος.



ΛΥΣΗ: Για παρατηρητή πάνω στο όχημα αναπτύσσονται πάνω στο Α

το βάρος \vec{W} , η κάθετη αντίδραση \vec{N} , η τριβή $\vec{F}_{\tau\mu}$ και η ψευδοδύναμη $\vec{F}_0 = -m\vec{a}$.

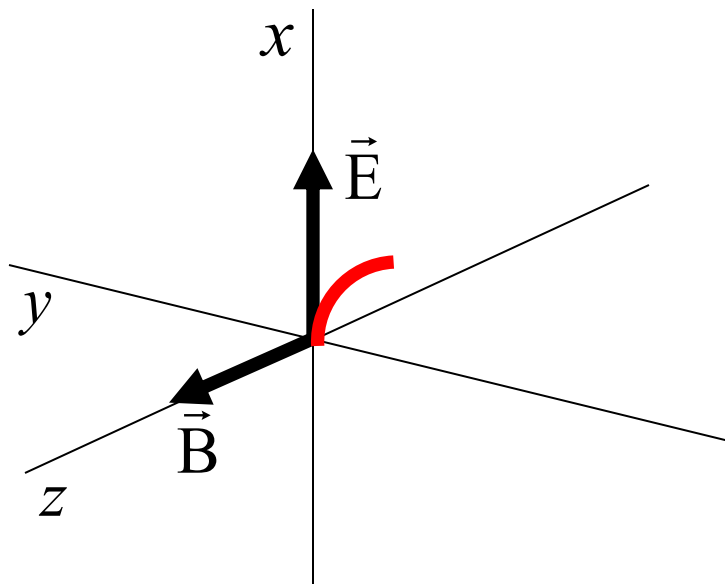
Για να ισορροπεί το σώμα πρέπει $N = ma_0$ και $F_{\tau\mu} = mg$.

$$\text{Επειδή } F_{\tau\mu} = \mu N, \text{ βρίσκουμε } \mu ma_0 = mg \Rightarrow a_0 = \frac{g}{\mu}.$$

Αυτή είναι η ελάχιστη επιτάχυνση για να μην πέφτει το σώμα.

Περιγράψτε την κίνηση πρωτονίου μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

$\vec{E} = E \hat{x}$ και $\vec{B} = B \hat{z}$. Υποθέτουμε ότι για $t = 0$ το πρωτόνιο είναι ακίνητο.



Είναι : $\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$

για τα δοθέντα \vec{E} και \vec{B} βρίσκουμε ($\omega_c = \frac{eB}{M}$)

$$\dot{v}_x = \frac{e}{M} E + \omega_c v_y \quad (1) \quad \text{και} \quad \dot{v}_y = -\omega_c v_x \quad (2)$$

Μία (ειδική) λύση των (1) - (2) είναι η

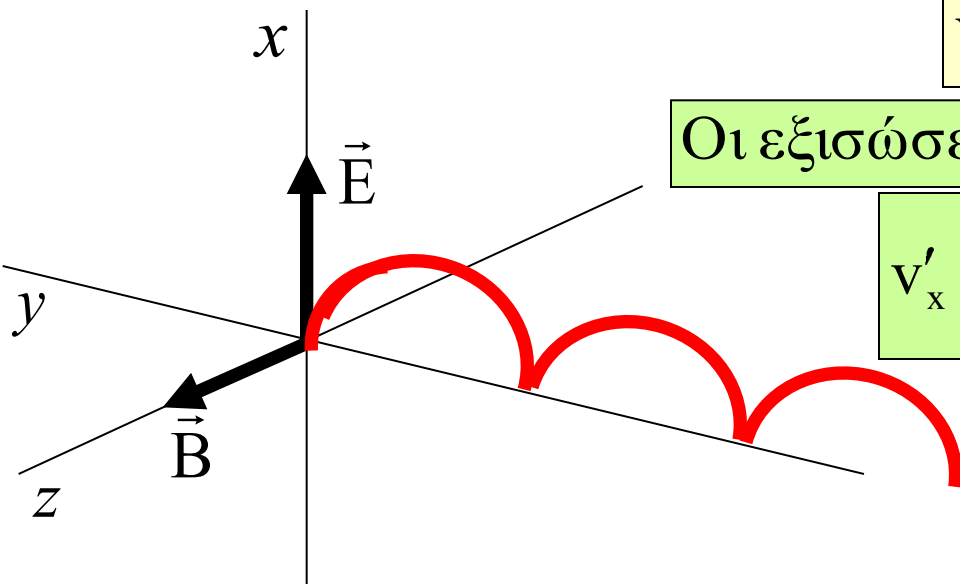
$$v_x = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad v_y = -\frac{e}{M\omega_c} E = -\frac{E}{B} \quad (4).$$

Για το σύστημα αναφοράς S' που κινείται με ταχύτητα που δίνεται

από τις (3) και (4) έχουμε $v_x = v'_x$ και $v_y = -\frac{E}{B} + v'_y$.

Επομένως : $\dot{v}'_x = \omega_c v'_y$ (5) και $\dot{v}'_y = -\omega_c v'_x$ (6).

Έστω πρωτόνιο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E \hat{x}$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{z}$. Περιγράψτε την κίνηση.



$$\dot{v}'_x = \omega_c v'_y \quad (5) \quad \text{και} \quad \dot{v}'_y = -\omega_c v'_x \quad (6).$$

Οι εξισώσεις (5) και (6) επιδέχονται τις λύσεις :

$$v'_x = \frac{E}{B} \sin \omega_c t \quad (7), \quad v'_y = \frac{E}{B} \cos \omega_c t \quad (8).$$

Στο S' έχουμε ομαλή κυκλική κίνηση με $v' = \frac{E}{B}$ και $r = \frac{v'}{\omega_c} = \frac{ME}{eB^2}$.

Από τις σχέσεις (3), (4), (7), (8) προκύπτει ότι στο σύστημα S το σωματίδιο εκτελεί έναν συνδυασμό κυκλικής και ευθύγραμμης ομαλής κίνησης.

Ολοκληρώνοντας τις (7) και (8) βρίσκουμε :

$$x = r \left[-\cos \omega_c t \right], \quad y = r \left[\omega_c t + \sin \omega_c t \right]$$

Έστω δύο συστήματα αναφοράς S και R με κοινή αρχή O .

Έστω ακόμη ότι το S είναι ακίνητο, ενώ το R περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα \hat{n} με γωνιακή ταχύτητα ω .

Αν $\vec{\omega} \equiv \omega \hat{n}$, τότε η ταχύτητα \vec{V}_S ως προς S σώματος που είναι ακίνητο και στα δύο συστήματα είναι $\vec{V}_S = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (1), όπου \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος.

Αν το σώμα έχει μία ταχύτητα \vec{V}_R ως προς R , τότε $\vec{V}_S = \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}$ (2).

$$\vec{V}_S = \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2).$$

Για τις επιταχύνσεις $\vec{a}_S \equiv \left(\frac{d\vec{V}_S}{dt} \right)_S$ και $\vec{a}_R \equiv \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_R$ βρίσκουμε

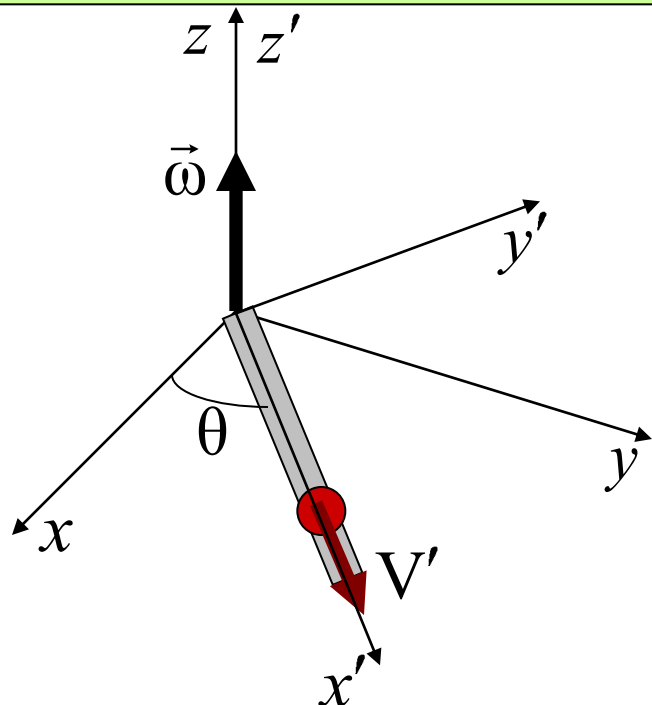
$$\vec{a}_S = \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_S + \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) \right)_S = \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \vec{a}_S = \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times \left(\vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) = \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right).$$

$$\text{Είναι όμως } \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt} \right)_S = \vec{a}_R + \vec{\omega} \times \vec{V}_R.$$

$$\text{Οπότε : } \vec{a}_S = \vec{a}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right).$$

Οριζόντια ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα. Σώμα κινείται πάνω στην ράβδο με ταχύτητα V' ως προς αυτήν και μακριά από τον άξονα περιστροφής. Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος ως προς την Γη.



ΛΥΣΗ : Είναι $x = x' \cos \omega t$ και $y = x' \sin \omega t$.

$$\text{Άρα : } V_x = \frac{dx}{dt} = V' \cos \omega t - \omega x' \sin \omega t \quad (1)$$

$$\text{και } V_y = \frac{dy}{dt} = V' \sin \omega t + \omega x' \cos \omega t \quad (2).$$

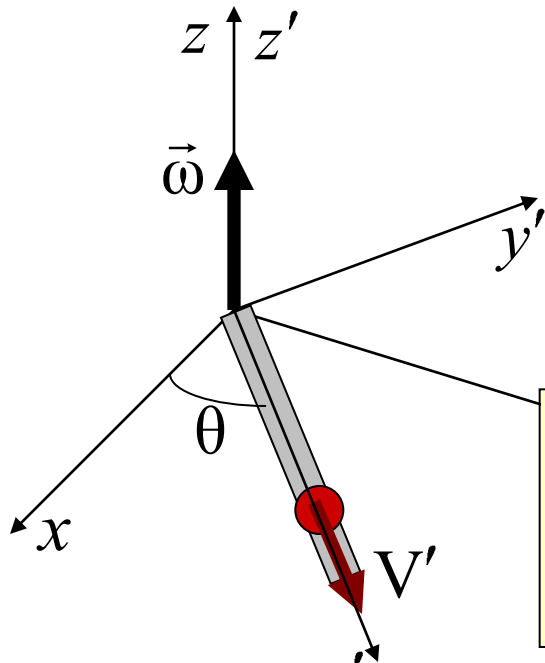
Είναι όμως : $\langle V' \cos \omega t, V' \sin \omega t \rangle = \vec{V}'$.

$$\text{Ακόμη : } \vec{\omega} = \omega \hat{z}, \vec{r} = \langle x' \cos \omega t, x' \sin \omega t \rangle$$

$$\text{και άρα : } \vec{\omega} \times \vec{r} = \left(\omega \hat{z} \right) \times \left(\hat{x} x' \cos \omega t + \hat{y} y' \sin \omega t \right) = \hat{y} \omega x' \cos \omega t - \hat{x} \omega x' \sin \omega t$$

Άρα ισχύει η διανυσματική σχέση $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$ που δώσαμε παραπάνω.

Οριζόντια ράβδος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα. Σώμα κινείται πάνω στην ράβδο με ταχύτητα V' ως προς αυτήν και μακριά από τον άξονα περιστροφής. Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος ως προς την Γη.



Είναι : $V_x = \frac{dx}{dt} = V' \cos \omega t - \omega x' \sin \omega t$ (1)

και $V_y = \frac{dy}{dt} = V' \sin \omega t + \omega x' \cos \omega t$ (2).

Για την επιτάχυνση βρίσκουμε :

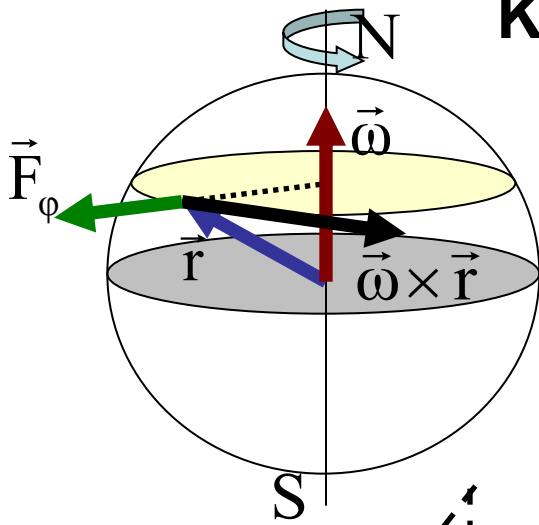
$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega V' \sin \omega t - \omega^2 x' \cos \omega t - \omega V' \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = -2\omega V' \sin \omega t - \omega^2 x' \cos \omega t$$

$$\text{και } a_y = 2\omega V' \cos \omega t - \omega^2 x' \sin \omega t.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι $\vec{a} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

ΚΙΝΗΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΓΗ



Είναι : $\vec{a}_S = \vec{a}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

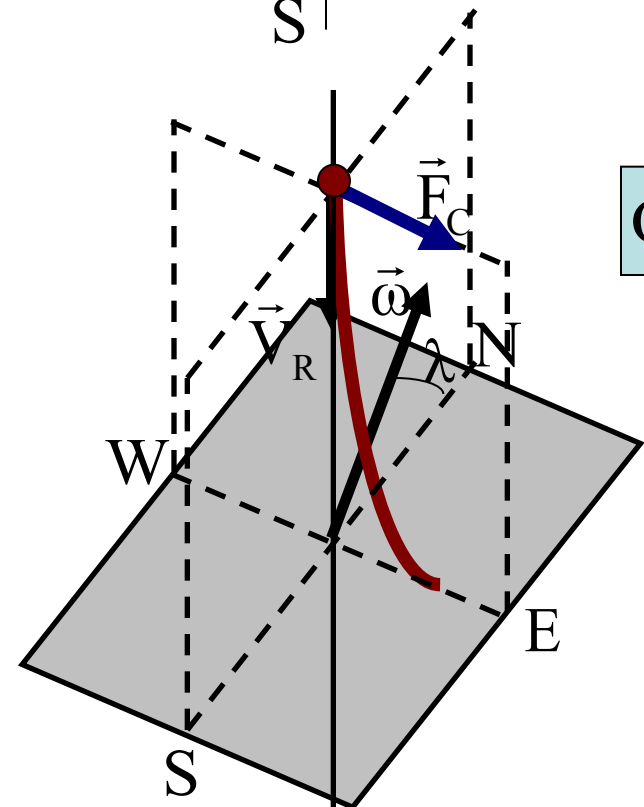
και άρα $\vec{a}_R = \vec{a}_S - 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Ο όρος $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ αντιπροσωπεύει την φυγόκεντρη δύναμη \vec{F}_ϕ που κατευθύνεται από τον άξονα περιστροφής προς τα έξω.

Ο όρος $-2m\vec{\omega} \times \vec{V}_R$ είναι η δύναμη Coriolis \vec{F}_C .

Έστω ότι το σκιασμένο επίπεδο είναι το οριζόντιο επίπεδο σε γεωγραφικό πλάτος λ .

Η \vec{F}_C προκαλεί απόκλιση προς ανατολικά για σώμα που πέφτει στο βόρειο ημισφαίριο.

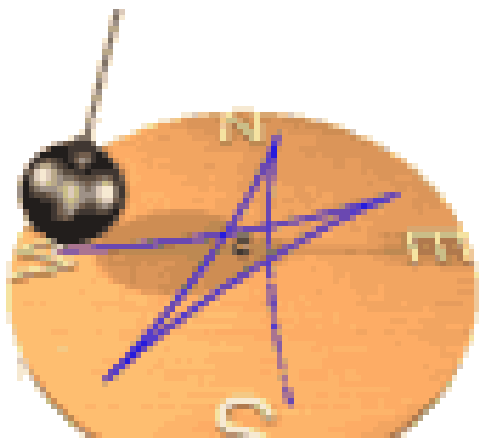
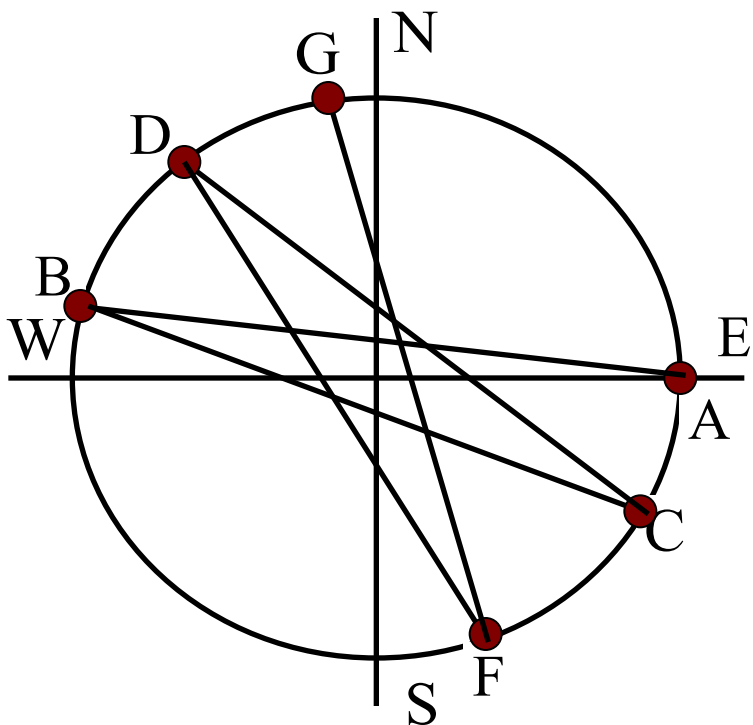


προς κέντρο της Γης

ΕΚΚΡΕΜΕΣ ΤΟΥ ΦΟΥΚΑΥΤ

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Έστω μεγάλο εκκρεμές που κρέμεται κατακόρυφα σε γεωγραφικό πλάτος λ .



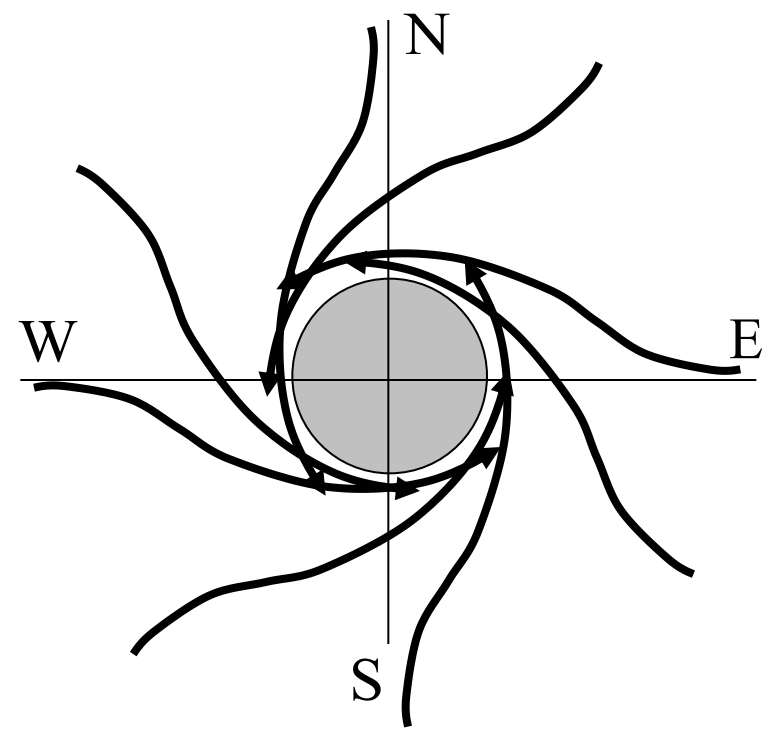
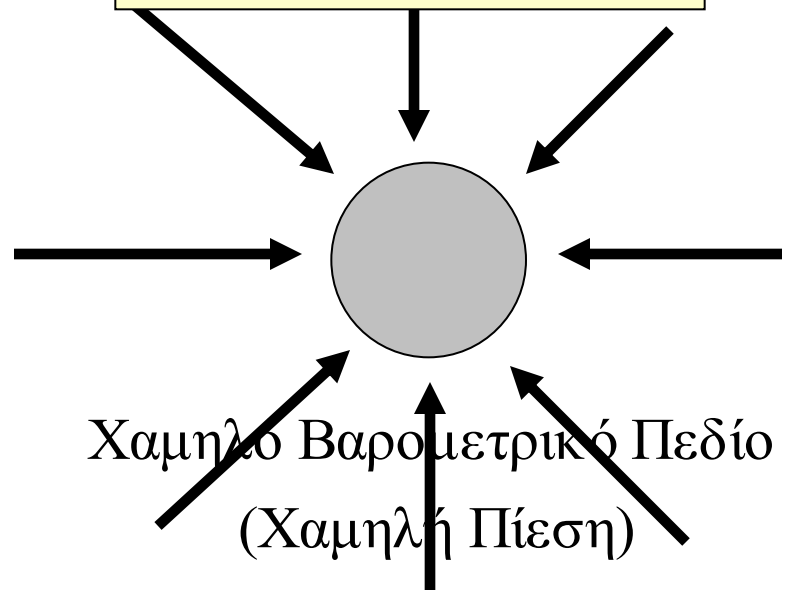
physics - animations .com



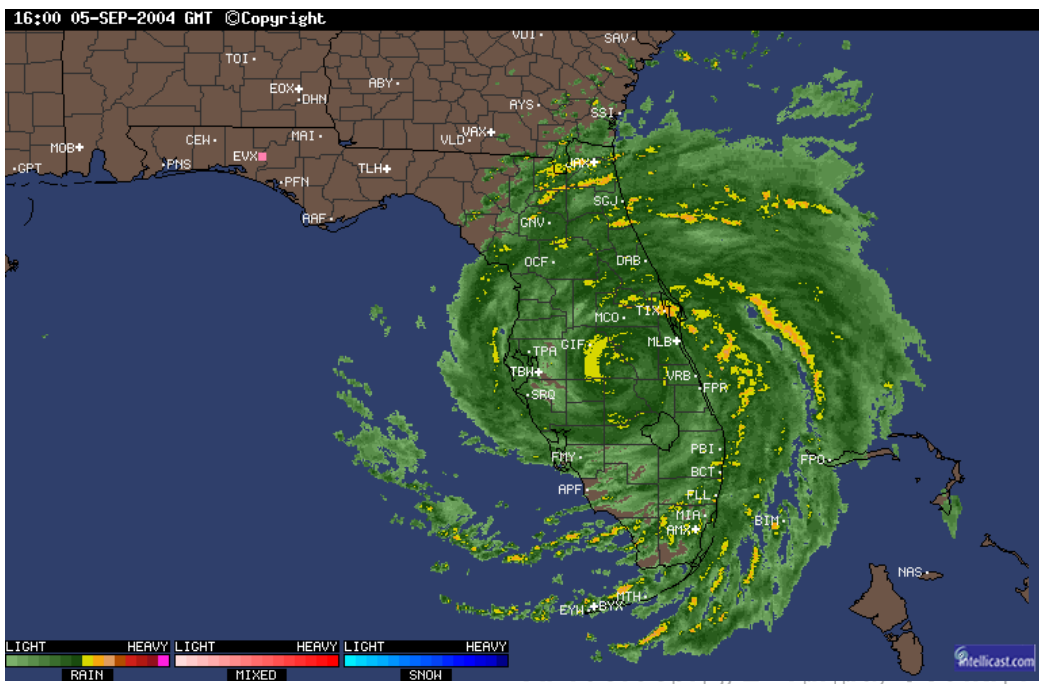
Νότιο Ημισφαίριο

ΚΥΚΛΩΝΕΣ

Ροή αέρα χωρίς $\vec{F}_{Coriolis}$



Επίδραση της $\vec{F}_{Coriolis}$



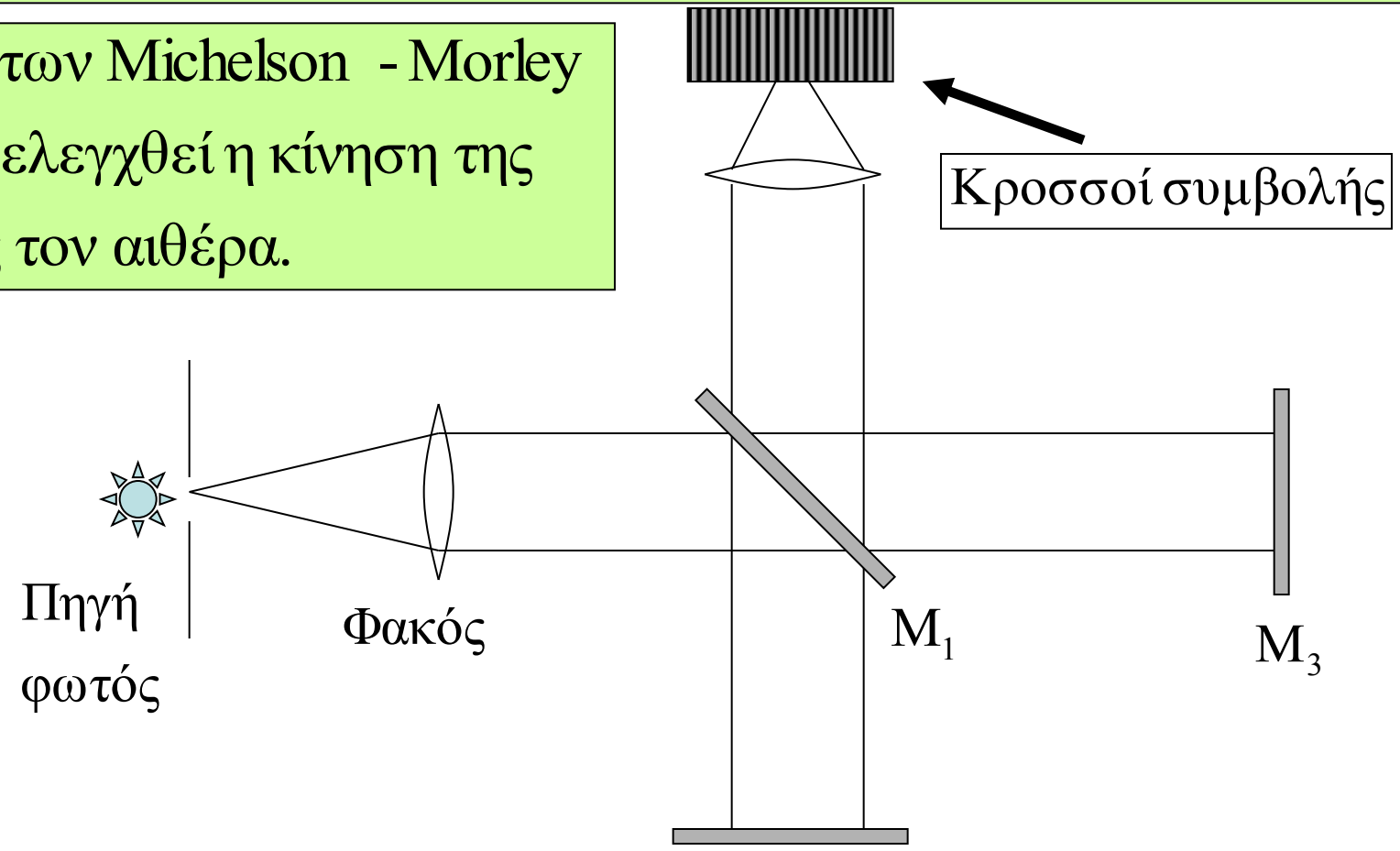
Η ταχύτητα του φωτός c είναι η ταχύτητα μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Η ταχύτητα του φωτός $c = 2,997 \times 10^8$ m/s είναι η μέγιστη ταχύτητα μετάδοσης σήματος στον ελεύθερο χώρο.

Η ταχύτητα με την οποία μεταδίδεται το φως είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ανεξαρτήτως της σχετικής κίνησης της πηγής του φωτός.

Μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα υπήρχε η υπόθεση ότι το φως διαδίδεται ως ταλαντώσεις ενός μέσου, του αιθέρα. Η ταχύτητα του φωτός υποτίθεται ότι ήταν c μόνο στο αδρανειακό σύστημα του αιθέρα.

Το πείραμα των Michelson - Morley έγινε για να ελεγχθεί η κίνηση της Γης ως προς τον αιθέρα.



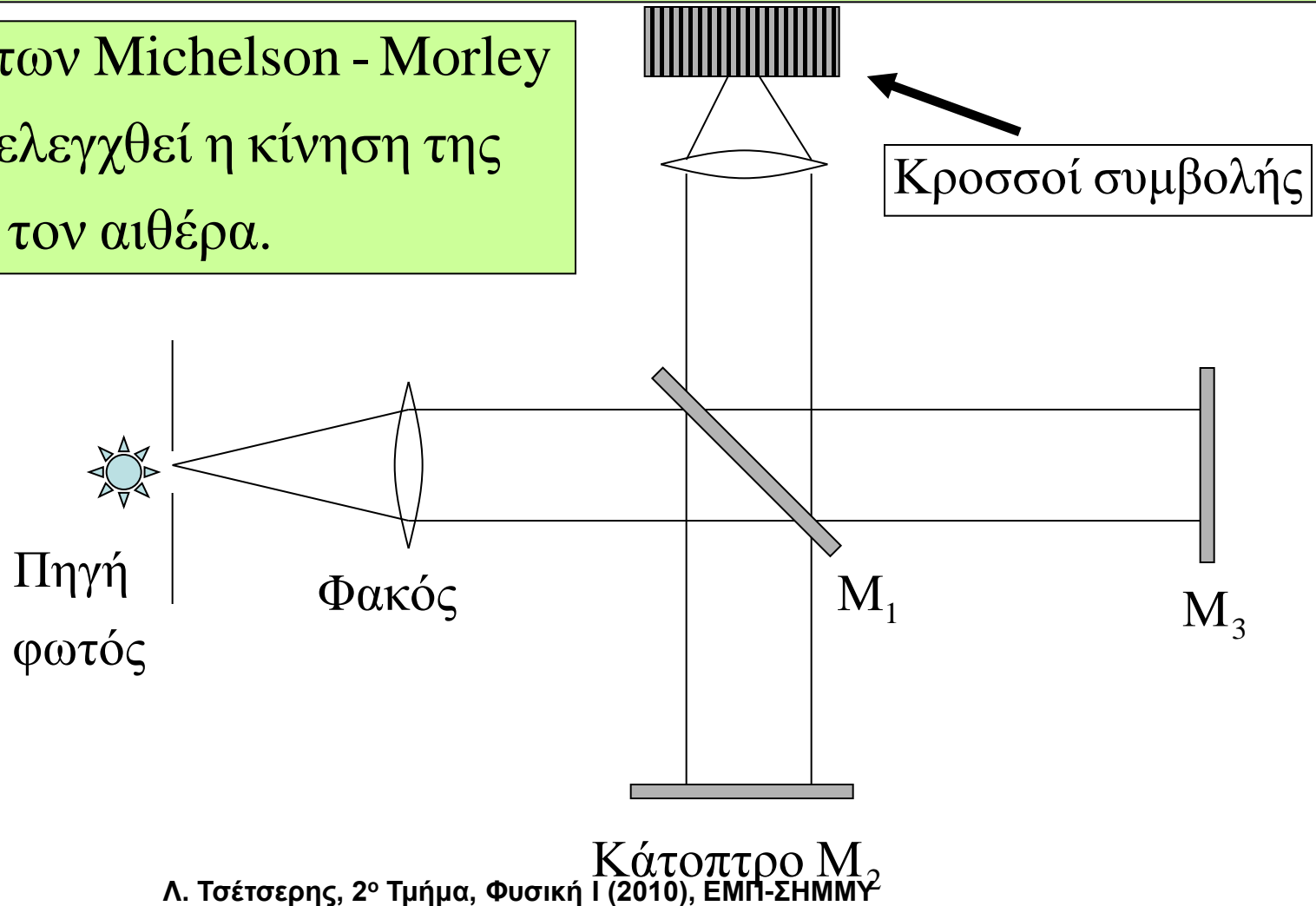
Κάτοπτρο M₂

ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON-MORLEY

1

Μέχρι τα τέλη του 19^{ου} αιώνα υπήρχε η υπόθεση ότι το φως διαδίδεται ως ταλαντώσεις ενός μέσου, του αιθέρα. Η ταχύτητα του φωτός υποτίθεται ότι ήταν c μόνο στο αδρανειακό σύστημα του αιθέρα.

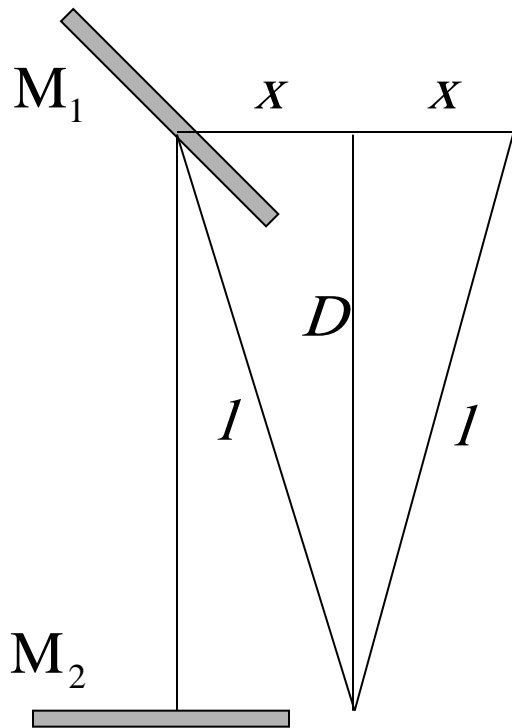
Το πείραμα των Michelson - Morley έγινε για να ελεγχθεί η κίνηση της Γης ως προς τον αιθέρα.



ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON-MORLEY

2

Βασική παραδοχή στην παρακάτω ανάλυση είναι ότι ισχύουν οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου (σύνθεση ταχυτήτων).



Δt_{12} : χρόνος για να πάει το φως από το M_1 στο M_2 και πίσω στο M_1 .

Παρατηρητής ακίνητος ως προς τον αιθέρα : Είναι $2l = c\Delta t_{12}$ και $2x = V\Delta t_{12}$.

Είναι ακόμη $x^2 + D^2 = l^2$.

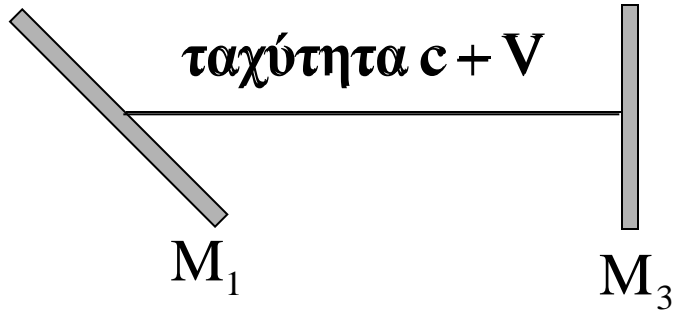
Άρα : $(c^2 - V^2)(\Delta t_{12})^2 = 4D^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta t_{12} = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}} \approx \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right)$$

Αν η διάταξη κινείται με ταχύτητα V ως προς τον αιθέρα.

ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON-MORLEY

3



Παρατηρητής πάνω στην Γη (κινείται με ταχύτητα V ως προς τον αιθέρα) :

Όταν το φως κινείται προς τα δεξιά (αριστερά) έχει ταχύτητα $c - V$ ($c + V$).

Άρα ο χρόνος για να πάει από το M_1 στο M_3 είναι $T = \frac{D}{c - V}$

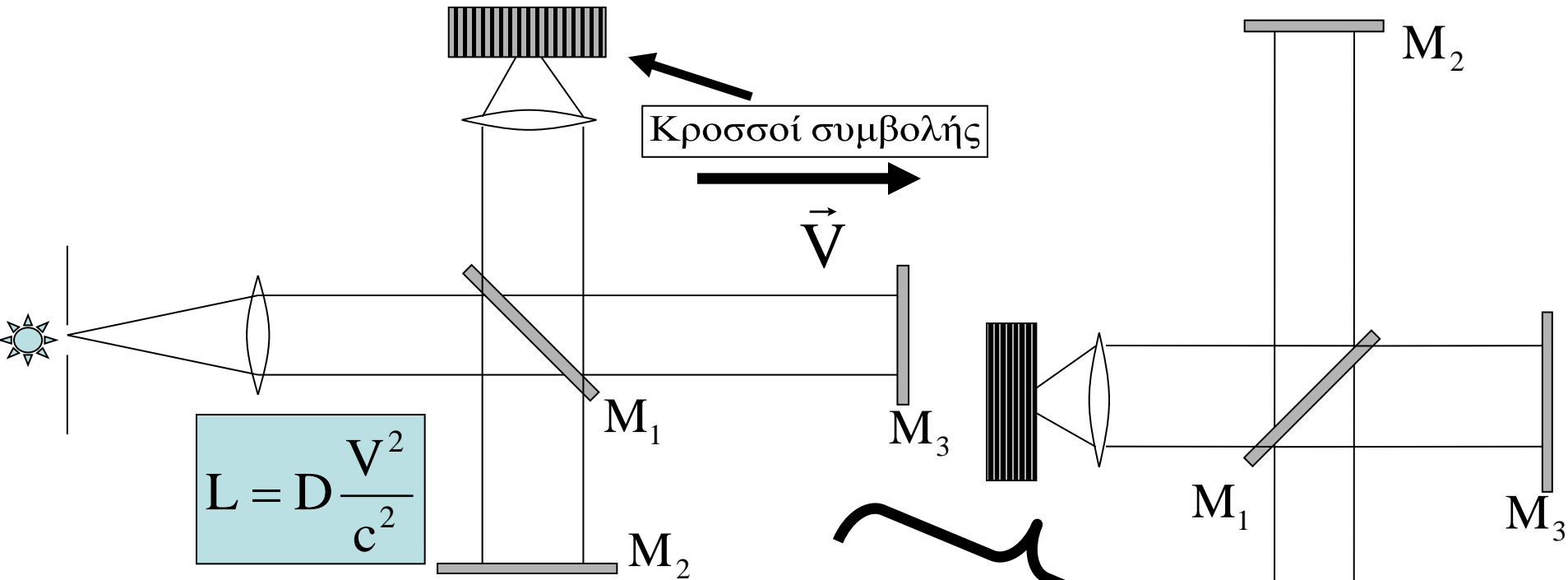
και για να επιστρέψει στο M_1 $T' = \frac{D}{c + V}$.

Ο συνολικός χρόνος $\Delta t_{13} = T + T' = 2D \frac{c}{c^2 - V^2} \approx 2D \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right)$

Είναι ακόμη: $\Delta t_{12} = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}} \approx \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right)$

Διαφορά οπτικών δρόμων $L : L \equiv c(\Delta t_{13} - \Delta t_{12}) = D \frac{V^2}{c^2}$

ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON-MORLEY



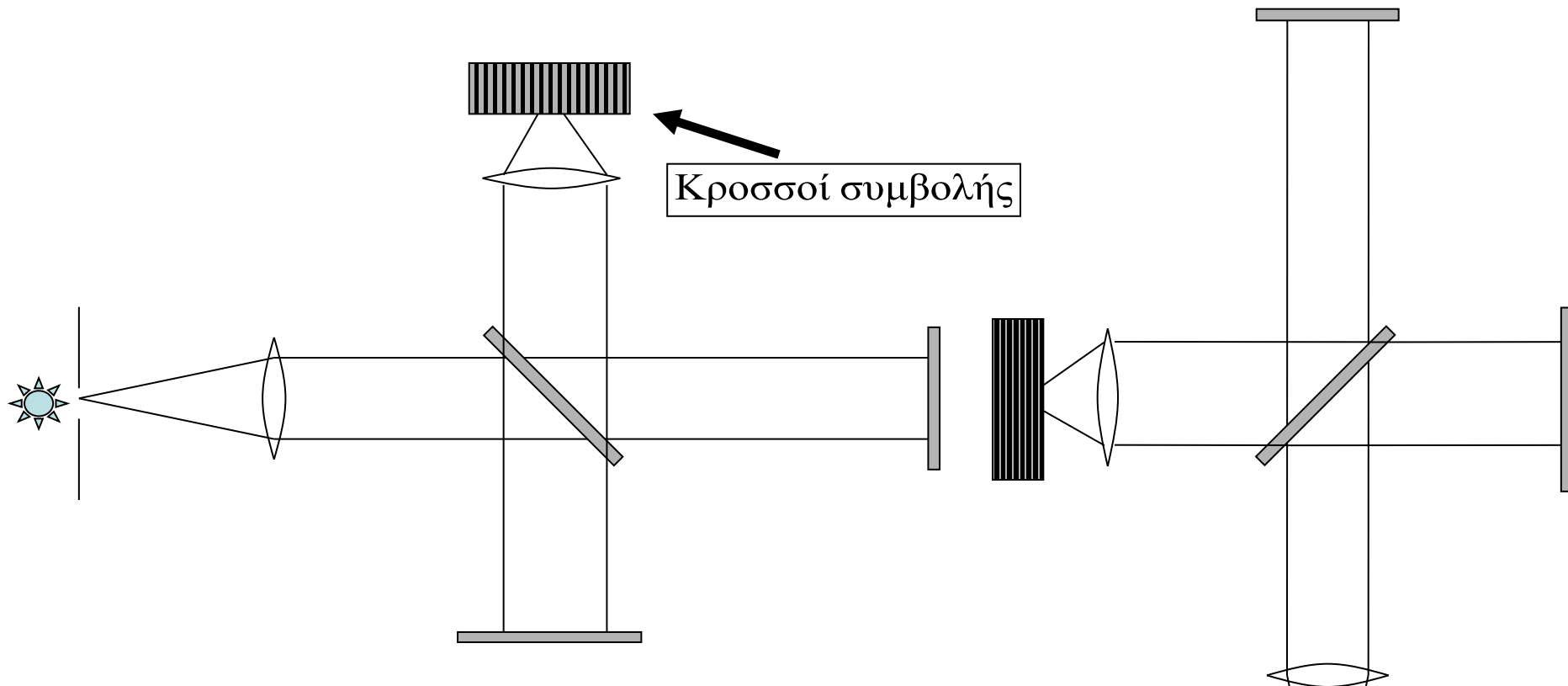
Έστω ότι η διάταξη περιστρέφεται κατά 90°

Μεταξύ των δύο πειραμάτων (πριν και μετά την περιστροφή της διάταξης κατά 90°)

υπάρχει μεταβολή διαφοράς οπτικών δρόμων $\Delta L = 2D \frac{V^2}{c^2}$.

Άρα, οι κροσσοί συμβολής πρέπει να μετατοπίζονται.

$$L' = -D \frac{V^2}{c^2}$$



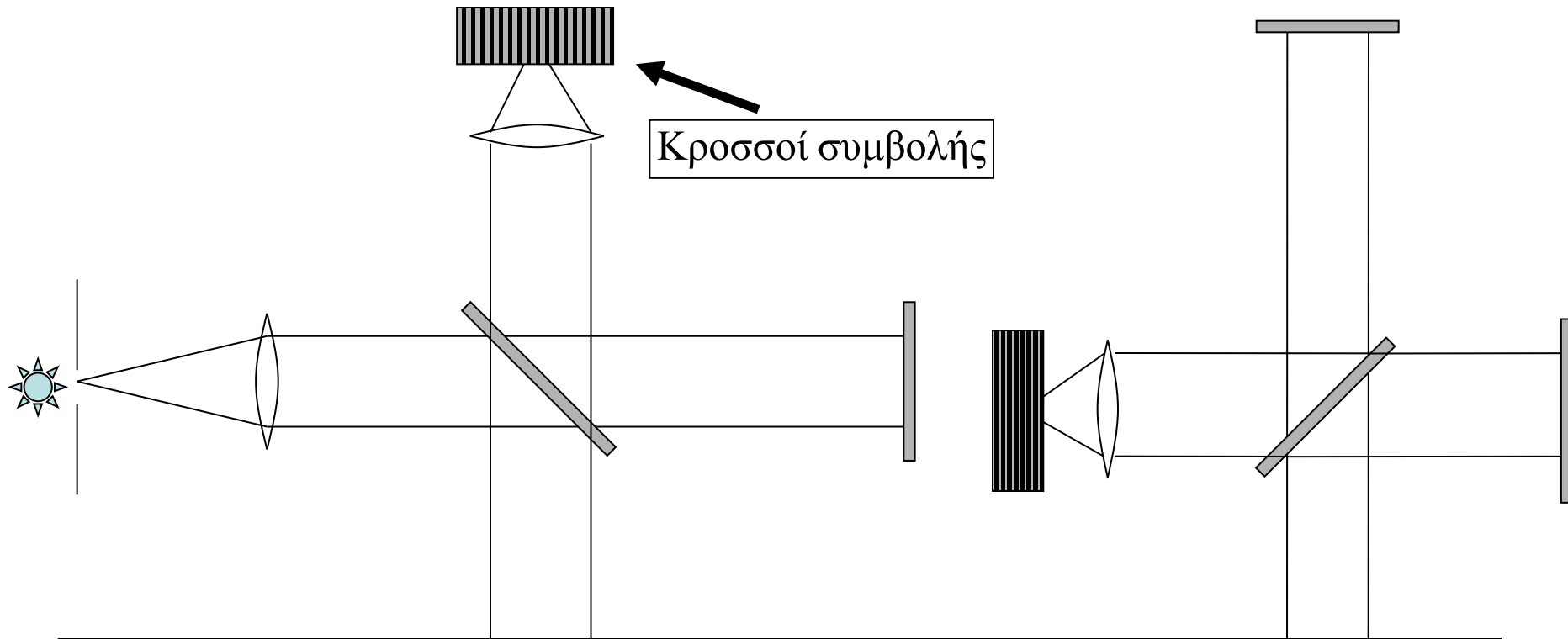
Οι κροσσοί συμβολής ΔΕΝ μετατοπίζονται στην πραγματικότητα.

Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου πρέπει να τροποποιηθούν!

Θα δούμε ότι οι κατάλληλοι μετασχηματισμοί είναι αυτοί του Lorentz, που μας οδηγούν στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας.

ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON-MORLEY

6

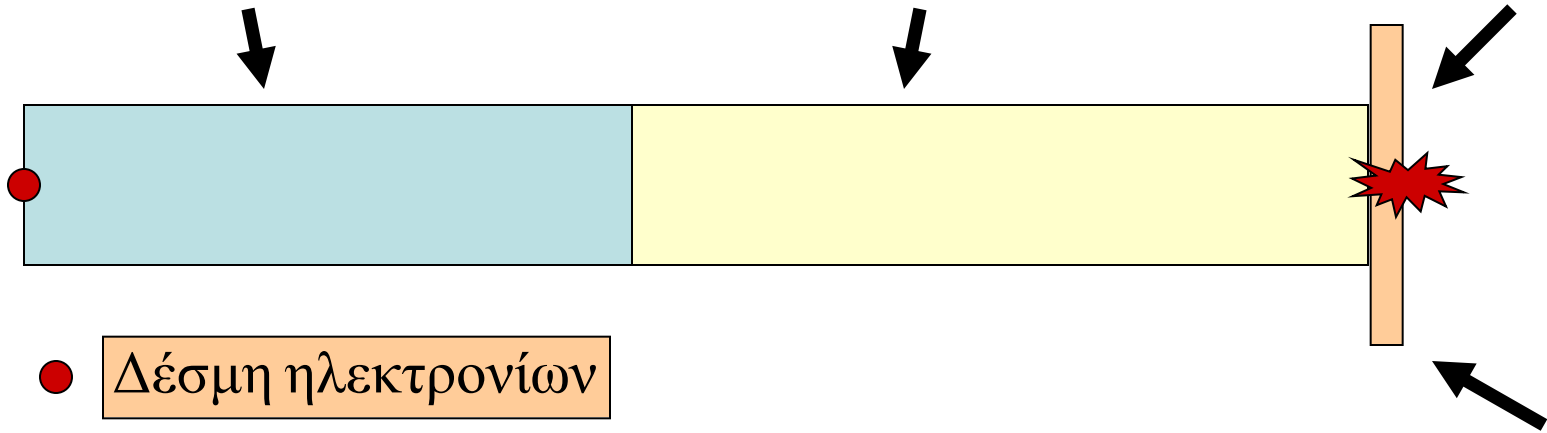
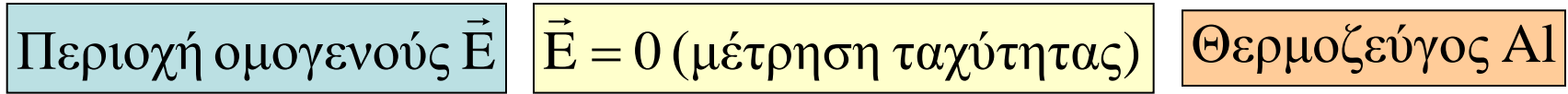


Εάν δεχτούμε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή σε κάθε σύστημα αναφοράς (άρα και σε αυτό της Γης)

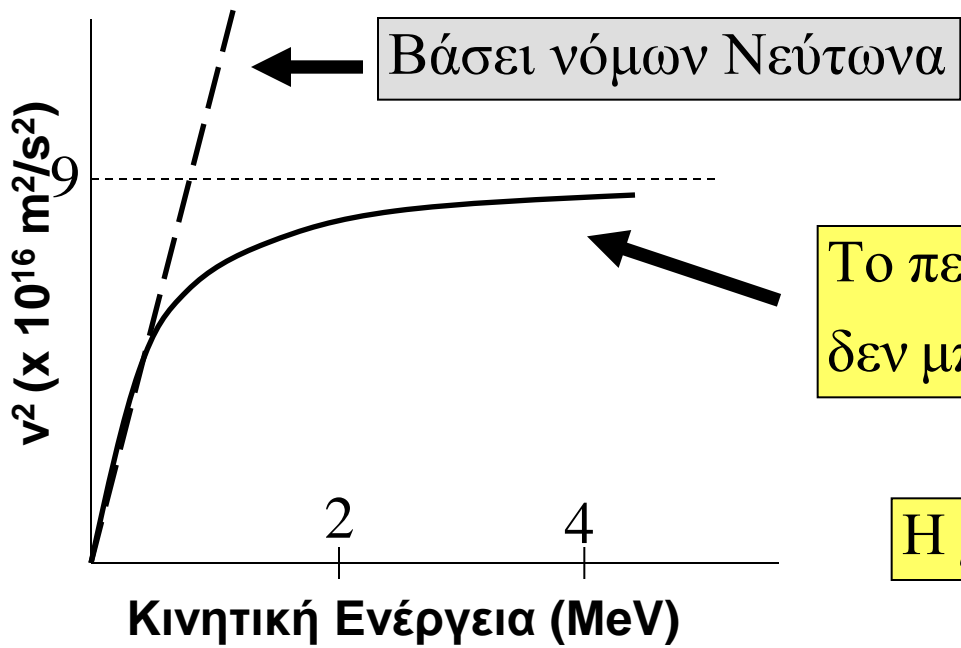
τότε εξηγείται εύκολα η απουσία μετατόπισης κροσσών συμβολής.

Για παρατηρητή πάνω στην Γη το φως χρειάζεται ίσο χρονικό διάστημα $\frac{2D}{c}$ και για τους δύο βραχίονες της πειραματικής διάταξης.

c: ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ



Εναπόθεση (μέτρηση) ενέργειας



Το πείραμα αποδεικνύει ότι η ταχύτητα δεν μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα!

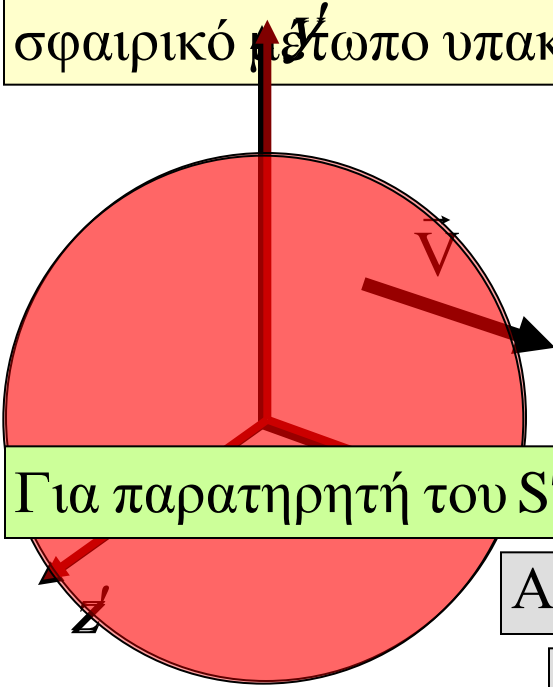
Η μέγιστη δυνατή ταχύτητα είναι c.

Το φως διαδίδεται στο κενό με την ίδια ταχύτητα c σε όλα τα συστήματα αναφοράς.

Ο χώρος είναι ισότροπος και ομογενής. Οι βασικοί νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Αν μία πηγή στην αρχή των αξόνων εκπέμπει φως την στιγμή $t_0 = 0$, το σφαιρικό κύμα υπακούει την στιγμή t την εξίσωση: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$. (1)

Έστω κινούμενο σύστημα S' που την χρονική στιγμή $t'_0 = 0$ έχει κοινή αρχή αξόνων O με το S . Και ο παρατηρητής στο S πρέπει να βλέπει σφαιρικό κύμα που εκπέμπεται από το O .



Για παρατηρητή του $S' \equiv (x', y', z')$ πρέπει να ισχύει: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$. (2)

Αν εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου

$$(t' = t, x' = x - Vt, y' = y, z' = z) \quad \text{παίρνουμε από την (2)}$$

$$x^2 - 2Vxt + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} V^2 t^2 = 2Vxt \Leftrightarrow V = 0 \text{ ή } V = 2x/t.$$

Βλέπουμε ότι οι (1) και (2) δεν μπορούν να αληθεύουν ταυτόχρονα αν ισχύουν οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.

Εφόσον όμως οι (1) και (2) αληθεύουν πειραματικά θα πρέπει οι μετασχηματισμοί μεταξύ συστημάτων αναφοράς να αλλάξουν μορφή.

Αντί για τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου ας δοκιμάσουμε τον

$$x' = \alpha x + \varepsilon t \quad (1), \quad y' = y \quad (2), \quad z' = z \quad (3), \quad t' = \delta x + \eta t \quad (4).$$

$$\text{Είναι : } dx' = \alpha dx + \varepsilon dt \text{ και } dt' = \delta dx + \eta dt.$$

$$\text{Επομένως : } \frac{dx'}{dt'} = \frac{\alpha dx + \varepsilon dt}{\delta dx + \eta dt} = \frac{\alpha dx/dt + \varepsilon}{\delta dx/dt + \eta}. \quad (5)$$

$$\text{Για σώμα ακίνητο στο S έχουμε από την (5) : } -V = \frac{\varepsilon}{\eta} \quad (6),$$

$$\text{ενώ για σώμα ακίνητο στο S' έχουμε } \alpha V + \varepsilon = 0 \quad (7).$$

$$\text{Άρα } \alpha = \eta \quad (8).$$

Χρησιμοποιώντας την (8) η εξίσωση σφαιρικού κύματος στο S' παίρνει την μορφή :

$$\left(\alpha^2 - c^2 \delta^2\right) x^2 + \left(2\alpha\varepsilon - 2c^2 \delta\alpha\right) xt + y^2 + z^2 = \left(c^2 \alpha^2 - \varepsilon^2\right) t^2 \quad (9).$$

$$\left(\alpha^2 - c^2 \delta^2\right) x^2 + \left(2\alpha\varepsilon - 2c^2 \delta\alpha\right) xt + y^2 + z^2 = \left(c^2 \alpha^2 - \varepsilon^2\right) t^2 \quad (9).$$

$$\text{Είναι ακόμη: } x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (10).$$

Για να ισχύουν οι (9) και (10) $\forall x, y, z, t$ πρέπει

$$\alpha^2 - c^2 \delta^2 = 1 \quad (11), \quad 2\alpha\varepsilon - 2c^2 \delta\alpha = 0 \quad (12), \quad c^2 \alpha^2 - \varepsilon^2 = c^2 \quad (13).$$

Επειδή $\varepsilon = -V\alpha$ η (13) δίνει: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (14)$ και $\varepsilon = \frac{-V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (15).$

Ακόμη βρίσκουμε $\delta = \frac{-Vc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (16)$ και $\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (17).$

Άρα ο νέος μετασχηματισμός (μετασχηματισμός Lorentz) είναι ο

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (18), \quad y' = y \quad (19), \quad z' = z \quad (20), \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (21).$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (18), \quad y' = y \quad (19), \quad z' = z \quad (20), \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (21).$$

Αν θέσουμε $\beta \equiv \frac{V}{c}$ και $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ τότε ο μετασχηματισμός Lorentz γράφεται

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \quad (22).$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \quad (23).$$

Έστω ράβδος μήκους L_0 για παρατηρητή σε σύστημα αναφοράς S μέσα στο οποίο η ράβδος είναι ακίνητη.

Το μήκος L_0 ονομάζεται μήκος ηρεμίας της ράβδου.

Πως μπορεί να μετρηθεί το μήκος;

Για δεδομένη χρονική στιγμή είναι $L_0 = x_2 - x_1$,

όπου x_1 και x_2 είναι οι συντεταγμένες της αρχής και του πέρατος της ράβδου

όπως μετρούνται από παρατηρητές του S κάποια στιγμή t (με συγχρονισμένα ρολόγια).

Κατά τον ίδιο τρόπο, το μήκος L της ράβδου για κινούμενο σύστημα S' προκύπτει από τα x'_1 και x'_2 που έχουν παρατηρητές του S' στα δύο άκρα της ράβδου την *ίδια χρονική στιγμή* t' .

Από τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου έχουμε

$$x_1 = (x'_1 + Vt'_1) \text{ και } x_2 = (x'_2 + Vt'_2) \stackrel{t'_1=t'_2}{=} (x'_2 + Vt'_1).$$

$$\text{Επομένως: } L_0 \equiv x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) = L.$$

Δηλαδή οι παρατηρητές στα S και S' βρίσκουν το ίδιο μήκος.

Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε :

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'_1) \text{ και } x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'_2) \stackrel{t'_1=t'_2}{=} \gamma(x'_2 + Vt'_1).$$

$$\text{Επομένως: } L_0 \equiv x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L \text{ ή αλλιώς } L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Δηλαδή το μήκος της ράβδου είναι μικρότερο στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η ράβδος κινείται.

Συστολή του μήκους (συστολή Lorentz - Fitzgerald).

Από τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου έχουμε

$$x_1 = (x'_1 + Vt'_1) \text{ και } x_2 = (x'_2 + Vt'_2) \stackrel{t'_1=t'_2}{=} (x'_2 + Vt'_1).$$

$$\text{Επομένως: } L_0 \equiv x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) = L.$$

Δηλαδή οι παρατηρητές στα S και S' βρίσκουν το ίδιο μήκος.

Από τον μετασχηματισμό Lorentz έχουμε :

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'_1) \text{ και } x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'_2) \stackrel{t'_1=t'_2}{=} \gamma(x'_2 + Vt'_1).$$

$$\text{Επομένως: } L_0 \equiv x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L \text{ ή αλλιώς } L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Δηλαδή το μήκος της ράβδου είναι μικρότερο στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η ράβδος κινείται.

Συστολή του μήκους.

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \quad (22).$$

Έστω ότι από τα άκρα της ράβδου που ηρεμεί στο S εκπέμπονται την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ φωτεινές δέσμες που λαμβάνονται από παρατηρητές του S'.

Αν υποθέσουμε ότι για $t_0 = 0$ η αρχή της ράβδου βρίσκεται στις αρχές των αξόνων και του S και του S',

τότε οι παρατηρητές του S' μετρούν για τις συντεταγμένες των άκρων :

$$x'_1 = \gamma(0 - \beta c0) = 0 \text{ και } x'_2 = \gamma(L_0 - \beta c0) = \gamma L_0.$$

$$\text{Επομένως: } \Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma L_0.$$

Το αποτέλεσμα διαφέρει από αυτό της συστολής του μήκους. Τι συμβαίνει;

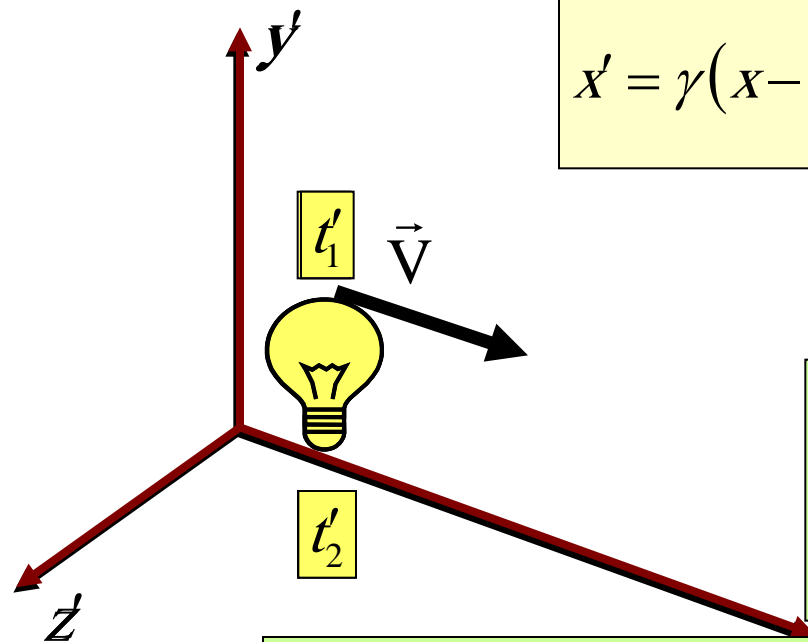
Για το παραπάνω "πείραμα" συγκρίνουμε $\Delta x'$ με Δx για $\Delta t = 0$.

Στην μέτρηση για την συστολή του μήκους $\Delta x'$ με Δx για $\Delta t' = 0$.

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \quad (22).$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι $\Delta y' = \Delta y$ και $\Delta z' = \Delta z$,

ή αλλιώς δεν υπάρχει συστολή μήκους για τις διαστάσεις που είναι κάθετες στην διεύθυνση σχετικής ταχύτητας των δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς.



$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \quad (22).$$

Έστω λαμπτήρας που παραμένει ακίνητος στο σύστημα αναφοράς S.

Αν ο λαμπτήρας ανάβει και σβήνει τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 (όπου t_1 και t_2 οι χρόνοι που μετράει παρατηρητής του S),

τότε η διαφορά $\tau \equiv t_2 - t_1$ ορίζει τον χρόνο ηρεμίας του γεγονότος (της εκπομπής φωτός από τον λαμπτήρα).

Παρατηρητής του S' μετράει χρόνους t'_1 και t'_2 για τους οποίους ισχύει :

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta x_2}{c}\right) \quad \text{και} \quad t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta x_1}{c}\right).$$

$$t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{\beta x_2}{c} \right) \quad (2) \quad \text{και} \quad t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{\beta x_1}{c} \right). \quad (3)$$

Επειδή $x_1 = x_2$, οι (2) και (3) δίνουν:

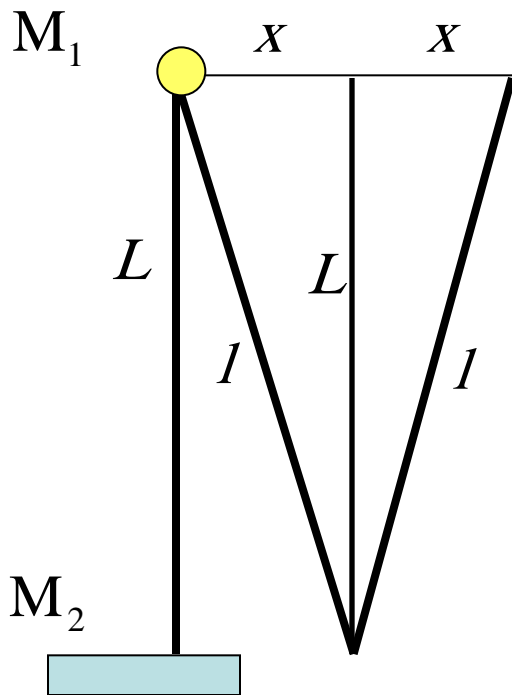
$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4)$$

Ένα γεγονός που συμβαίνει σε καθορισμένη θέση ενός συστήματος αναφοράς S και διαρκεί χρονικό διάστημα τ (ως προς το S),

διαρκεί μεγαλύτερο διάστημα $\Delta t' = \gamma\tau > \tau$
για παρατηρητή σε κινούμενο σύστημα S'.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διαστολή του χρόνου.

ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΧΡΟΝΟΥ



$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \quad (22).$$

Χρόνος που μετράει παρατηρητής του S για να πάει το φως από το M_1 στο M_2 και πίσω στο M_1 : $\tau = 2L/c$.

Παρατηρητής του κινούμενου συστήματος S' βλέπει τα M_1 και M_2 να κινούνται.

Το φως διανύει στο S' μήκος $2l = 2\sqrt{L^2 + (Vt'/2)^2} = ct'$,

όπου t' είναι ο χρόνος που μετράει για το φαινόμενο παρατηρητής του S' .

$$\text{Επομένως } 4\left[L^2 + (Vt'/2)^2\right] = (ct')^2 \Rightarrow \left(\frac{2L}{c}\right)^2 + \left(\frac{V}{c}\right)^2 t'^2 = t'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\beta \equiv V/c).$$

Η μεγάλη πλειοψηφία των στοιχειωδών σωματιδίων είναι μετασταθείς οντότητες.

Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα από την παραγωγή τους διασπώνται σε κάποια άλλα σωματίδια.

Έστω ότι αυτό το χρονικό διάστημα είναι τ στο σύστημα αναφοράς στο οποίο το σωματίδιο παραμένει σε ηρεμία.

Αυτός ο χρόνος τ ονομάζεται χρόνος ζωής του σωματιδίου.

Για παράδειγμα, ο μέσος χρόνος τ για μεσόνιο π^+ είναι $2,5 \times 10^{-8} \text{ s}$.

Αν υποθέσουμε ότι το μεσόνιο π^+ κινείται με ταχύτητα $\beta = 0,90$,

τότε ο χρόνος ζωής που μετράει ακίνητος παρατηρητής

(σύστημα του εργαστηρίου) είναι $\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 5,7 \times 10^{-8} \text{ s}$.

Ο μεγαλύτερος χρόνος ζωής στο σύστημα του εργαστηρίου έχει ως αποτέλεσμα το σωματίδιο να διανύει μεγαλύτερο χωρικό διάστημα από αυτό που θα περίμενε κανείς από μη σχετικιστικό υπολογισμό.

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \quad (22).$$

$$\text{Είναι } v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c dt)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta dx}{c}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}.$$

$$\text{Είναι ακόμη: } v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{\beta dx}{c}\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)}$$

$$\text{και } v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)}.$$

$$\text{Είναι } v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)}.$$

$$\text{Έστω ότι } v_x = c. \text{ Τότε } v'_x = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c^2} c} = c \frac{c - V}{c - V} = c.$$

Δηλαδή το φως κινείται με την ίδια ταχύτητα σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

$$\text{Αν } v_y = c \text{ και } v_x = 0, \text{ τότε } v'_y = \frac{c}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} 0\right)} = c \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\text{και } v'_x = \frac{0 - V}{1 - \frac{\beta}{c} 0} = -V.$$

$$\text{Επομένως για το μέτρο της ταχύτητας βρίσκουμε } v = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = c.$$

Έστω δύο σώματα που κινούνται το ένα προς το άλλο με ταχύτητες $0,9c$.

Ποια είναι η ταχύτητα του ενός σώματος ως προς το άλλο;

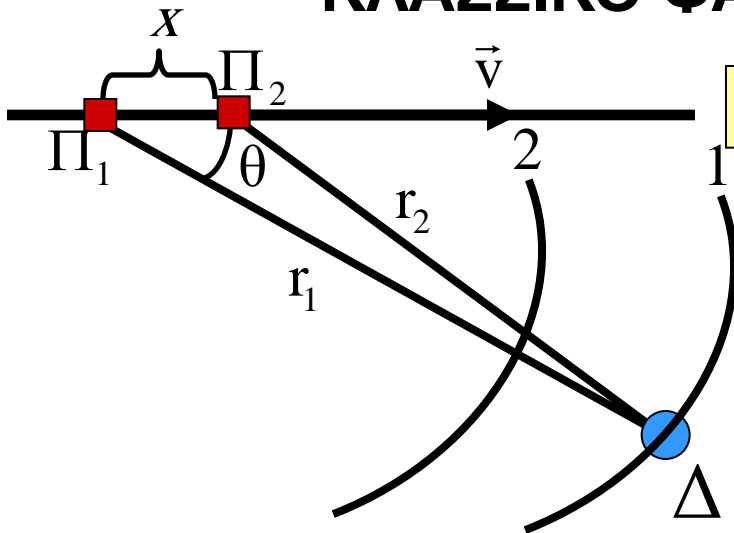
$$\text{Είναι } v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{\beta}{c} v_x}.$$

Έστω S' το σύστημα αναφοράς στο οποίο το πρώτο σώμα παραμένει ακίνητο.

Είναι $V = -0,9c$ και από την (1) βρίσκουμε για $v_x = 0,9c$

$$v'_x = \frac{0,9c - (-0,9)c}{1 - \frac{-0,9}{c} 0,9c} = \frac{1,8c}{1,81} = 0,994c.$$

Αντίθετα με την κλασσική μηχανική, η σχετική ταχύτητα δύο σωμάτων δεν υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός.



Ένας πομπός Π εκπέμπει φως προς δέκτη Δ .

Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει παλμό προς τον δέκτη την χρονική στιγμή $t = 0$.

Ο παλμός 1 φτάνει στον Δ μετά από χρόνο $t_1 = r_1/c$.

Μετά από χρόνο $1/f_{\Pi}$ έχουμε δεύτερο παλμό, φτάνει στον Δ μετά από $t_2 = r_2/c$.

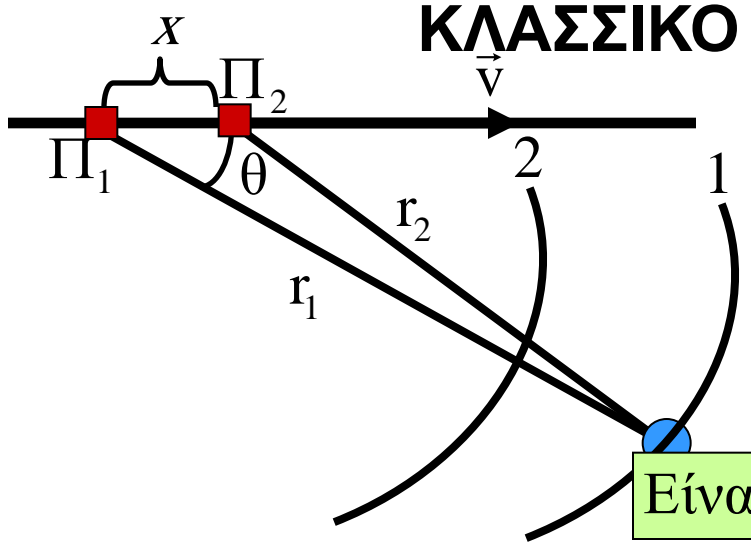
όπου f_{Π} η συχνότητα όπως την μετράει ο πομπός.

Για τον Δ μεσολαβεί μεταξύ των παλμών χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{1}{f_{\Pi}} + \frac{r_2}{c} - \frac{r_1}{c}$.

$$\text{Νόμος συνημιτόνων : } r_2 = \sqrt{r_1^2 + x^2 - 2r_1 x \cos \theta}$$

$$\text{Για } x \ll r_1 \text{ έχουμε : } r_1 \approx r_2 + x \cos \theta.$$

ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER



$$\Delta t = \frac{1}{f_{\Pi}} + \frac{r_2}{c} - \frac{r_1}{c} \quad (1)$$

Για $x \ll r_1$ έχουμε:
 $r_1 \approx r_2 + x \cos \theta$.

Από την (1) τότε παίρνουμε:
 $\Delta t = 1/f_{\Pi} - x \cos \theta / c$.

Είναι όμως: $x f_{\Pi} = v$

Οπότε: $\Delta t = \frac{1}{f_{\Pi}} (1 - v \cos \theta / c)$,

και για την συχνότητα f_{Δ} που μετράει ο Δ : $f_{\Delta} = \frac{f_{\Pi}}{1 - v \cos \theta / c}$

Γενικότερα, αν ο πομπός και ο δέκτης κινούνται με ταχύτητες v_{Π} και v_{Δ} ο ένας προς τον άλλον

και έχουμε κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα V , τότε

$$f_{\Delta} = f_{\Pi} \frac{1 + v_{\Delta} / V}{1 - v_{\Pi} / V}$$

Για παράδειγμα, αν $v_{\Delta} = 0$ τότε $f_{\Delta} > f_{\Pi}$ για $v_{\Pi} > 0$ και $f_{\Delta} < f_{\Pi}$ για $v_{\Pi} < 0$.

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

$$f_{\Delta} = f_{\Pi} \frac{1 + v_{\Delta}/V}{1 - v_{\Pi}/V}$$

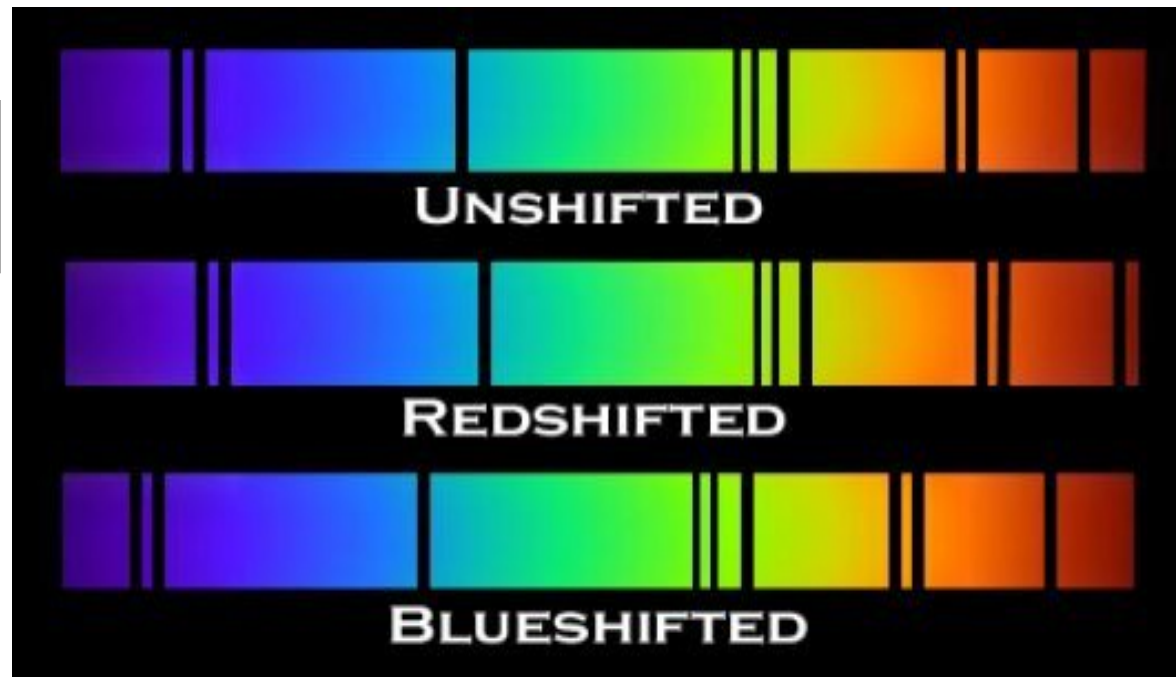
Αν $v_{\Delta} = 0$ και $v_{\Pi} \ll V$ τότε $f_{\Delta} \approx f_{\Pi} (1 + v_{\Pi}/V)$.

Για παράδειγμα, αν $v_{\Delta} = 0$ τότε $f_{\Delta} > f_{\Pi}$ για $v_{\Pi} > 0$ και $f_{\Delta} < f_{\Pi}$ για $v_{\Pi} < 0$.

Αν έχουμε εκπομπή φωτός από πηγή φωτός που απομακρύνεται από εμάς τότε όλες οι συχνότητες (το φάσμα) θα φαίνονται με χαμηλότερες συχνότητες (μετατόπιση προς το ερυθρό).

Αυτό ακριβώς παρατηρείται για μακρινούς αστέρες.

Μετατόπιση των γραμμών υδρογόνου



Έχουμε για την συχνότητα f_{Δ} που μετράει ο Δ : $f_{\Delta} = \frac{f_{\Pi}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$ (1)

Για κινούμενο πομπό μεσολαβεί χρονικό διάστημα $\frac{1}{f_{\Pi}}$ μεταξύ δύο κυμάτων. Ο χρόνος αυτός είναι ο χρόνος ηρεμίας (ή ίδιος χρόνος).

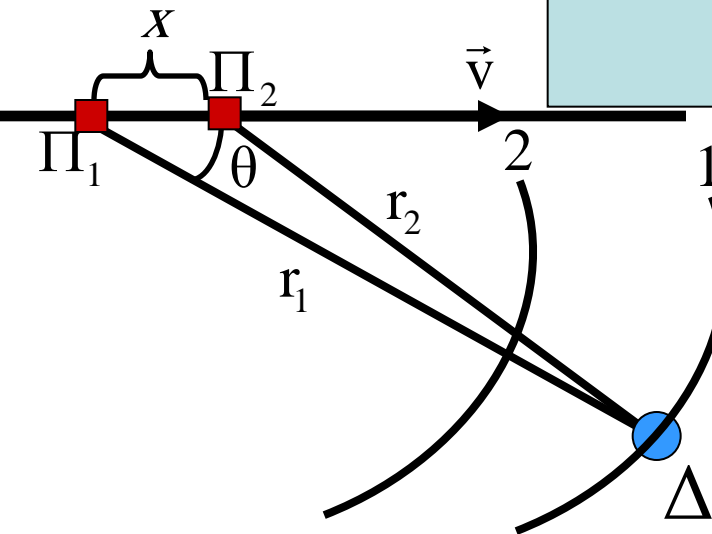
Για ακίνητο δέκτη και κινούμενο πομπό το χρονικό διάστημα που μετράει ο δέκτης (λόγω διαστολής χρόνου) και που αντιστοιχεί στο $\Delta t_{\Pi} = \frac{1}{f_{\Pi}}$ είναι

$$\Delta t_{\Delta} = \frac{1}{f_{\Pi} \sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε : $f_{\Delta} = f_{\Pi} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$

Σχετικιστικό φαινόμενο Doppler.

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε : $f_{\Delta} = f_{\Pi} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$ (3).



Διαμήκες σχετικιστικό φαινόμενο Doppler :
Για $\theta = 0^\circ$ έχουμε από την (3)

$$f_{\Delta} = f_{\Pi} \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c} = f_{\Pi} \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (4).$$

Εγκάρσιο σχετικιστικό φαινόμενο Doppler : Για $\theta = 90^\circ$ έχουμε από την (3)

$$f_{\Delta} = f_{\Pi} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c} \cdot 0} = f_{\Pi} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (5).$$

Οι μετρήσεις της μετατόπισης προς το ερυθρό του φάσματος γαλαξιών κατέδειξε ότι οι ταχύτητες v με τις οποίες αυτοί απομακρύνονται από την Γη είναι ανάλογες της απόστασής τους r από το πλανήτη μας.

$$\text{Είναι } v = Hr \quad (1)$$

H είναι η σταθερά του Hubble με εμπειρική τιμή $2,3 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$.

Χρόνος Hubble ("ηλικία Σύμπαντος"): $1/H \approx 13,8 \times 10^9$ χρόνια.

Ακτίνα Hubble ("ακτίνα Σύμπαντος"): $c/H \approx 13,8 \times 10^9$ έτη φωτός.

$$L = L_0/\gamma, \Delta t = \gamma\tau \quad (1).$$

Οι μετασχηματισμοί (1) ισχύουν και όταν :

1) Το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται η διεύθυνση της ταχύτητας.

2) Η ταχύτητα είναι σταθερή, εκτός από μικρά διαστήματα επιτάχυνσης ή επιβράδυνσης.

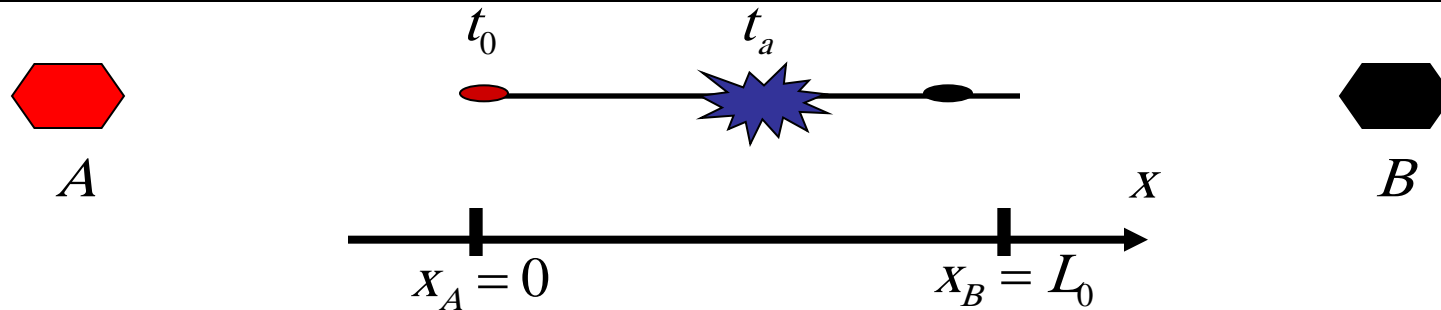
Για τους παραπάνω λόγους η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας εφαρμόζεται στην κίνηση (και διάσπαση) σωματιδίων σε κυκλικούς επιταχυντές.

Δύο ίδια διαστημόπλοια A και B κινούνται κατά μήκος του άξονα x , με ίσες και αντίθετες ταχύτητες $v = c/4$ ως προς αδρανειακό παρατηρητή Π. Την στιγμή $t_0 = 0$, ως προς τον Π, τα πλησιέστερα άκρα των A και B βρίσκονται ως προς τον Π στα σημεία $x_A = 0$ και $x_B = L_0$, αντίστοιχα, και από το A εκτοξεύεται προς το B πύραυλος με σχετική, ως προς το A, ταχύτητα $u = c/2$.

Η εκτόξευση συνοδεύεται από εκπομπή φωτός, η οποία γίνεται αισθητή από το B προκαλώντας ακαριαία εκτόξευση προς το A, με αποτέλεσμα την αμοιβαία αλληλοεξουδετέρωση των πυραύλων.

Να υπολογιστούν : α) Το χρονικό διάστημα, ως προς τον Π, που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο εκτοξεύσεις, β) Το σημείο και η χρονική στιγμή t_a αλληλοεξουδετέρωσης των δύο πυραύλων, ως προς τον Π, γ) Η απόσταση των A και B, ως προς τον Π, την στιγμή $t = t_a$. δ) Η απόσταση των A και B την στιγμή $t = t_a$, ως προς το καθένα από αυτά.

Δύο ίδια διαστημόπλοια A και B κινούνται κατά μήκος του άξονα x , με ίσες και αντίθετες ταχύτητες $v = c/4$ ως προς αδρανειακό παρατηρητή Π . Την στιγμή $t_0 = 0$, ως προς τον Π , τα πλησιέστερα άκρα των A και B βρίσκονται ως προς τον Π στα σημεία $x_A = 0$ και $x_B = L_0$, αντίστοιχα, και από το A εκτοξεύεται προς το B πύραυλος με σχετική, ως προς το A, ταχύτητα $u = c/2$.



Να υπολογιστούν : α) Το χρονικό διάστημα, ως προς τον Π , που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο εκτοξεύσεις,

ΛΥΣΗ : α) Το διάστημα $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$ είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει το φως την απόσταση από το A στο B, ενώ το B έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά.

$$\text{Είναι : } ct_1 + v_B t_1 = L_0 \Rightarrow ct_1 + ct_1/4 = L_0 \Rightarrow t_1 = \frac{4L_0}{5c}$$

Να υπολογιστούν : β) Το σημείο και η χρονική στιγμή t_a αλληλοεξουδετέρωσης των δύο πυραύλων, ως προς τον Π, γ) Η απόσταση των Α και Β, ως προς τον Π, την στιγμή $t = t_a$. δ) Η απόσταση των Α και Β την στιγμή $t = t_a$, ως προς το καθένα από αυτά.

Η απόσταση των Α και Β την στιγμή της δεύτερης εκτόξευσης είναι

$$L_1 = L_0 - 2v_B t_1 = L_0 - 2 \frac{c}{4} \frac{4L_0}{5c} = \frac{3L_0}{5}.$$

Η ταχύτητα του κάθε πυραύλου ως προς Π έχει μέτρο $(v_{\Pi})_{\Pi} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{c/2 + c/4}{1+\frac{c^2}{8c^2}} = \frac{2}{3}c$.

Κατά την στιγμή της εκτόξευσης του 2^{ου} πυραύλου Π_Β ο 1^{ος} πύραυλος

$$\Pi_A \text{ βρίσκεται στην θέση } x_{\Pi_A}(t_1) = (v_{\Pi})_{\Pi} t_1 = \frac{8}{15} L_0,$$

ενώ για τον Π_Β είναι $x_{\Pi_B}(t_1) = L_0 - v_B t_1 = \frac{3L_0}{5}$.

Άρα: $\Delta x_{\Pi} \equiv x_{\Pi_B}(t_1) - x_{\Pi_A}(t_1) = \frac{4}{15} L_0$.

Ο χρόνος για να καλυφθεί αυτή η απόσταση είναι $\Delta t_1 = \Delta x_{\Pi} / (2(v_{\Pi})_{\Pi}) = \frac{1}{5} \frac{L_0}{c}$.

Να υπολογιστούν : β) Το σημείο και η χρονική στιγμή t_a αλληλοεξουδετέρωσης των δύο πυράλων, ως προς τον Π, γ) Η απόσταση των Α και Β, ως προς τον Π, την στιγμή $t = t_a$. δ) Η απόσταση των Α και Β την στιγμή $t = t_a$, ως προς το καθένα από αυτά.

Ο χρόνος για να καλυφθεί αυτή η απόσταση είναι $\Delta t_1 = \Delta x_{\Pi} / (2(v_{\Pi})_{\Pi}) = \frac{1}{5} \frac{L_0}{c}$.

$$\text{Άρα: } t_a = t_1 + \Delta t_1 = \frac{4L_0}{5c} + \frac{L_0}{5c} = \frac{L_0}{c}.$$

Αυτή τη στιγμή ο Π_Α (άρα και η αλληλοεξουδετέρωση) βρίσκεται

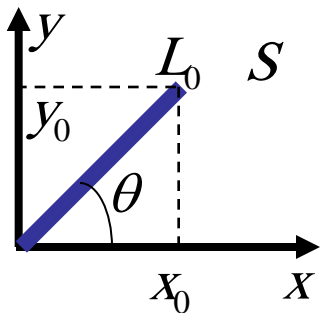
$$\text{στην θέση: } X_a = t_a (v_{\Pi})_{\Pi} = \frac{2L_0}{3}.$$

$$\gamma) \text{ Απόσταση } \Delta x_{AB} \text{ κατά την στιγμή } t_a : \Delta x_{AB} = L_0 - 2ut_a = L_0 - 2 \frac{c}{4} \frac{L_0}{c} = \frac{L_0}{2}.$$

δ) Ως προς Α και Β η απόσταση Δx_{AB} εμφανίζει συστολή

$$\Delta x'_{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} \Delta x_{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \frac{L_0}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8} L_0.$$

Έστω σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V \hat{x}$ ως προς άλλο σύστημα S . Να υπολογίσετε το μήκος της ράβδου ως προς το S' και τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα x' , όταν ξέρετε ότι στο σύστημα S η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x και έχει μήκος L_0 .



ΛΥΣΗ: Είναι $x_0 = L_0 \cos \theta$, $y_0 = L_0 \sin \theta$, $L_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ και

$x'_0 = L \cos \theta'$, $y'_0 = L \sin \theta'$, $L = \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}$.

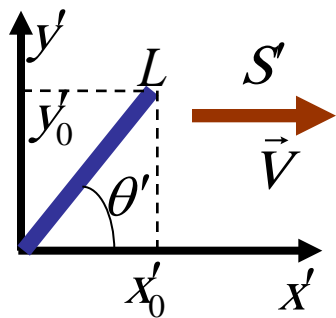
Από τους μετασχηματισμούς του Lorentz έχουμε συστολή μήκους $x'_0 = \sqrt{1 - \beta^2} x_0$, ενώ για τον άξονα των y ισχύει $y'_0 = y_0$.

Είναι $\tan \theta' = \frac{y'_0}{x'_0} = \frac{y_0}{x_0/\gamma} = \gamma \tan \theta$.

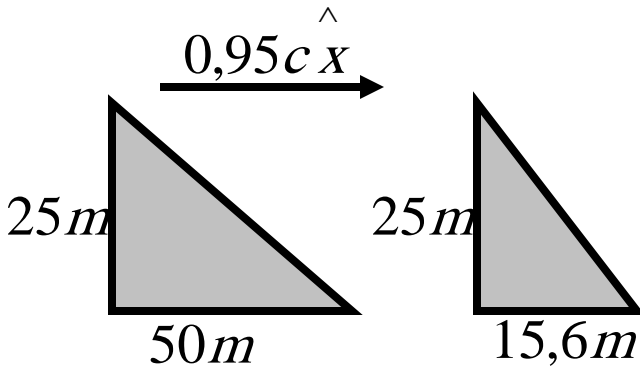
Για το μήκος L στο S' βρίσκουμε:

$L = \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0} = \sqrt{(1 - \beta^2)x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(1 - \beta^2)L_0^2 \cos^2 \theta + L_0^2 \sin^2 \theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}$.



Διαστημόπλοιο έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους ηρεμίας 50 m και 25 m, αντίστοιχα. Τι σχήμα βλέπει ακίνητος παρατηρητής όταν το διαστημόπλοιο περνάει από μπροστά του με ταχύτητα $0,95c$ κατά την κατεύθυνση της μεγάλης κάθετου;



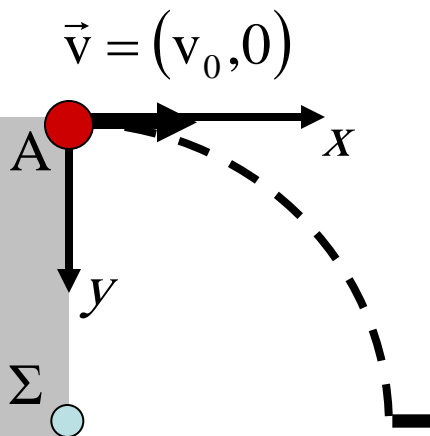
ΛΥΣΗ: Ο ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται μια συστολή για την κάθετο κατά τον άξονα των x και μετράει μήκος για την μεγάλη κάθετο :

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = 50m \sqrt{1 - (0,95)^2} = 15,6m$$

Για την άλλη κάθετη πλευρά μετράει το ίδιο μήκος και την ίδια διεύθυνση, αφού η πλευρά αυτή είναι κάθετη στην διεύθυνση της κίνησης.

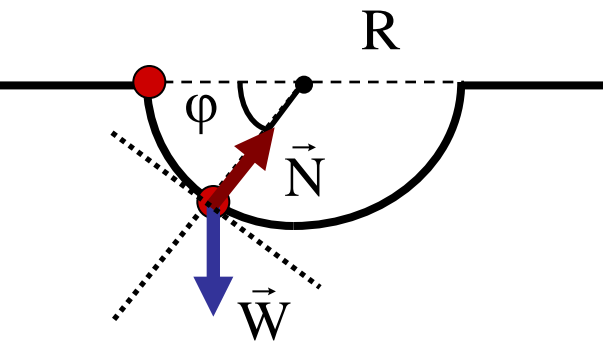
Άρα το διαστημόπλοιο φαίνεται ως ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 15,6 m και 25 m.

Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v} = (v_0, 0)$ με σκοπό να πετύχει στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\vec{V} = (v_1, 0)$ οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα ($t = 0$). Η αντίσταση του αέρα, που επενεργεί μόνο στη σφαίρα, είναι $:-k\vec{v}$ ($k > 0$). α) Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης της σφαίρας. β) Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου. γ) Βρείτε τα $x(t)$, $y(t)$ της σφαίρας (θεωρώντας το Α ως αρχή των αξόνων). δ) Γράψτε τις σχέσεις που υπακούουν τα $x(t)$, $y(t)$ αν η σφαίρα συναντά τον στόχο κάποια στιγμή t_0 . ε) Αν ισχύει το δ), δείξτε ότι $t_0 = \frac{kh}{mg(1 - v_1/v_0)}$.



Χρησιμοποιούμε τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα που μας δίνει την διανυσματική εξίσωση κίνησης όταν γνωρίζουμε όλες τις δυνάμεις... (Σημείωση: θυμηθείτε τι είπαμε στην παράδοση του μαθήματος σχετικά με την απαλοιφή μεταβλητής(ων) που δεν αποτελούν ζητούμενα του προβλήματος).

Μικρή σφαίρα μάζας m ξεκινά να ολισθαίνει χωρίς τριβές σε ημικυλινδρική κοιλότητα ακτίνας R . Να βρείτε την δύναμη που ασκεί το κυλινδρικό τοίχωμα στην σφαίρα ως συνάρτηση της γωνίας φ (Σημείωση: Χρησιμοποιείτε πολικές συντεταγμένες).

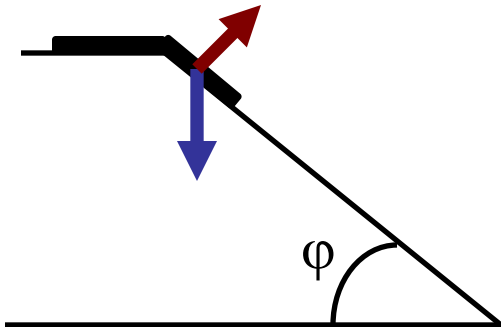


Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και λαμβάνουμε υπόψιν ότι το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση....

Ομογενής αλυσίδα συνολικού μήκους L και μάζας M είναι τοποθετημένη έτσι ώστε τη χρονική στιγμή $t = 0$ τμήμα της μήκους x_0 να βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ . Αν δεν υπάρχουν τριβές βρείτε την ταχύτητα που έχει αποκτήσει η αλυσίδα όταν βρίσκεται πια εξ ολοκλήρου στο κεκλιμένο επίπεδο.

Αν $m(t)$ η μάζα της αλυσίδας που βρίσκεται την χρονική στιγμή t πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, τότε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m(t)g \sin \varphi = M \frac{dv}{dt}.$$



Οι νόμοι διατήρησης φυσικών μεγεθών, όπως η ενέργεια, η ορμή και η στροφορμή, απλοποιούν πολλές φορές το πρόβλημα της κίνησης ενός σώματος υπό την επίδραση δυνάμεων, αφού βοηθούν στον προσδιορισμό χαρακτηριστικών της κίνησης χωρίς την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης.

Σε ένα σύστημα σωμάτων για το οποίο οι αλληλεπιδράσεις δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο, διατηρείται μία ποσότητα που ονομάζεται ενέργεια του συστήματος.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ - ΕΡΓΟ

Στην Μηχανική η ενέργεια είναι άμεσα συνυφασμένη με την έννοια του έργου μιας δύναμης.

Έργο W που παράγει δύναμη F κατά την μετακίνηση σώματος από θέση y_0 σε θέση y : $W \equiv F(y-y_0)$.

Είναι ακόμη: $U = -W_{1 \rightarrow 2} \equiv -\int_{y_1}^{y_2} F(y)dy$,

όπου U η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας από το 1 στο 2 λόγω του πεδίου της δύναμης F .

ή γενικότερα $W_{1 \rightarrow 2} \equiv \int_{y_1}^{y_2} F(y)dy$.

Επομένως: $F(y) = -\frac{dU}{dy}$.

Παράδειγμα: Η δυναμική ενέργεια μάζας M μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης είναι $U = Mgh$, όπου h το ύψος που βρίσκεται το σώμα (υποθέτοντας μηδενική ενέργεια στην επιφάνεια).

Κατά την πτώση σώματος και σε οποιοδήποτε ενδιάμεση ύψος y ισχύει $\frac{1}{2}Mv^2 + Mgy = Mgh = \text{σταθερά (ολική ενέργεια)}$, με $K = \frac{1}{2}Mv^2$ την κινητική ενέργεια του σώματος.

Στην Μηχανική η ενέργεια είναι άμεσα συνυφασμένη με την έννοια του έργου μιας δύναμης.

Έργο W που παράγει δύναμη F κατά την μετακίνηση σώματος από θέση y_0 σε θέση y : $W \equiv F(y-y_0)$.

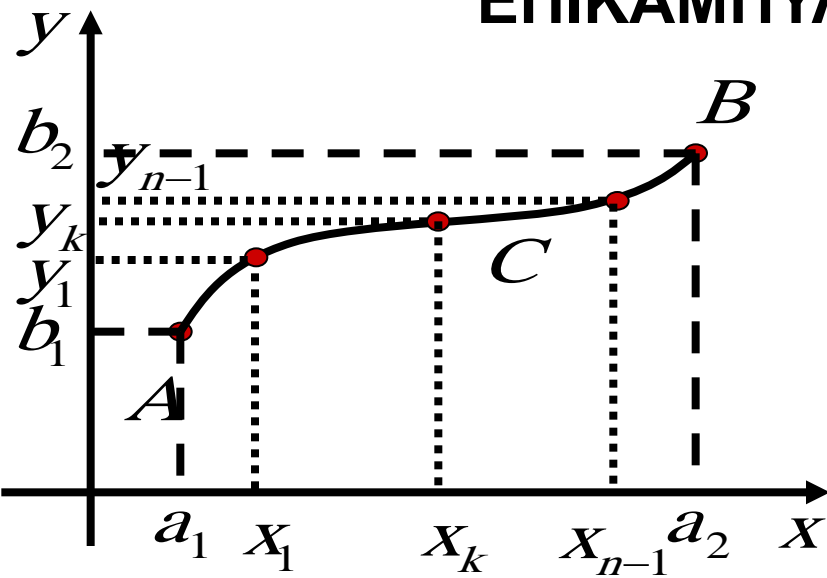
$$\text{ή γενικότερα } W_{1 \rightarrow 2} \equiv \int_{y_1}^{y_2} F(y) dy.$$

Στις 3 διαστάσεις το έργο W που παράγει μία σταθερή δύναμη \vec{F} κατά την μετατόπιση $\Delta \vec{r}$ δίνεται από την σχέση: $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$.

Αν η δύναμη μεταβάλλεται με την θέση το έργο W δίνεται από την σχέση:

$$W = \lim_{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{F}(\vec{r}_j) \cdot \Delta \vec{r}_j = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

δηλαδή από ένα γραμμικό ή επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.



Έστω καμπύλη C στο επίπεδο xy. Έστω ακόμη ότι $A = (a_1, b_1)$ και $B = (a_2, b_2)$ είναι η αρχή και το πέρας, αντίστοιχα, για ένα τμήμα της C.

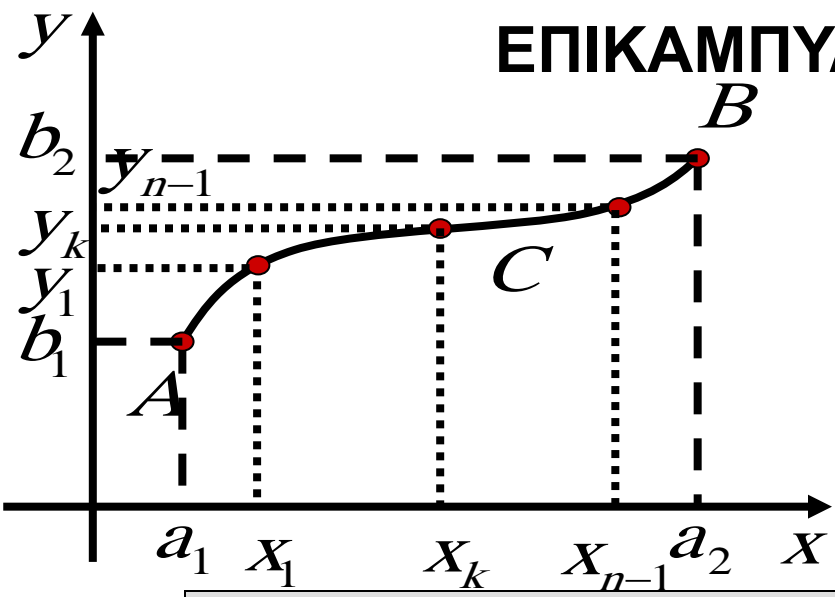
Χωρίζουμε την C σε n διαστήματα μέσω των σημείων (x_k, y_k) και ορίζουμε τα σημεία (ξ_k, η_k) στο μέσο του k διαστήματος.

Για δύο συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ μπορούμε να σχηματίσουμε το άθροισμα $I_C = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k$.

Αν υπάρχει το όριο του I_C για πολύ μικρά $\Delta x_k, \Delta y_k$, τότε

το όριο αυτό ορίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{R}(x, y) = \hat{x}P(x, y) + \hat{y}Q(x, y)$ πάνω στο τμήμα AB της καμπύλης C.

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{a_1}^{a_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

 μπορεί να υπολογιστεί με έναν από τους κάτωθι τρόπους :

1) Αν η καμπύλη περιγράφεται από την συνάρτηση $y = f(x)$, τότε

$$I_C = \int_{a_1}^{a_2} P(x, f(x))dx + Q(x, f(x)) f'(x)dx.$$

2) Αντίστοιχα, αν η C περιγράφεται από την συνάρτηση $x = g(y)$, τότε

$$I_C = \int_{b_1}^{b_2} P(g(y), y)g'(y)dy + Q(g(y), y)dy.$$

1) Αν η καμπύλη περιγράφεται από την παραμετρική μορφή
 $x = f(t)$ και $y = g(t)$, τότε
$$I_C = \int_{t_A}^{t_B} P(f(t), g(t)) f'(t)dt + Q(f(t), g(t))g'(t)dt,$$

όπου $a_1 = f(t_A), a_2 = f(t_B), b_1 = g(t_A), b_2 = g(t_B).$

Έστω δύναμη $\vec{F} = \hat{x}(3x^2 - 6yz) + \hat{y}(2y + 3xz) + \hat{z}(1 - 4xyz^2)$. Υπολογίστε το έργο για μετακίνηση α) από το $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$ κατά μήκος του δρόμου C $x = t, y = t^2, z = t^3$, β) κατά μήκος των ευθειών από το $(0,0,0)$ στο $(0,0,1)$, και μετά στο $(0,1,1)$.

$$\text{ΛΥΣΗ: α) Είναι } W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t^2 t^3) dt + (2t^2 + 3tt^3) d(t^2) + (1 - 4tt^2 t^6) d(t^3) =$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t^5) dt + (4t^3 + 6t^5) dt + (3t^2 - 12t^{11}) dt = 2.$$

β) Από το $(0,0,0)$ στο $(0,0,1)$ είναι $x = 0, y = 0, dx = 0, dy = 0$, ενώ το z μεταβάλλεται από το 0 στο 1. Άρα $W_1 = \int_{z=0}^1 [1 - 4(0)(0)z^2] dz = 1$.

Από το $(0,0,1)$ στο $(0,1,1)$ είναι $x = 0, z = 1, dx = 0, dz = 0$, ενώ το y μεταβάλλεται από το 0 στο 1. Άρα $W_2 = \int_{y=0}^1 [2y + 3(0)(1)] dy = 1$. Οπότε $W = W_1 + W_2 = 2$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του έργου και τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε :

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = M \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = M \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = M \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt =$$

$$= \frac{1}{2} M \int_{t_A}^{t_B} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} dt = \frac{1}{2} M \int_{t_A}^{t_B} \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{1}{2} M (v_B^2 - v_A^2).$$

$$\text{Δηλαδή: } W_{A \rightarrow B} = K_B - K_A,$$

όπου $K \equiv \frac{1}{2} M v^2$ είναι η κινητική ενέργεια του σώματος.

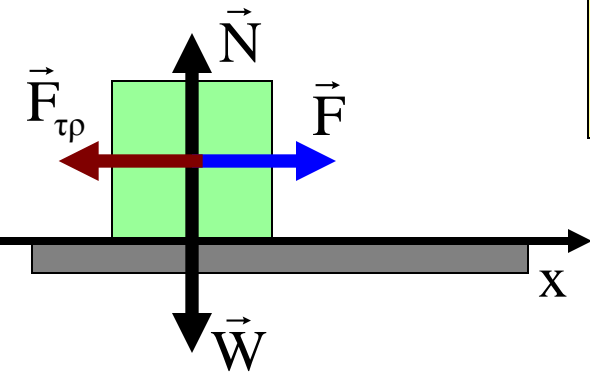
$$U_{A \rightarrow B} = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\text{εμείς}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Δηλαδή, αν απαιτείται να ασκήσουμε δύναμη για να πετύχουμε μετακίνηση από το A στο B, τότε η δυναμική ενέργεια αυξάνει.

Αν αντίθετα το πεδίο προκαλεί την μετατόπιση χωρίς να ασκούμε δύναμη, τότε παράγεται έργο και η δυναμική ενέργεια μειώνεται.

Η τάση στην φύση είναι τα σώματα να κινούνται από υψηλότερη σε χαμηλότερη δυναμική ενέργεια.

Ένα σώμα μάζας 6 kg το οποίο αρχικά ηρεμούσε σύρεται προς τα δεξιά επάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια υπό την δράση σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N. α) Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν αυτό έχει διανύσει απόσταση 3 m. β) Βρείτε την τελική ταχύτητα του σώματος αν η επιφάνεια έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0,15.



ΛΥΣΗ: α) Για οριζόντια μετατόπιση Δx προς τα δεξιά μόνο η F παράγει έργο: $W_F = F\Delta x = (12\text{N})(3\text{m}) = 36\text{ J}$.

Από το θεώρημα έργου - ενέργειας, και αν v_1 είναι το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο Δx , έχουμε

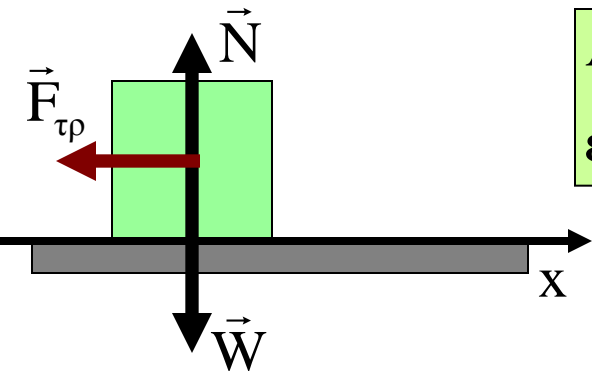
$$\frac{1}{2} M v_1^2 - \frac{1}{2} M v_0^2 = W_F \quad v_0=0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2W_F}{M}} = \sqrt{12} \text{ m/s}.$$

β) Η τριβή παράγει έργο που αντιτίθεται στην κίνηση:

$$W_{\text{τρ}} = -F_{\text{τρ}} \Delta x = -\mu mg \Delta x = -0,15 \times 6 \times 9,81 \times 3 = -26,5 \text{ J}.$$

$$\text{Επομένως: } \frac{1}{2} m v_1'^2 = W_{\text{tot}} = W_F + W_{\text{τρ}} \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{2W_{\text{tot}}}{m}} = \sqrt{\frac{19}{6}} \text{ m/s}.$$

Ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα 48 km/h μπορεί να σταματήσει στο ελάχιστο διάστημα των 40 m εάν χρησιμοποιηθούν τα φρένα του. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση ώστε το ίδιο αυτοκίνητο να σταματήσει εάν κινείται με ταχύτητα 96 km/h;



ΛΥΣΗ: Αν $F_{\text{τρ}}$ είναι η δύναμη της τριβής και d η ελάχιστη απόσταση που απαιτείται για το φρενάρισμα,

τότε το θεώρημα έργου - ενέργειας δίνει :

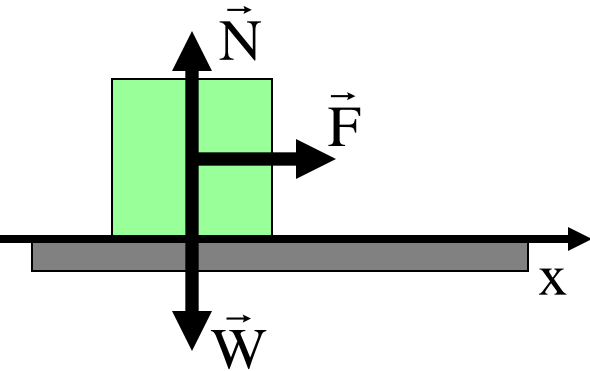
$$W_{\text{τρ}} = \Delta K \Rightarrow -F_{\text{τρ}} d = 0 - mv^2/2 \Rightarrow d = mv^2/2F_{\text{τρ}} .$$

Επομένως, εφόσον η τριβή παραμένει η ίδια για φρενάρισμα από διαφορετικές ταχύτητες v_1 και v_2 ,

ο λόγος των ελάχιστων αποστάσεων d_1 και d_2 είναι $\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$

και για τα δεδομένα του προβλήματος βρίσκουμε $d_2 = 40 \left(\frac{96}{48}\right)^2 = 160 \text{ m}$.

Δύναμη $F = 6t$ N (όπου t είναι ο χρόνος) εξασκείται πάνω σε σωματίδιο του οποίου η μάζα είναι 2 kg. Αν το σωματίδιο βρισκόταν αρχικά στην ηρεμία, να βρεθεί το έργο που παράγεται από την δύναμη στα πρώτα 2 s.



ΛΥΣΗ: Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m \frac{dv}{dt} = F \Rightarrow 2 \frac{dv}{dt} = 6t \Rightarrow v = \frac{3}{2} t^2 \text{ (m/s).}$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την θέση $x = \frac{1}{2} t^3$ (m).

Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο

$$W = \int F dx = \int_0^2 (6t) 1,5 t^2 dt = 9 \int_0^2 t^3 dt = \frac{9}{4} 2^4 = 36 \text{ J.}$$

Ελατήριο ασκεί σε μάζα M δύναμη $\vec{F} = -Cx \hat{x}$ (1), όπου C η σταθερά του ελατηρίου. Η (1) είναι ο λεγόμενος νόμος του Hooke.

Για να μετακινήσουμε την μάζα M μακριά από την θέση ισορροπίας $x = 0$ πρέπει να ασκήσουμε δύναμη $\vec{F}_{\text{εμείς}} = -\vec{F}_{\text{Hooke}}$.

και να παράγουμε έργο $W_{0 \rightarrow x} = \int_0^x Cx dx = \frac{1}{2} Cx^2$.

Επομένως η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο είναι $U(x) = \frac{1}{2} Cx^2$.

Εάν x_{max} είναι η μέγιστη μετατόπιση από την θέση ισορροπίας $x = 0$,

τότε η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει: $\frac{1}{2} Cx_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} Mv_0^2$,

όπου v_0 είναι η ταχύτητα του σώματος στην θέση ισορροπίας.

Μία δύναμη \vec{F} ονομάζεται διατηρητική (ή συντηρητική) αν το έργο που παράγει κατά την μετατόπιση από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο B είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

Για διατηρητικές δυνάμεις ισχύει :

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

όπου \oint συμβολίζει το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για την διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow A$.

Υπάρχουν μη διατηρητικές δυνάμεις,
π.χ. αυτές που σχετίζονται με τριβές.

Πολλές από τις δυνάμεις που εμφανίζονται στην φύση είναι διατηρητικές.

Μία δύναμη \vec{F} που ασκεί ένα σώμα A σε ένα σώμα B ονομάζεται κεντρική όταν ισχύει : $\vec{F} = F(\vec{r}_{AB}) \hat{r}_{AB}$,

όπου $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ με \vec{r}_A, \vec{r}_B τα διανύσματα θέσης των A και B.

Οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές δυνάμεις.

Για τα $d\vec{r}_1$ και $d\vec{r}_2$ ισχύει : $\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = F_1 dr$.

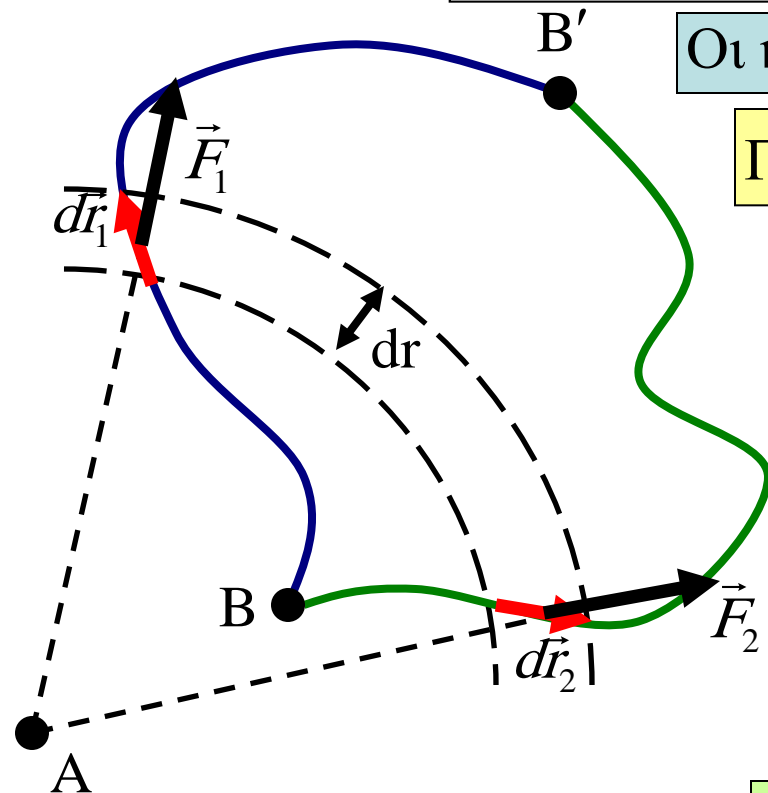
και επομένως η συνεισφορά των τμημάτων αυτών στο παραγόμενο έργο είναι η ίδια.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε τις διαδρομές σε μικρά τμήματα με ίσο έργο

$$\text{και τελικά } \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

διαδρομή1 διαδρομή2

δηλαδή το έργο για την μετατόπιση από το A στο B είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.



Η δύναμη Lorentz $\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} = q\vec{v} \times \vec{B}$ είναι διατηρητική δύναμη που δεν παράγει έργο αφού $\vec{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} \cdot d\vec{r} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = q\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{r} = 0$.

Οι τριβές δεν είναι διατηρητικές δυνάμεις, αφού πάντοτε αντιστέκονται στην κίνηση, δηλαδή: $W_{A \rightarrow B}^{\text{διαδρομή1}} = W_{B \rightarrow A}^{\text{διαδρομή1}}$.

Οι τριβές, αν και αποτέλεσμα θεμελιωδών (ηλεκτρομαγνητικών) αλληλεπιδράσεων που είναι διατηρητικές,

μετατρέπουν μέρος της κινητικής ενέργειας σε θερμότητα (τυχαία θερμική κίνηση)

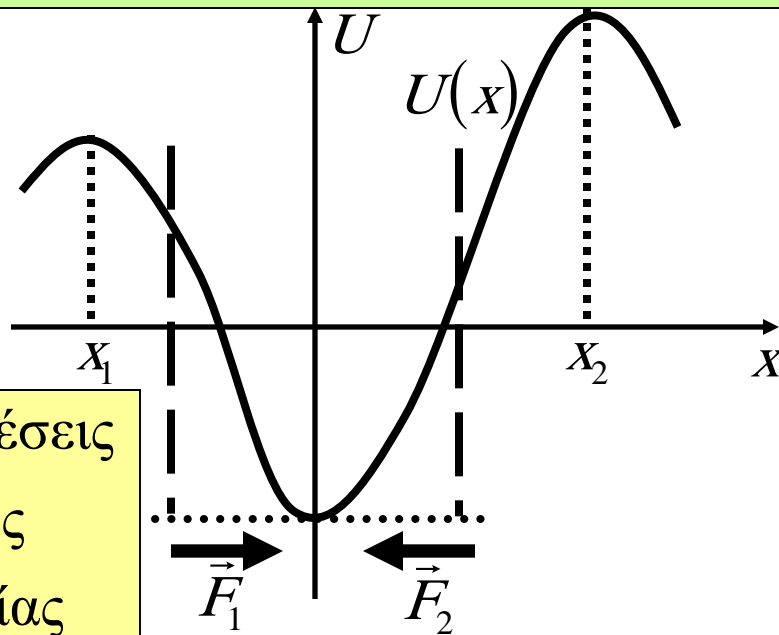
και με αυτή την έννοια είναι μη διατηρητικές.

Η διατήρηση της ενέργειας ορίζει μια διαφορική εξίσωση για την ταχύτητα :

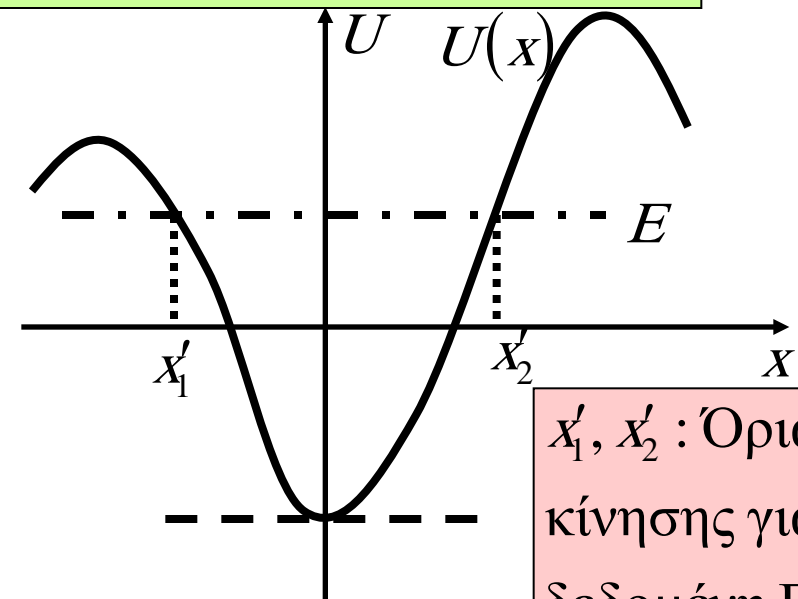
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (1)$$

Η εξίσωση της τροχιάς προκύπτει από ολοκλήρωση της (1)

$$\frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x')]} = dt' \Rightarrow \int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x')]} = G(x)$$



x_1, x_2 : Θέσεις ασταθούς ισορροπίας



x'_1, x'_2 : Όρια κίνησης για δεδομένη E.

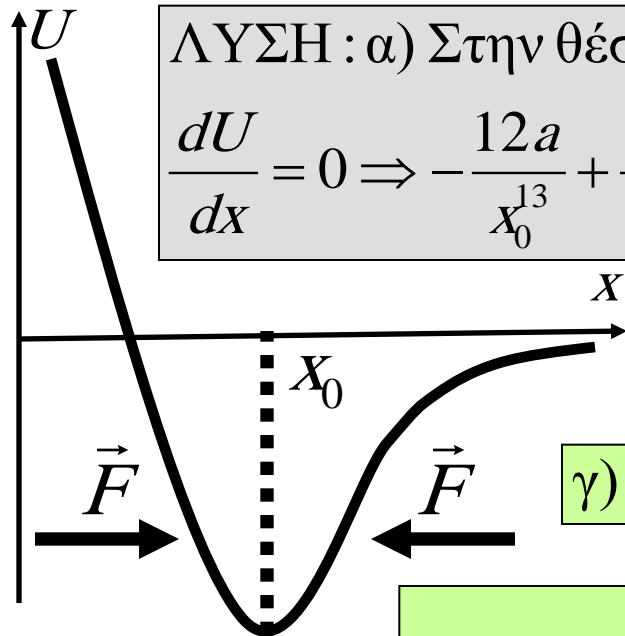
Το μάθημα της Παρασκευής 12/11/2010 ΔΕΝ θα πραγματοποιηθεί.

Επίσης, ΔΕΝ θα γίνουν τα μαθήματα την Τρίτη 16/11/2010 και Τετάρτη 17/11/2010 λόγω των εκδηλώσεων για την επέτειο του Πολυτεχνείου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΟ LENNARD-JONES

1

Η δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο ατόμων σε ένα διατομικό μόριο μπορεί να εκφραστεί κατά προσέγγιση ως $U(x) = a/x^{12} - b/x^6$, όπου a και b είναι θετικές σταθερές και x η απόσταση μεταξύ των ατόμων. α) Για ποιες τιμές του x η $U(x)$ γίνεται ελάχιστη; β) Βρείτε την μεταξύ των ατόμων δύναμη. δ) Η ενέργεια ΔE που χρειάζεται για να σπάσει το μόριο σε δύο ξεχωριστά άτομα ονομάζεται ενέργεια διάσπασης. Πόση είναι η ενέργεια διάσπασης;



ΛΥΣΗ: α) Στην θέση ισορροπίας x_0 έχουμε

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{12a}{x_0^{13}} + \frac{6b}{x_0^7} = 0 \Rightarrow x_0 = (2a/b)^{1/6}.$$

β) Για την δύναμη έχουμε

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Είναι $F(x) > 0$ για $x < x_0$, $F(x) < 0$ για $x > x_0$.

γ) Η ενέργεια ΔE είναι η διαφορά δυναμικής ενέργειας

$$\text{μεταξύ } x = x_0 \text{ και } x = \infty, \Delta E = -U(x_0) = \frac{b}{2a/b} - \frac{a}{4a^2/b^2} = \frac{b^2}{4a}.$$

Έστω βαθμωτή συνάρτηση πολλών (n) μεταβλητών $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Η μερική παράγωγος ως προς μεταβλητή x_i ορίζεται το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$ της $f(x, y) = 3x^2 y$.

$$\text{ΛΥΣΗ: Είναι } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial x} = 3y \frac{\partial x^2}{\partial x} = 6xy.$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial z}$ της $f(x, y, z) = 3x^2 y + x \cos z$.

$$\text{ΛΥΣΗ: Είναι } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(3x^2 y + x \cos z)}{\partial z} = \frac{\partial(x \cos z)}{\partial z} = -x \sin z.$$

Η βαθμίδα (ή grad) βαθμωτής συνάρτησης 3 μεταβλητών $f(x, y, z)$

ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{\nabla} f(x, y, z) \equiv \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$

Διανυσματικός τελεστής $\vec{\nabla} \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ είναι η βαθμίδα ή grad.

Η βαθμίδα δείχνει την διεύθυνση μέγιστης μεταβολής της f στο χώρο xyz .

Το μέτρο $|\vec{\nabla} f|$ δείχνει το μέτρο της μεταβολής της f για μοναδιαία μετατόπιση κατά μήκος της φοράς του $\vec{\nabla} f$.

ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ-ΣΥΝΘΗΚΗ

Είναι $F = -\frac{dU}{dx}$ και γενικότερα στις 3 διαστάσεις

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}, \text{ ή αλλιώς } \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\text{grad} U \quad (1),$$

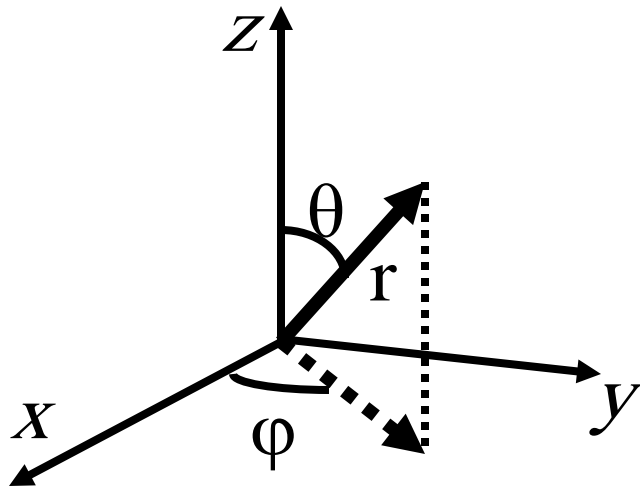
$$\text{όπου } \text{grad} = \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}.$$

Εάν για μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(\vec{r})$ υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $U(\vec{r})$ ώστε να ισχύει η $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$, τότε η $\vec{F}(\vec{r})$ περιγράφει μια διατηρητική δύναμη.

Ίκανή και αναγκαία για να ισχύει η (1) είναι η σχέση

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \quad (2).$$

Η (2) ορίζει τον διανυσματικό τελεστή curl ($\equiv \vec{\nabla} \times$) του στροβιλισμού.



Ίκανή και αναγκαία για να ισχύει η $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ είναι η σχέση

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \quad (2).$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες ο τελεστής curl παίρνει την μορφή

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & F_\theta & F_\phi \end{vmatrix} \quad (3), \text{ όπου } \vec{F} = \hat{r} F_r + \hat{\theta} F_\theta + \hat{\phi} F_\phi.$$

Από την (3) προκύπτει ότι κεντρικές δυνάμεις $\vec{F} = \hat{r} F_r$ είναι διατηρητικές.

Ένα σώμα μάζας m διαγράφει τροχιά στον χώρο που δίνεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = \beta_0 \hat{x} - \gamma_0 \hat{y} + \frac{1}{2} \left(\beta \hat{x} - \gamma \hat{y} \right) t^2$, όπου $\beta_0, \gamma_0, \beta, \gamma$ σταθερές. Βρείτε :

α) Τη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Δείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

β) Το έργο που θα κάνει η δύναμη αυτή για να κινήσει το σώμα από τη θέση

$\vec{r}_1 = 0 \hat{x} + 0 \hat{y}$ στην θέση $\vec{r}_2 = 2 \hat{x} + 3 \hat{y}$. γ) Τη δυναμική ενέργεια, αν $U(\vec{r} = 0) = 0$.

ΛΥΣΗ: α) Από το διάνυσμα θέσης βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\beta \hat{x} - \gamma \hat{y} \right) t \text{ και κατόπιν την επιτάχυνση:}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\beta \hat{x} - \gamma \hat{y} \right).$$

Για την δύναμη έχουμε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα $\vec{F} = m\vec{a} = m \left(\beta \hat{x} - \gamma \hat{y} \right)$.

$$\text{Είναι } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ m\beta & -m\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ άρα η } \vec{F} \text{ είναι συντηρητική.}$$

Ένα σώμα μάζας m διαγράφει τροχιά στον χώρο που δίνεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = \beta_0 \hat{x} - \gamma_0 \hat{y} + \frac{1}{2} \left(\beta \hat{x} - \gamma \hat{y} \right) t^2$, όπου $\beta_0, \gamma_0, \beta, \gamma$ σταθερές. Βρείτε :

α) Τη δύναμη που ασκείται στο σώμα. Δείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

β) Το έργο που θα κάνει η δύναμη αυτή για να κινήσει το σώμα από τη θέση

$\vec{r}_1 = 0 \hat{x} + 0 \hat{y}$ στην θέση $\vec{r}_2 = 2 \hat{x} + 3 \hat{y}$. γ) Τη δυναμική ενέργεια, αν $U(\vec{r} = 0) = 0$.

ΛΥΣΗ: β) Για το έργο της \vec{F} κατά την μετατόπιση από το \vec{r}_1 στο \vec{r}_2 βρίσκουμε :

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0,0)}^{(2,3,0)} m \left(\beta \hat{x} - \gamma \hat{y} \right) \cdot \left(\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \right)$$

$$W = \int_{(0,0,0)}^{(2,3,0)} (m\beta dx - m\gamma dy) = \int_0^2 m\beta dx - \int_0^3 m\gamma dy = m(2\beta - 3\gamma)$$

$$\gamma) \text{ Για την δυναμική ενέργεια έχουμε } U(\vec{r}) - U(\vec{0}) = - \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}' =$$

$$= -m \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \left(\beta \hat{x} - \gamma \hat{y} \right) \cdot \left(\hat{x} dx' + \hat{y} dy' + \hat{z} dz' \right) = -m\beta \int_0^x dx' + m\gamma \int_0^y dy' = -m(\beta x - \gamma y)$$

Έστω δύο μάζες M_1 και M_2 αρχικά σε απόσταση \vec{r} .

Για να αλλάξει η απόσταση κατά $d\vec{r}$ θα πρέπει να καταβληθεί έργο

$$dW = \frac{GM_1M_2}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{GM_1M_2}{r^3} \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{GM_1M_2}{r^3} \frac{1}{2} d(r^2)$$

$$dW = \frac{GM_1M_2}{r^3} r dr = \frac{GM_1M_2}{r^2} dr$$

Επομένως, για μετατόπιση από \vec{r}_A στο \vec{r}_B χρειάζεται έργο

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} G \frac{M_1M_2}{r^2} dr = -G \frac{M_1M_2}{r_B} + G \frac{M_1M_2}{r_A} = \Delta U \quad (1).$$

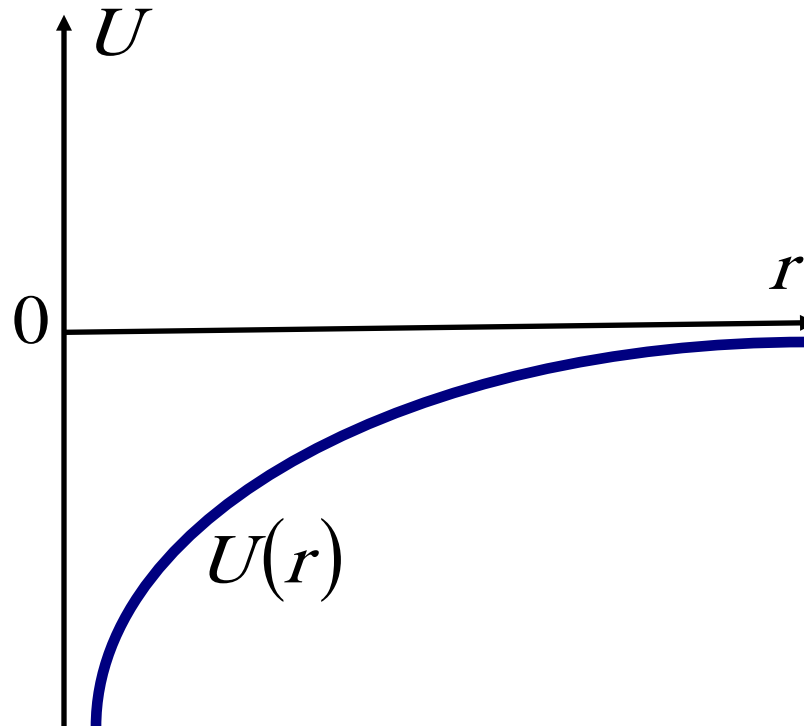
Θέτοντας $U = 0$ για $r = \infty$, η (1) δίνει για την δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου:

$$U(r) = -G \frac{M_1M_2}{r} \quad (2).$$

$$\text{Αρχή διατήρησης της ενέργειας: } \frac{1}{2} M_1 v_A^2 - G \frac{M_1M_2}{r_A} = \frac{1}{2} M_1 v_B^2 - G \frac{M_1M_2}{r_B}.$$

Θέτοντας $U = 0$ για $r = \infty$, η (1) δίνει για την δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου :

$$U(r) = -G \frac{M_1 M_2}{r} \quad (2).$$



Με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήσαμε για να βρούμε την δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με την βαρυτική έλξη μεταξύ δύο μαζών,

μπορεί ναδειχτεί ότι η δυναμική ενέργεια για το σύστημα δύο φορτίων q_1 και q_2 σε απόσταση r είναι

$$U(r) = k \frac{q_1 q_2}{r} \quad (3).$$

Στην (3) έχουμε υποθέσει ότι η στάθμη αναφοράς $U = 0$ αντιστοιχεί για $r = \infty$.

Για ομώνυμα φορτία η (3) δίνει θετική δυναμική ενέργεια, και άρα τα φορτία θα έχουν τάση να απομακρυνθούν το ένα από το άλλο.

Για ετερόνυμα φορτία η δυναμική ενέργεια (3) είναι αρνητική και ευνοούνται μικρότερες αποστάσεις μεταξύ των φορτίων.

Από την δυναμική ενέργεια μπορούμε να βρούμε την δύναμη $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$.

$$\text{Είναι } \vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

$$\text{και για } U(r) = k \frac{q_1 q_2}{r} \text{ βρίσκουμε } \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.$$

$$\text{Για την βαρυτική δύναμη βρίσκουμε } \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(-G \frac{M_1 M_2}{r} \right) = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{r}.$$

Για τις συνιστώσες της δύναμης βρίσκουμε

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-G \frac{M_1 M_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{GM_1 M_2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{GM_1 M_2 x}{r^3}.$$

Η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου ορίζει το δυναμικό

$$\Phi(r) = \frac{U(r)}{q} = \int_r^\infty \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = k \frac{q_1}{r}.$$

Από το δυναμικό μπορεί να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$.

Μονάδα του δυναμικού είναι το Volt (V).

Έστω σώμα που εκτοξεύεται με ταχύτητα v από την επιφάνεια της Γης.

Αν το σώμα φτάνει με μηδενική ταχύτητα στο ∞ ,

τότε η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει :

$$\frac{1}{2}Mv_{\Gamma}^2 = \frac{GM_{\Gamma}M}{R_{\Gamma}} \Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} R_{\Gamma}} = \sqrt{2gR_{\Gamma}},$$

όπου v_{Γ} είναι η λεγόμενη ταχύτητα διαφυγής.

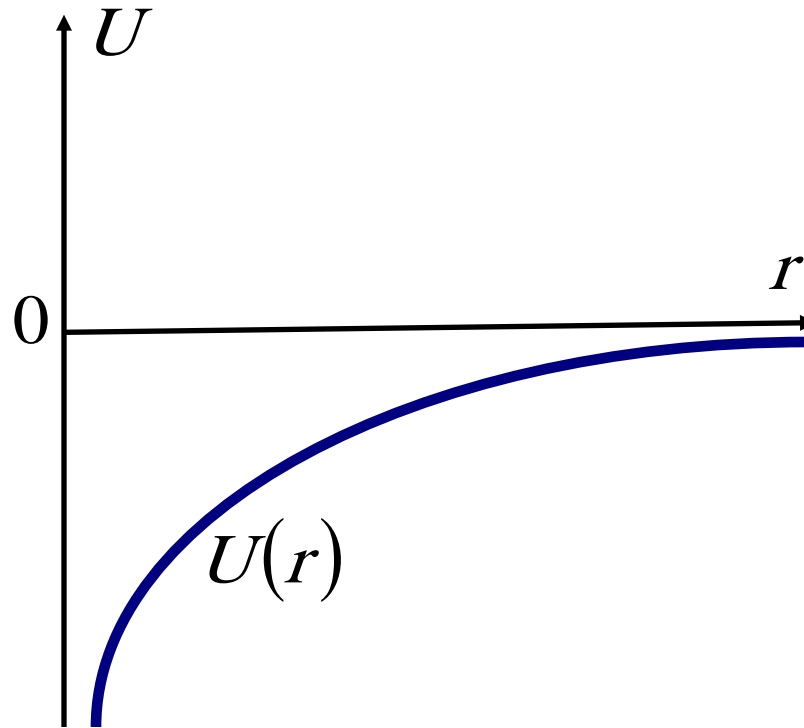
Χρησιμοποιώντας τις τιμές βρίσκουμε μια προσεγγιστική τιμή για την ταχύτητα διαφυγής $v_{\Gamma} \approx 11 \text{ km/s}$.

Η ανάλογη ταχύτητα στην περίπτωση του Ήλιου είναι

$$v_H = \sqrt{\frac{2GM_H}{R_H}} = \sqrt{\frac{2 \times (7 \times 10^{-11}) \times (2 \times 10^{30})}{1,5 \times 10^{11}}} \approx 42 \text{ km/s}.$$

Θέτοντας $U = 0$ για $r = \infty$, η (1) δίνει για την δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου :

$$U(r) = -G \frac{M_1 M_2}{r} \quad (2).$$



Για την δυναμική ενέργεια μάζας M σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης ισχύει :

$$U(R_{\Gamma} + h) = -\frac{GM_{\Gamma}M}{R_{\Gamma} + h},$$

όπου M_{Γ} και R_{Γ} η μάζα και η ακτίνα της Γης, αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για την $1/(1+x)$ βρίσκουμε

$$\left(1/(1+x) \approx 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\right)$$

$$U(R_{\Gamma} + h) \approx -\frac{GM_{\Gamma}M}{R_{\Gamma}} \left(1 - \frac{h}{R_{\Gamma}} + \frac{h^2}{R_{\Gamma}^2} - \dots\right) = -MgR_{\Gamma} \left(1 - \frac{h}{R_{\Gamma}} + \frac{h^2}{R_{\Gamma}^2} - \dots\right).$$

όπου $g = \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η ισχύς P είναι ο ρυθμός παραγωγής έργου :

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{r})}{dt}$$

και για σταθερή δύναμη $P \equiv \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Αν γνωρίζουμε την ισχύ ως συνάρτηση του χρόνου μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο :

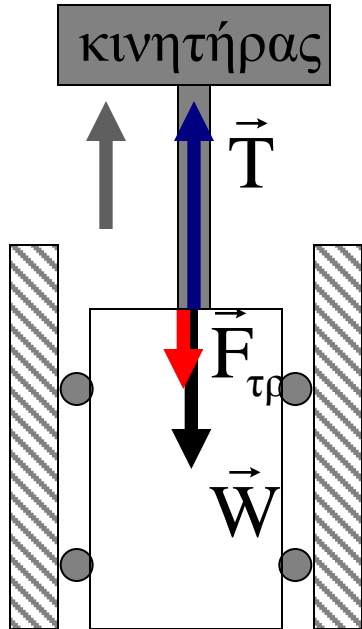
$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

Μονάδα της ισχύος στο SI είναι το Watt ($1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$).

Μονάδα της ισχύος είναι επίσης ο "ίππος" $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$.

Με βάση την ισχύ μπορούμε να ορίσουμε μονάδα ενέργειας την κιλοβατώρα $1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$.

Ένας ανελκυστήρας έχει μάζα 1000 kg και μεταφέρει μέγιστο φορτίο μάζας 800 kg. Η προς τα επάνω κίνηση του ανελκυστήρα επιβραδύνεται από μία σταθερή δύναμη τριβής 4000 N. Εάν θέλουμε να κινείται ο ανελκυστήρας προς τα επάνω με σταθερή ταχύτητα 3 m/s, ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ισχύς που παράγει ο κινητήρας;



ΛΥΣΗ: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κουβούκλιο του ανελκυστήρα είναι το βάρος \vec{W} , η τριβή $\vec{F}_{\tau\rho}$ και η τάση \vec{T} που οφείλεται στον κινητήρα.

Εφόσον η κίνηση γίνεται με σταθερή ταχύτητα, υπάρχει ισορροπία δυνάμεων:

$$T - F_{\tau\rho} - Mg = 0 \Rightarrow T = 4 \times 10^3 + 1,8 \times 10^3 \times 9,8 = 2,16 \times 10^4 \text{ N.}$$

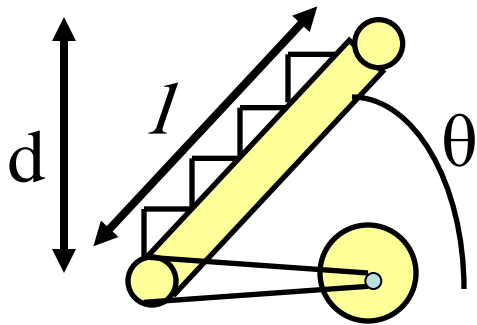
Για την ισχύ βρίσκουμε $P = \vec{T} \cdot \vec{v} = 2,16 \times 10^4 \times 3 = 6,48 \times 10^4 \text{ W.}$

$$P = 6,48 \times 10^4 \text{ W} = 87,0 \text{ hp.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

4

Να εξεταστεί το ποσό της ενέργειας που καταναλώνει μία ηλεκτροκίνητη σκάλα που έχει ταχύτητα v όταν α) ο άνθρωπος που ανεβαίνει στέκεται ακίνητος πάνω της, β) βαδίζει πάνω σε αυτήν με σχετική ταχύτητα V . Ποια είναι η ισχύς σε κάθε περίπτωση;



ΛΥΣΗ: α) Για να ανέβει ο άνθρωπος ύψος d πρέπει να δαπανηθεί ενέργεια $E = mgd$.

Με βάση τα γεωμετρικά δεδομένα του προβλήματος αυτή η ανύψωση χρειάζεται χρόνο $\Delta t = l/v = d/(v \sin \theta)$.

Επομένως η ισχύς που απαιτείται είναι $P = E/\Delta t = mgv \sin \theta$.

β) Ο χρόνος που χρειάζεται για να ανέβει ο

άνθρωπος ύψος d είναι τώρα $\Delta t' = \frac{d}{(v + V) \sin \theta}$.

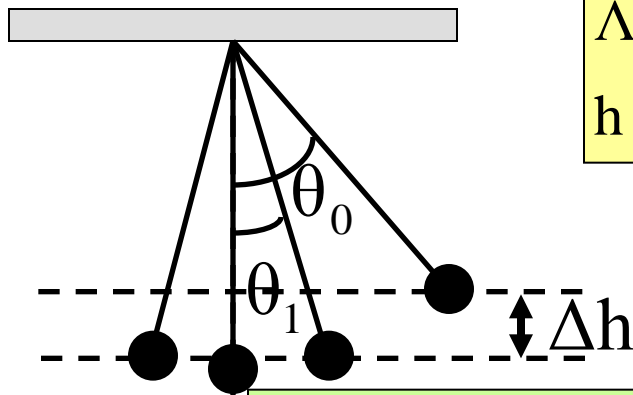
Η ενέργεια που καταναλώνεται από την σκάλα

είναι $mgh = mg \frac{vd}{v + V}$, άρα $P = \frac{mgh}{\Delta t'} = mgv \sin \theta$.

Σε χρόνο $\Delta t'$ ένα σκαλοπάτι ανεβαίνει ύψος $h = v \Delta t' \sin \theta$

Ο άνθρωπος ανεβαίνει ύψος $d - h$.

Σώμα μάζας 2 kg αναρτημένο από νήμα μήκους 1 m μετατοπίζεται κατά γωνία 30° ως προς την κατακόρυφο και αφήνεται ελεύθερο. Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος όταν το νήμα σχηματίζει γωνία 10° με την κατακόρυφο από την ίδια και από την αντίθετη πλευρά από την οποία μετατοπίστηκε αρχικά το σώμα.



$$\frac{1}{2} m v_1^2 = m g \Delta h. \quad (1)$$

ΛΥΣΗ: Έστω ότι το σώμα βρίσκεται σε ύψος h και $h + \Delta h$ όταν εκτρέπεται σε γωνία $\theta_1 = 10^\circ$ και $\theta_0 = 30^\circ$.

Αν v_1 είναι η ταχύτητα για $\theta = \theta_1 = 10^\circ$,

τότε από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

$$\text{Είναι όμως: } \Delta h = (l - l \cos \theta_0) - (l - l \cos \theta_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta h = l (\cos \theta_1 - \cos \theta_0).$$

$$\text{Από την (1) βρίσκουμε: } v_1 = \sqrt{2 g l (\cos \theta_1 - \cos \theta_0)} \quad (2)$$

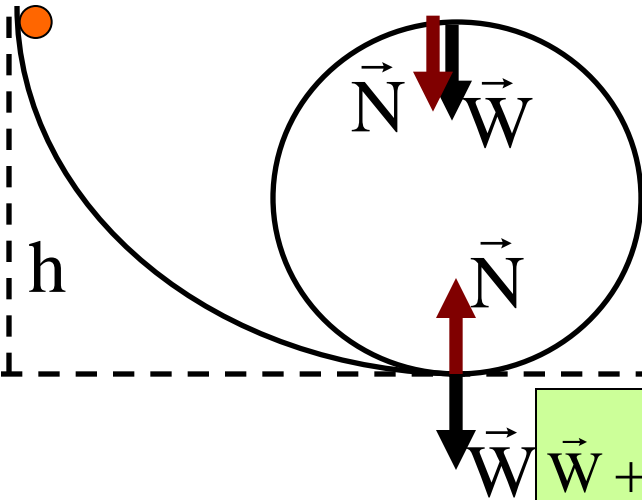
Χρησιμοποιώντας τιμές $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $l = 1 \text{ m}$ βρίσκουμε $v_1 = 1,53 \text{ m/s}$.

Η ίδια ταχύτητα προκύπτει και για $\theta_2 = -\theta_1 = -10^\circ$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

6

Να υπολογιστεί το ελάχιστο ύψος από το οποίο πρέπει να ξεκινήσει κάποιο σώμα για να συμπληρώσει με επιτυχία τον κύκλο του Σχήματος. Υποθέστε ότι το σώμα γλιστράει χωρίς τριβές.



ΛΥΣΗ: Στο σώμα ασκούνται το βάρος \vec{W} και η αντίδραση \vec{N} από το κυκλικό τοίχωμα.

Αν R είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε σε κάθε σημείο της κυκλικής κίνησης ισχύει

$$\vec{W} + \vec{N} = \frac{mv^2}{R} \hat{R}.$$

Στο ψηλότερο σημείο: $W + N = \frac{mv^2}{R}.$

Για την ελάχιστη δυνατή ταχύτητα έχουμε $N = 0$ και $v = \sqrt{gR}.$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας βρίσκουμε :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R) \Rightarrow gh = \frac{1}{2}gR + g(2R) \Rightarrow h = \frac{5}{2}R.$$

Σώμα μάζας m κινείται με την επίδραση δυνάμεως $F = a \hat{x} \sin kt + a \hat{y} \cos kt$, όπου a, k σταθερές. Αν το σώμα αρχικά ηρεμεί, δείξτε ότι το έργο που παράγει η F σε χρόνο t είναι $W = \frac{a^2}{mk^2} (1 - \cos kt)$.

ΛΥΣΗ: Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m \frac{dv_x}{dt} = a \sin kt \Rightarrow v_x = \frac{a}{mk} (1 - \cos kt)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = a \cos kt \Rightarrow v_y = \frac{a}{mk} \sin kt.$$

Για το έργο βρίσκουμε $W = \int_0^t \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^t (F_x dx + F_y dy) =$

$$= \int_0^t (F_x v_x dt' + F_y v_y dt') = \frac{a^2}{mk} \int_0^t [\sin kt' (1 - \cos kt') + \cos kt' \sin kt'] dt'$$

$$\text{και τελικά } W = \frac{a^2}{mk} \int_0^t \sin kt' dt' = \frac{a^2}{mk^2} (1 - \cos kt). \text{ (ό.ε.δ.)}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σύστημα N σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν με δυνάμεις \vec{F}_{ij} (η δύναμη που ασκεί το σώμα i στο σώμα j).

Από τον 3^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

ενώ από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε :

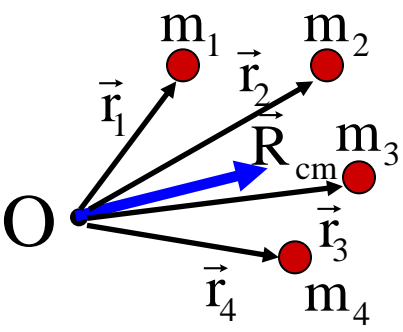
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_j}{dt} = -\frac{d\vec{p}_i}{dt} \Rightarrow \frac{d(\vec{p}_i + \vec{p}_j)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_i + \vec{p}_j = \text{σταθερά.}$$

Δηλαδή, για σύστημα σωμάτων ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις, η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται.

Για ένα σύστημα N σωμάτων το διάνυσμα θέσης \vec{R}_{cm} του κέντρου μάζας ορίζεται ως :

$$\vec{R}_{cm} \equiv \frac{\sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n}{\sum_{n=1}^N m_n}, \quad (1)$$

\vec{r}_n και m_n είναι τα διανύσματα θέσης και οι μάζες των N σωμάτων, αντίστοιχα.



Παραγωγίζοντας την (1) παίρνουμε :

$$\dot{\vec{R}}_{cm} \equiv \frac{\sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n}{\sum_{n=1}^N m_n} = \frac{\sum_{n=1}^N m_n \vec{v}_n}{\sum_{n=1}^N m_n}, \quad (2)$$

όπου $\sum_n m_n \vec{v}_n$ η ολική ορμή του συστήματος.

Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις η (2) δίνει $\dot{\vec{R}}_{cm} = \text{σταθερά}$.

Αν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις τότε η (2) δίνει

$$\left(\sum_{n=1}^N m_n \right) \ddot{\vec{R}}_{cm} = \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{v}}_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n = \vec{F}_{εξωτ}, \quad (3)$$

με $\vec{F}_{εξωτ}$ την συνολική εξωτερική δύναμη.

Σε ακίνητο σώμα μάζας M_2 προσπίπτει σώμα μάζας M_1 που κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v_1 \hat{x}$. Έστω ότι τα δύο σώματα ενώνονται σε ένα μετά την κρούση. Θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση.



Αν v είναι η ταχύτητα του σώματος μετά την κρούση, τότε από την αρχή διατήρησης της ορμής βρίσκουμε :

$$M_1 \vec{v}_1 = (M_1 + M_2) \vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1. \quad (1)$$

Για την συντεταγμένη \vec{X}_{cm} του κέντρο μάζας βρίσκουμε (μετά την κρούση) : $\vec{X}_{cm} = vt \hat{x}. \quad (2)$

Εφόσον δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, η (2) ισχύει και πριν την κρούση.

Είναι έτσι;

Όντως, πριν την κρούση είναι $\dot{\vec{X}}_{cm} = \frac{M_1 \vec{v}_1 \hat{x}}{M_1 + M_2} = v \hat{x}$, λόγω της (1)

και τελικά $\vec{X}_{cm} = vt \hat{x}.$

Για τον λόγο των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την κρούση βρίσκουμε :

$$K_{\text{πριν}} = M_1 v_1^2 / 2 \text{ και μετά την κρούση } K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} v_1^2.$$

Επομένως βρίσκουμε τον λόγο $\frac{K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}$. (1)

Η διαφορά $\Delta K = K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}$ είναι το ποσό της ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα.

Εάν $M_1 \ll M_2$ τότε $\frac{K_{\text{μετά}}}{K_{\text{πριν}}} \approx 0$, δηλαδή όλη σχεδόν η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα.

Είδαμε παραπάνω ότι είναι
$$\dot{\vec{X}}_{\text{cm}} = \frac{M_1 \vec{v}_1 \hat{x}}{M_1 + M_2} \equiv V \hat{x}.$$

Επομένως, ως προς το κέντρο μάζας η ταχύτητα της μάζας M_1 πριν την κρούση είναι

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \hat{x} - \vec{V} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{v}_1 \hat{x},$$

ενώ για την αρχική ταχύτητα \vec{u}_2 της M_2 έχουμε

$$\vec{u}_2 = -\vec{V} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1 \hat{x}.$$

Άρα, για την ολική ορμή ως προς το κέντρο μάζας βρίσκουμε :

$$M_1 \vec{u}_1 + M_2 \vec{u}_2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \vec{v}_1 \hat{x} - \frac{M_2 M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1 \hat{x} = 0.$$

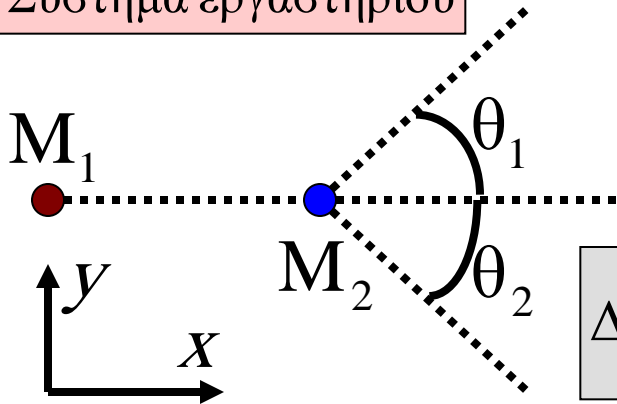
Στο σύστημα του κέντρου μάζας η ολική ορμή είναι μηδέν πριν την κρούση,

άρα και μετά την κρούση η ορμή είναι μηδέν, επομένως για ακίνητο παρατηρητή το νέο σώμα μάζας $M_1 + M_2$ πρέπει να κινείται με ταχύτητα \vec{V} .

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ - ΣΚΕΔΑΣΗ

Σώμα μάζας M_1 προσπίπτει σε ακίνητο σώμα μάζας M_2 και μετά την κρούση εκτρέπεται σε γωνία θ_1 . Θέλουμε να προσδιορίσουμε την $(\theta_1)_{\max}$.

Σύστημα εργαστηρίου

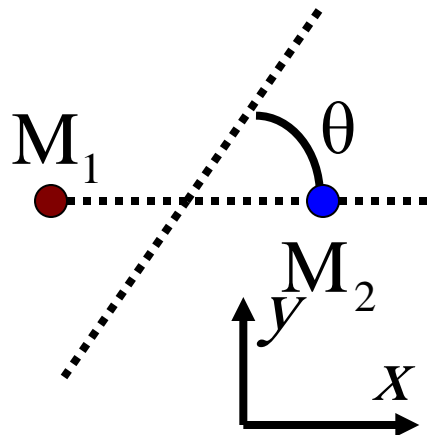


Έστω \vec{v}_1 (\vec{v}_2) και \vec{v}'_1 (\vec{v}'_2) οι ταχύτητες (στο σύστημα του εργαστηρίου) της μάζας M_1 (M_2) πριν και μετά την κρούση.

$$\text{Διατήρηση ενέργειας: } \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 \quad (1)$$

$$\text{Διατήρηση ορμής: } M_1 v_1 = M_1 v_1' \cos \theta_1 + M_2 v_2' \cos \theta_2 \quad (2) \text{ (άξονας x)}$$

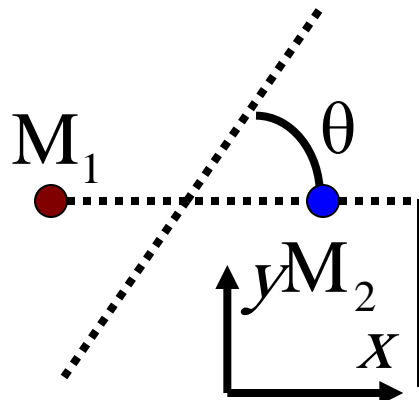
$$\text{και } 0 = M_1 v_1' \sin \theta_1 - M_2 v_2' \sin \theta_2 \quad (3) \text{ (άξονας y).}$$



$$\text{Ως προς το κέντρο μάζας } \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2} \text{ έχουμε:}$$

$$\vec{V} \equiv \dot{\vec{R}}_{\text{cm}} = \frac{M_1 \dot{\vec{r}}_1 + M_2 \dot{\vec{r}}_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1$$

Σύστημα κέντρου μάζας



$$\vec{V} \equiv \dot{\vec{R}}_{\text{cm}} = \frac{M_1 \dot{\vec{r}}_1 + M_2 \dot{\vec{r}}_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1.$$

Έστω \vec{u}_1 (\vec{u}_2) και \vec{u}'_1 (\vec{u}'_2) οι ταχύτητες (στο σύστημα του \vec{R}_{cm}) της μάζας M_1 (M_2) πριν και μετά την κρούση.

$$\text{Διατήρηση ενέργειας: } \frac{1}{2} M_1 u_1^2 + \frac{1}{2} M_2 u_2^2 = \frac{1}{2} M_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 u_2'^2 \quad (1)$$

$$\text{Διατήρηση ορμής: } M_1 u_1 - M_2 u_2 = M_1 u_1' \cos \theta - M_2 u_2' \cos \theta \quad (2) \quad (\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma \ x)$$

$$\text{και } 0 = M_1 u_1' \sin \theta - M_2 u_2' \sin \theta \quad (3) \quad (\acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha\varsigma \ y).$$

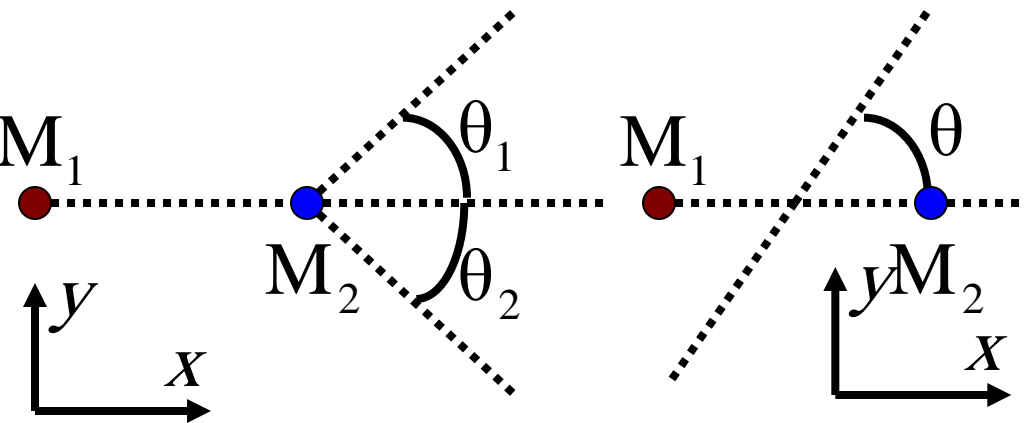
$$\text{Εφόσον όμως είμαστε στο σύστημα του } \vec{R}_{\text{cm}} \text{ είναι } M_1 u_1 - M_2 u_2 = 0 \quad (4).$$

$$\text{Από τις (3) και (4) βρίσκουμε: } M_1 u_1 = M_2 u_2 \quad (5) \text{ και } M_1 u_1' = M_2 u_2' \quad (6).$$

$$\text{Οπότε η (1) δίνει } u_1 = u_1' \quad (7) \text{ και } u_2 = u_2' \quad (8).$$

Ο μετασχηματισμός ταχυτήτων για τα δύο συστήματα δίνει

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{V} \quad (9), \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{V} \quad (10), \quad \vec{v}'_1 = \vec{u}'_1 + \vec{V} \quad (11), \quad \vec{v}'_2 = \vec{u}'_2 + \vec{V} \quad (12).$$



$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{V} \quad (9), \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{V} \quad (10),$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{u}'_1 + \vec{V} \quad (11), \quad \vec{v}'_2 = \vec{u}'_2 + \vec{V} \quad (12).$$

Αναλύοντας στους άξονες xy βρίσκουμε

$$\tan\theta_1 = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \frac{u'_{1y}}{u'_{1x} + V} = \frac{u'_1 \sin\theta}{u'_1 \cos\theta + V} = \frac{u_1 \sin\theta}{u_1 \cos\theta + V} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + V/u_1}. \quad (13)$$

Είναι όμως: $\vec{V} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} (\vec{u}_1 + \vec{V})$, οπότε $\vec{V} = \frac{M_1}{M_2} \vec{u}_1$. (14)

Από τις (13) και (14) βρίσκουμε τελικά $\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + M_1/M_2}$.

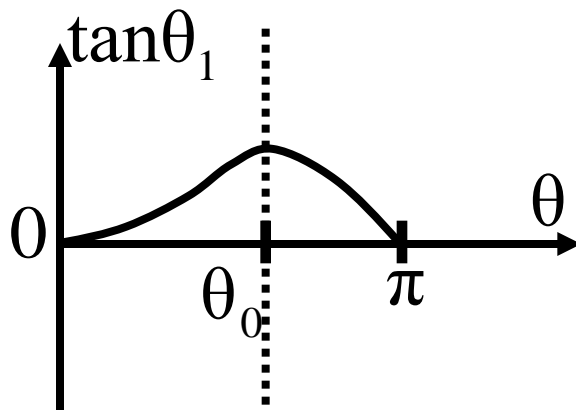
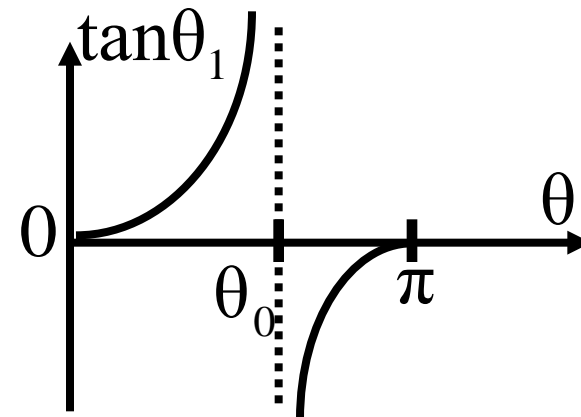
ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ - ΣΚΕΔΑΣΗ

Από τις (13) και (14) βρίσκουμε τελικά $\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + M_1/M_2}$.

Αν $M_1 < M_2$ τότε $\tan \theta_1 \rightarrow \pm\infty$
για $\theta \rightarrow \theta_0$ με $\cos \theta_0 = -M_1/M_2$.

Όλες οι τιμές του θ_1 είναι
επιτρεπτές και $(\theta_1)_{\max} = \pi$.

Αν $M_1 = M_2$ τότε $(\theta_1)_{\max} = \pi/2$.



Αν $M_1 > M_2$ τότε $(\theta_1)_{\max} < \pi/2$
αφού η $\tan \theta_1$ δεν απειρίζεται.

Η γενική μορφή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα είναι

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(M\vec{v})}{dt} = M \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dM}{dt}. \quad (1)$$

Από την (1) βρίσκουμε $\vec{F}dt = d\vec{p} = Md\vec{v} + \vec{v}dM$. (2)

Η ποσότητα $\vec{F}dt$ αντιπροσωπεύει την ώθηση της δύναμης \vec{F} στο χρονικό διάστημα dt .

ΑΣΤΡΙΚΟ ΣΩΜΑ ΑΥΞΑΝΟΜΕΝΗΣ ΜΑΖΑΣ

6

Έστω κάποιο αστρικό σώμα μάζας M που κινείται μέσα σε αέριο σκόνης ούτως ώστε η M να αυξάνεται με ρυθμό $\frac{dM}{dt} = cv$, όπου v η ταχύτητα.

Έστω ακόμη ότι δεν ασκούνται δυνάμεις στο αστρικό σώμα.

Τότε από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε :

$$F = M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} \Rightarrow 0 = M \frac{dv}{dt} + cv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{c}{M} v^2. \quad (1)$$

Επειδή δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις η ορμή διατηρείται.

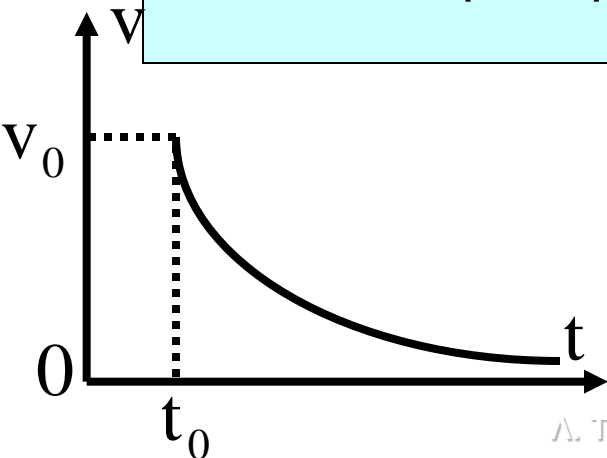
Αν για $t = 0$ είναι $M = M_0$ και $v = v_0$ τότε :

$$Mv = M_0 v_0 \Rightarrow M = M_0 v_0 / v$$

Οπότε από την (1) βρίσκουμε : $-\frac{dv}{v^2} = \frac{c}{M} dt = \frac{cv}{M_0 v_0} \Rightarrow -\frac{dv}{v^3} = \frac{c}{M_0 v_0} dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v -\frac{dv'}{v'^3} = \frac{c}{M_0 v_0} \int_0^t dt' \Rightarrow \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} = \frac{ct}{M_0 v_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{ctv_0^2 + M_0 v_0}{M_0 v_0^3} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{M_0 v_0^3}{ctv_0^2 + M_0 v_0}} \quad (2).$$



Διαστημόπλοιο εκτινάσσει καύσιμα προς τα πίσω με ταχύτητα V_0 ως προς το διαστημόπλοιο. Ο ρυθμός μείωσης της μάζας του διαστημοπλοίου είναι σταθερός και ίσος με a . Θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα του οχήματος, υποθέτοντας ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.



M

ΛΥΣΗ: Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow M \frac{dv}{dt} - v \frac{dM}{dt} + (v - V_0) \frac{dM}{dt} = 0 \Rightarrow M \frac{dv}{dt} - v a + (v - V_0) a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \frac{dv}{dt} = V_0 a \Rightarrow (M_0 - at) \frac{dv}{dt} = V_0 a \Rightarrow$$

(όπου M_0 η μάζα του διαστημοπλοίου για $t = 0$)

$$\Rightarrow dv = \frac{V_0 a dt}{M_0 - at} \Rightarrow v = v_0 + V_0 \ln \frac{M_0}{M_0 - at}.$$

Αλυσίδα κρέμεται κάθετα πάνω από πλατφόρμα και πέφτει προς αυτήν λόγω της βαρύτητας. Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα είναι ομογενής με γραμμική πυκνότητα ρ . Ποια είναι η δύναμη που ασκεί η πλατφόρμα στην αλυσίδα;

ΛΥΣΗ: Έστω l το συνολικό μήκος της αλυσίδας και s το μήκος του τμήματος πάνω στην πλατφόρμα την στιγμή t .

Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\vec{F}_{tot} = M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} \Rightarrow Mg - N = \rho(l-s)g + \dot{s} \frac{d(\rho[l-s])}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l\rho g - N = \rho(l-s)g - \rho\dot{s}^2 \Rightarrow N = \rho s g + \rho\dot{s}^2 \quad (1)$$

Ένα οποιοδήποτε κομμάτι Δs της αλυσίδας που κρέμεται εκτελεί σε χρόνο Δt ελεύθερη πτώση.

$$\text{Επομένως ισχύει } \dot{s}^2 = 2gs,$$

$$\text{και άρα, αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε } N = 3\rho s g. \quad (2)$$

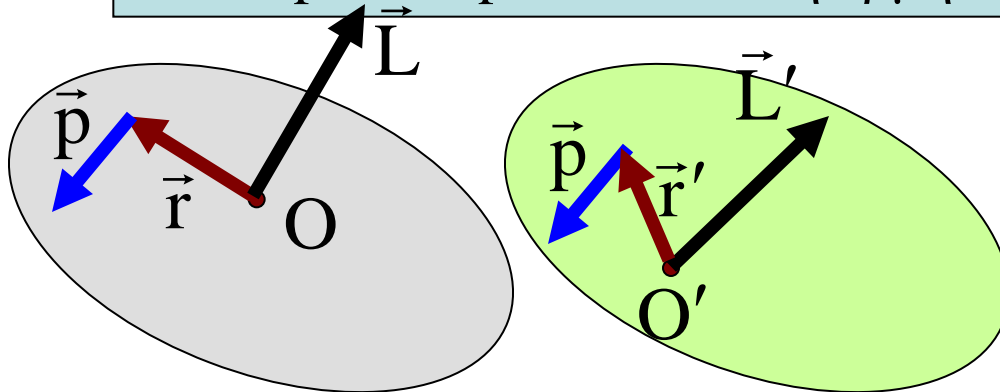
ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ-ΡΟΠΗ

Αν O είναι ένα σημείο ακίνητο σε κάποιο αδρανειακό σύστημα

και \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης ενός σώματος ως προς το O ,

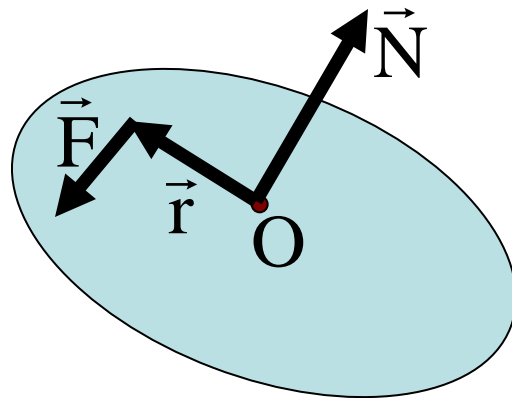
τότε η στροφορμή \vec{L} ως προς το O ορίζεται ως

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, όπου $\vec{p} = M\vec{v}$ είναι η ορμή του σώματος στο σύστημα αυτό.



Για διαφορετικό σημείο αναφοράς O' , είναι εν γένει $\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p} \neq \vec{L}$.

Η στροφορμή ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο σημείο.



Αν στο παραπάνω σώμα ασκείται δύναμη \vec{F} ,

τότε η ροπή \vec{N} αυτής της δύναμης ως προς το O

είναι το διανυσματικό μέγεθος $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Όπως και η στροφορμή, έτσι και η ροπή ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο σημείο.

ΡΟΠΗ - ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Από τους ορισμούς της στροφορμής και της ροπής προκύπτει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}, \quad (1)$$

$$\text{αφού } \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (M\vec{v}) = M(\vec{v} \times \vec{v}) = 0.$$

Διατήρηση της στροφορμής: Αν $\vec{N} = 0$ τότε από την (1) έχουμε $\vec{L} = \text{σταθερά}$.

Αν η συνισταμένη ροπή είναι μηδέν, τότε η στροφορμή παραμένει σταθερή με τον χρόνο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Κεντρικές δυνάμεις

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} \text{ και επομένως}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = f(r)\left(\vec{r} \times \hat{r}\right) = 0.$$

Όταν $\vec{L} = \text{σταθερά}$, τότε το \vec{r} και το \vec{v} πρέπει να παραμένουν κάθετα στο \vec{L} , ή αλλιώς το σώμα κινείται σε ένα επίπεδο.

Θα δείξουμε ότι το άθροισμα των ροπών εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.

Η συνισταμένη ροπή λόγω όλων των εσωτερικών δυνάμεων είναι

$$\vec{N}_{\text{tot}} = \sum_i \left[\sum_{j \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) \right] = \frac{1}{2} \sum_i \left[\sum_{j \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) \right],$$

όπου \vec{r}_i είναι τα διανύσματα θέσης και \vec{f}_{ij} η δύναμη που ασκεί το σώμα j στο i .

Από τον 3^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$.

$$\text{Άρα: } \vec{N}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_i \left[\sum_{j \neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \right] = \frac{1}{2} \sum_i \left[\sum_{j \neq i} \vec{r}_{ij} \times \vec{f}_{ij} \right], \quad \text{με } \vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j.$$

Στην περίπτωση κεντρικών δυνάμεων είναι: $\vec{f}_{ij} = f(r_{ij}) \hat{r}_{ij}$

και αφού $\vec{r}_{ij} \times \hat{r}_{ij} = 0$ βρίσκουμε τελικά $\vec{N}_{\text{tot}} = 0$.

Για ένα σύστημα σωμάτων με μάζες m_i θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα σημείο O (το λεγόμενο κέντρο βάρους) ως προς το οποίο η συνολική ροπή λόγω του βαρυτικού πεδίου της Γης είναι μηδέν.

Για την συνισταμένη ροπή ως προς το σημείο O είναι

$$\vec{N}_O = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \sum_i (m_i \vec{r}_i) \times \vec{g}. \quad (1)$$

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας έχουμε $\vec{R}_{cm} = \sum_i (m_i \vec{r}_i) / \sum_i m_i$,

οπότε η (1) δίνει $\vec{N}_O = M \vec{R}_{cm} \times \vec{g}. \quad (2)$

Επομένως, αν το O συμπίπτει με το κέντρο μάζας τότε $\vec{R}_{cm} = 0$ και $\vec{N}_O = 0$.

Βλέπουμε ότι για ομογενές βαρυτικό πεδίο το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

Το μάθημα της Παρασκευής 10/12/2010 δεν θα πραγματοποιηθεί.

Η προθεσμία υποβολής των λύσεων της 3ης Σειράς Ασκήσεων μετατίθεται για την Τρίτη 14/12/2010.

Ποια είναι η συνολική ροπή ως προς σημείο A διαφορετικό του κέντρου βάρους/μάζας;

$$\vec{N}_A = \sum_i (\vec{r}_{Ai} \times m_i \vec{g}) = \sum_i [(\vec{R}_A + \vec{r}_i) \times m_i \vec{g}] = \vec{R}_A \times \sum_i (m_i \vec{g}) + \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}). \quad (1)$$

Είναι όμως $\sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = 0$ και από την (1) παίρνουμε:

$$\vec{N}_A = M \vec{R}_A \times \vec{g}. \quad (2)$$

$$\text{Για την συνολική δύναμη έχουμε } \vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i (m_i \vec{g}) = M \vec{g}. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) βλέπουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε πως, σε ότι έχει να κάνει με την συνολική κίνηση του συστήματος σωμάτων, στο σύστημα ασκείται μία δύναμη $M\vec{g}$ στο κέντρο μάζας και μία ροπή όπως αυτή περιγράφεται από την (2).

Η συνολική στροφορμή \vec{L} ενός συστήματος σωμάτων δίνεται από την σχέση

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i). \quad (1)$$

Αν \vec{R}_{cm} είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας τότε η (1) δίνει

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{R}_{cm} \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{R}_{cm} \times \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{L}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \vec{P},$$

όπου $\vec{r}'_i \equiv \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$ είναι τα διανύσματα θέσης ως προς το κέντρο μάζας,

\vec{L}_{cm} η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ η συνολική ορμή του συστήματος,

και $\vec{R}_{cm} \times \vec{P}$ η στροφορμή λόγω της κίνησης του κέντρου μάζας.

Η \vec{L}_{cm} ονομάζεται και ιδιοστροφορμή (ή spin) του συστήματος.

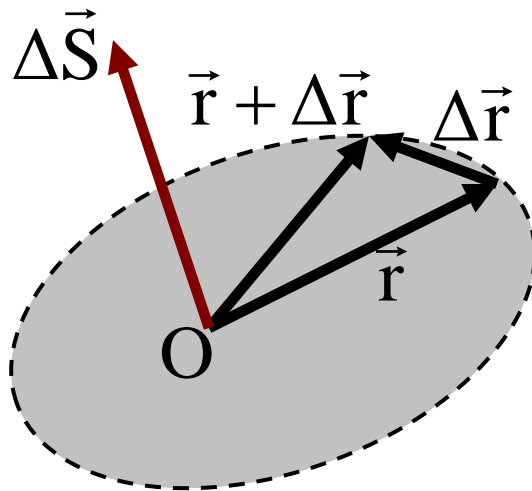
Έχουμε δείξει ότι $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$, όπου $\vec{N} = \vec{N}_{\varepsilon\sigma} + \vec{N}_{\varepsilon\xi}$.

$\vec{N}_{\varepsilon\sigma}$ είναι η συνολική ροπή λόγω εσωτερικών δυνάμεων.

Για κεντρικές δυνάμεις είναι $\vec{N}_{\varepsilon\sigma} = 0$ και άρα $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{\varepsilon\xi}$.

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι $\vec{L} = \vec{L}_{\text{cm}} + \vec{R}_{\text{cm}} \times \vec{P} = \vec{L}_{\text{cm}}$

και βρίσκουμε $\frac{d\vec{L}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{N}_{\varepsilon\xi}$.



Έστω ότι το διάνυσμα θέσης \vec{r} ως προς σημείο αναφοράς O μεταβάλλεται κατά $\Delta\vec{r}$.

Το σώμα διαγράφει ένα τρίγωνο το εμβαδό του οποίου δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο

$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times (\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{r} \times \Delta\vec{r}. \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς χρόνο παίρνουμε

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2M} \vec{r} \times M\vec{v} = \frac{\vec{L}}{2M}. \quad (2)$$

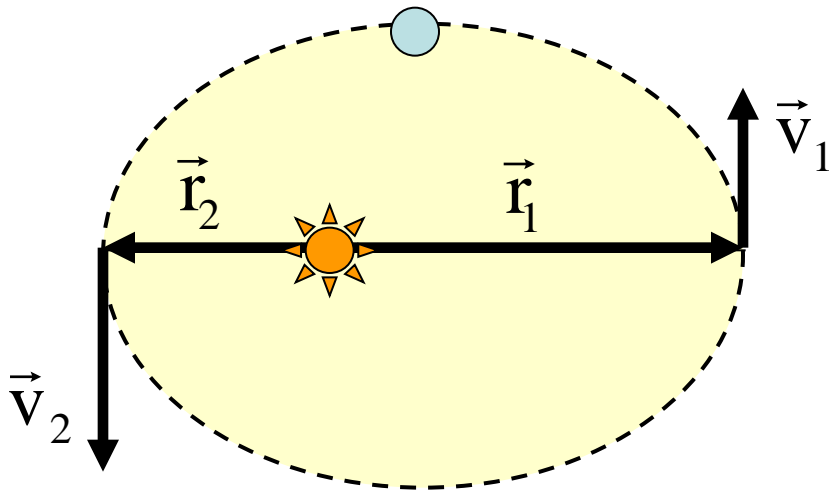
Από την (2) λοιπόν βλέπουμε ότι αν \vec{L} είναι σταθερά της κίνησης τότε

η διεύθυνση $\vec{S}(t)$ παραμένει σταθερή με τον χρόνο, δηλαδή η τροχιά είναι επίπεδη.

και το σώμα διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

2^{ος} νόμος του Kepler για την κίνηση πλανητών.

Οι πλανήτες διαγράφουν λόγω της βαρυτικής έλξης του Ήλιου ελλειπτικές τροχιές με τον Ήλιο στην μία εστία.



Επειδή η δύναμη είναι κεντρική διατηρείται η στροφορμή.

Έστω \vec{r}_1 και \vec{r}_2 τα διανύσματα θέσης για το αποήλιο και περιήλιο, αντίστοιχα.

$$\text{Τότε : } M_{\pi} v_1 r_1 = M_{\pi} v_2 r_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Η τροχιά σώματος σε πεδίο δύναμης αντίστροφου τετραγώνου

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2} \hat{r} \quad (1) \text{ είναι επίπεδη και διατηρείται η στροφορμή } L = Mr^2\dot{\theta} \quad (2).$$

Μπορούμε να αποπλοιάσουμε τις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες. Για την επιτάχυνση έχουμε $\vec{a} = \hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$.

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε

$$M\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = C/r^2 \Rightarrow \ddot{r} - \frac{L^2}{M^2 r^3} = \frac{C}{Mr^2} \quad (3).$$

Είναι $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{Mr^2}$ και $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{L}{Mr^2} = \frac{L^2}{M^2 r^4} \left[\frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (4)$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $w(\theta) = 1/r(\theta)$ η (4) δίνει τελικά

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{CM}{L^2} \Rightarrow w = A \cos\theta - \frac{CM}{L^2} \quad (5).$$

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{CM}{L^2} \Rightarrow w = A \cos\theta - \frac{CM}{L^2} \quad (5) \text{ και } w = 1/r.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{r} = -\frac{CM}{L^2} + A \cos\theta \quad (6).$$

Για την ενέργεια έχουμε

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{C}{r} = \frac{M}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{C}{r} = \frac{M}{2} \frac{L^2}{M^2 r^4} \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] + \frac{C}{r} \quad (7).$$

Από τις (6) και (7) μπορούμε να βρούμε το $A = \frac{CM}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{C^2 M}}$

και τελικά την εξίσωση της τροχιάς $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} (1 - \varepsilon \cos\theta) \quad (8),$

όπου $s = -\frac{L^2}{CM} \quad (9)$ και $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{C^2 M}} \quad (10).$

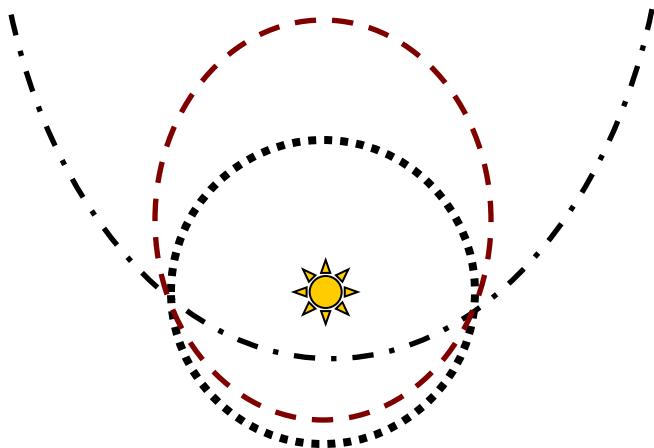
Για την βαρυτική έλξη είναι $C = -GMM_H$
και η εξίσωση (8) αντιστοιχεί σε κωνική τομή.

Εξίσωση της τροχιάς $\frac{1}{r} = \frac{1}{s}(1 - \varepsilon \cos \theta)$ (8), $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^3 M_H^2}}$ (10).

Για $E < 0$ η (8) αντιστοιχεί σε έλλειψη εκκεντρότητας $\varepsilon < 1$ (κύκλος για $\varepsilon = 0$).

Για $E = 0$ η (8) αντιστοιχεί σε παραβολή.

Για $E > 0$ η (8) αντιστοιχεί σε υπερβολή.



Πλανήτης	Μεγάλος ημιάξονας (AU)	Περίοδος (s)	ε
Ερμής	0,387	$7,60 \times 10^6$	0,2056
Αφροδίτη	0,723	$1,94 \times 10^7$	0,0068
Γη	1	$3,16 \times 10^7$	0,0167

NOMOI TOY KEPLER

1^{ος} νόμος : Οι πλανήτες διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές με τον Ήλιο στην μία εστία.

2^{ος} νόμος : Το διάνυσμα θέσης με αρχή τον Ήλιο και τέλος έναν πλανήτη διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

3^{ος} νόμος : Τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς των πλανητών γύρω από τον Ήλιο είναι ανάλογα προς τους κύβους των μεγάλων ημιαξόνων.

Έχουμε ήδη αποδείξει τον 1^ο και 2^ο νόμο.

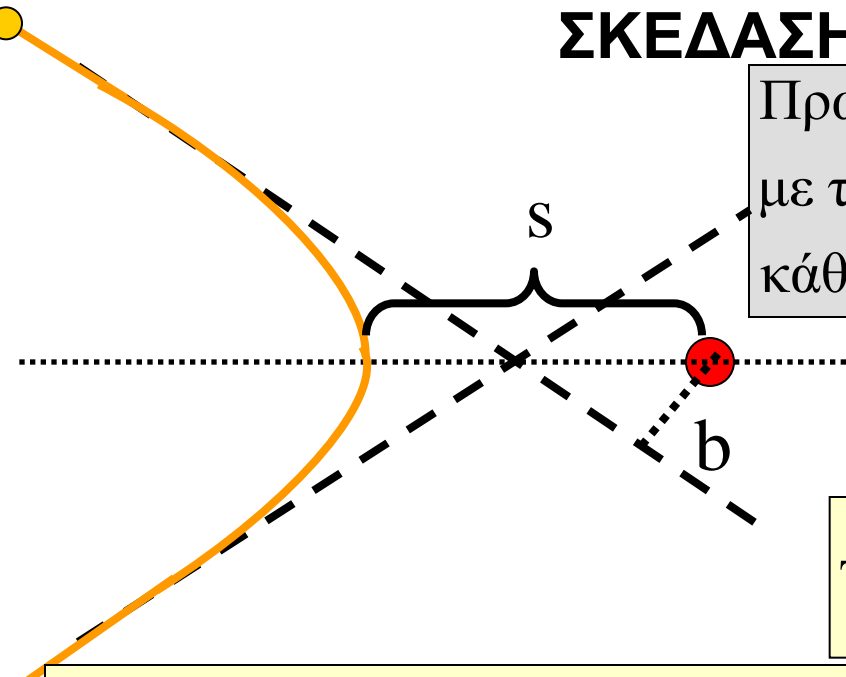
Είναι $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2M} = \text{σταθερά} \Rightarrow S = \frac{LT}{2M}$, όπου T η περίοδος και S το εμβαδό.

Αν a και b είναι ο μεγάλος και μικρός ημιάξονας, τότε $S = \pi ab$.

Είναι ακόμη $2a = \frac{2s}{1 - \varepsilon^2}$ και $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$.

Από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε τελικά $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_H}$ (3^{ος} νόμος Kepler).

ΣΚΕΔΑΣΗ RUTHERFORD



Πρωτόνιο κινείται προς πυρήνα μεγάλης μάζας με την τροχιά του σε μεγάλη απόσταση να έχει κάθετη απόσταση b από τον πυρήνα.

b : παράμετρος κρούσης.

s : ελάχιστη απόσταση.

Το πρωτόνιο δέχεται άπωση Coulomb $\frac{Ze^2}{r^2}$

όπου Z ο ατομικός αριθμός του πυρήνα και r η απόσταση πυρήνα - πρωτονίου.

Αν v_∞ είναι η ταχύτητα του πρωτονίου για πολύ μεγάλα r

τότε η διατήρηση της ενέργειας δίνει (έστω ότι ο πυρήνας παραμένει ακίνητος)

$$\frac{1}{2} M_p v_s^2 + k \frac{Ze^2}{s} = \frac{1}{2} M_p v_\infty^2 \quad (1)$$

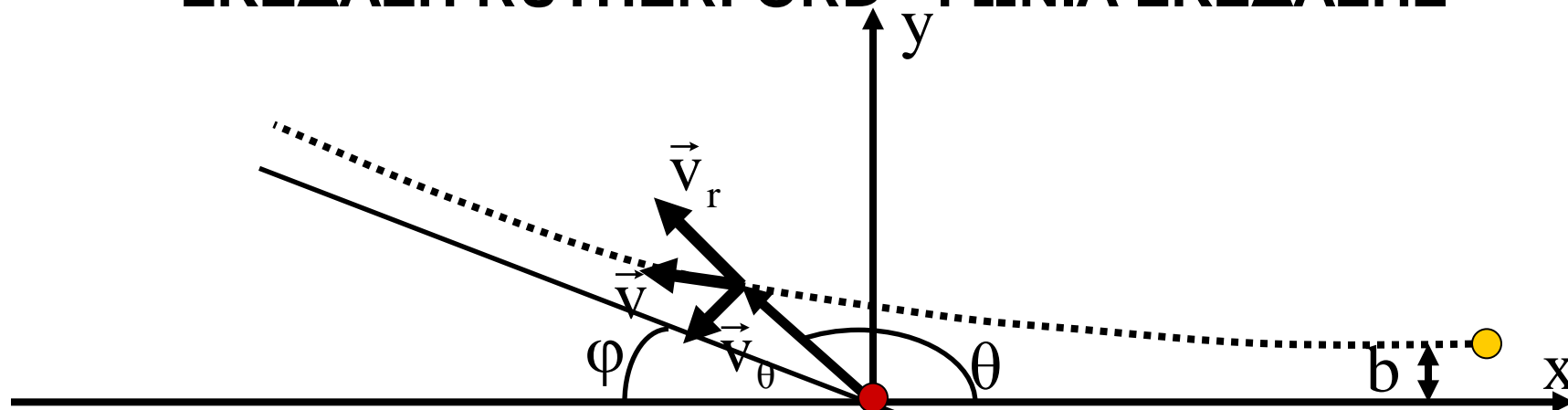
Η δύναμη είναι κεντρική και άρα διατηρείται η στροφορμή :

$$b M_p v_\infty = s M_p v_s \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) με απαλοιφή της v_s :

Επίλυση της (3) δίνει το $s = s(b, v_\infty)$.

$$k Ze^2/s = M_p v_\infty^2 \left[1 - (b/s)^2 \right] / 2 \quad (3)$$



Δουλεύοντας σε πολικές συντεταγμένες η στροφορμή σε σημείο (r, θ) είναι

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{z} \quad (1).$$

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mv_0 b \quad (2)$$

Είναι ακόμη: $m \frac{dv_y}{dt} = F_y = \frac{Ze^2}{r^2} \sin\theta \quad (3).$

Λόγω της (2) η (3) δίνει

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ze^2}{mv_0 b} \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dv_y = \frac{Ze^2}{mv_0 b} \sin\theta d\theta \Rightarrow \int_0^{v_0 \sin\phi} dv_y = \frac{Ze^2}{mv_0 b} \int_0^{\pi-\phi} \sin\theta d\theta \Rightarrow$$

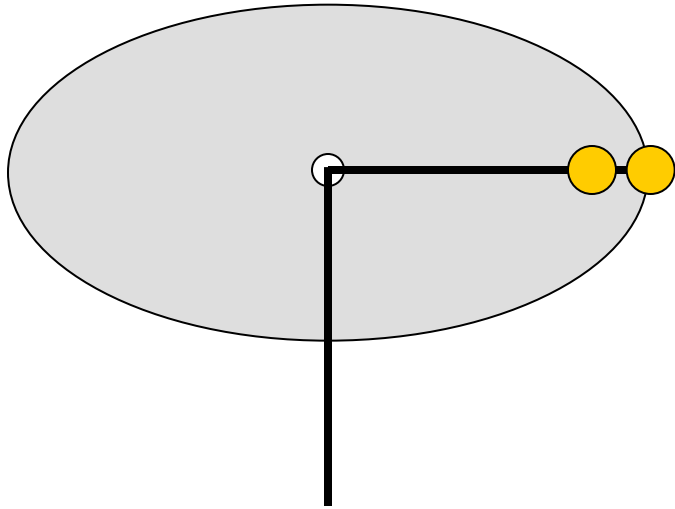
Και τελικά βρίσκουμε $v_0 \sin\phi = \frac{Ze^2}{mv_0 b} (1 + \cos\phi)$ που μας δίνει το ϕ .

Το μάθημα της Παρασκευής 10/12/2010 δεν θα πραγματοποιηθεί.

Η προθεσμία υποβολής των λύσεων της 3ης Σειράς Ασκήσεων μετατίθεται για την Παρασκευή 17/12/2010. Οι λύσεις θα πρέπει να παραδοθούν μέχρι τις 17/12/2010 (αν χρειαστεί στα γραμματοκιβώτια των διδασκόντων στο κτίριο Φυσικής της ΣΕΜΦΕ) ακόμη και αν δεν πραγματοποιηθεί το μάθημα της Παρασκευής 17/12/2010.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1



Ένα σώμα μάζας M βρίσκεται πάνω σε τραπέζι και είναι δεμένο στην άκρη νήματος. Το νήμα περνάει από τρύπα του τραπέζιου και αναγκάζει το σώμα να εκτελέσει κυκλική τροχιά. Αν η ακτίνα της τροχιάς μεταβληθεί από r_0 σε r , πόσο έργο παράγεται;

ΛΥΣΗ : Επειδή το σώμα δέχεται κεντρική δύναμη, η στροφορμή διατηρείται :

$$\text{Άρα : } Mv_0r_0 = Mvr.$$

Επομένως, για μεταβολή της ακτίνας από r_0 σε r (με $r < r_0$)

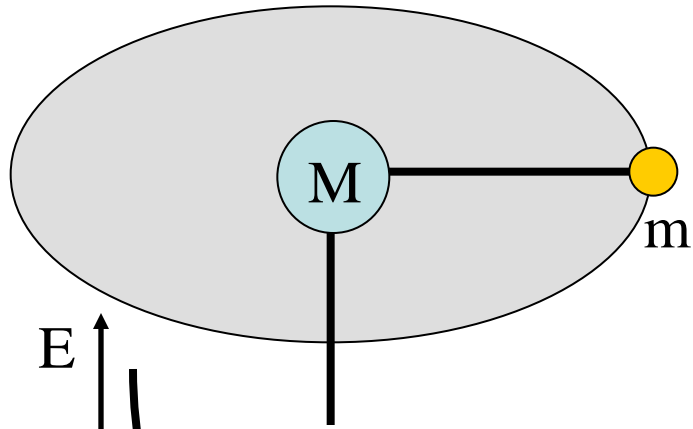
έχουμε μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔK :

$$\Delta K = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv_0^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2 > 0.$$

Επειδή $\Delta K > 0$, πρέπει εμείς να καταβάλουμε έργο $W = \Delta K$.

ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ ΓΑΛΑΞΙΑ

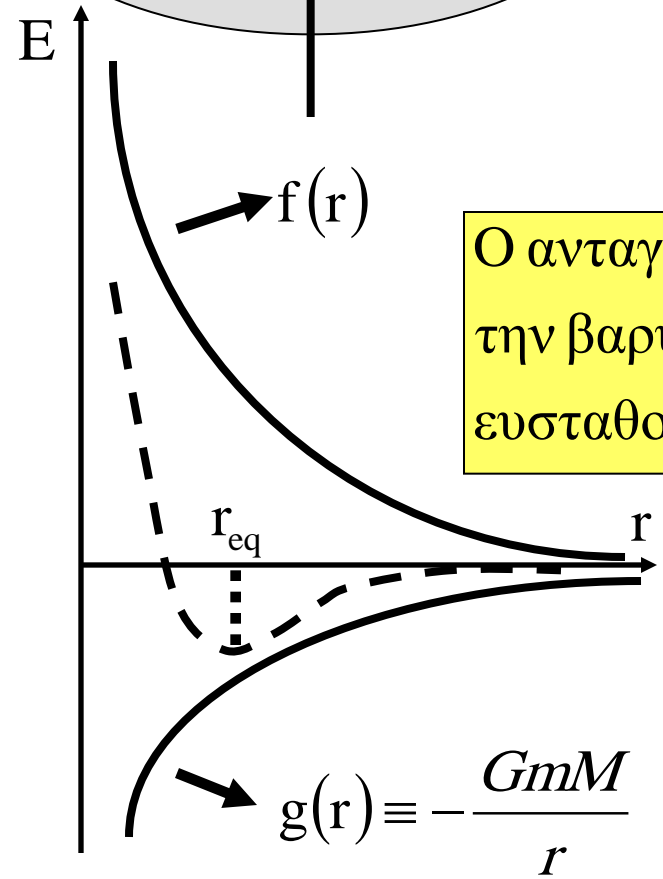
2



Ελάττωση της ακτίνας περιστροφής αυξάνει την κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \equiv f(r)$. (1)

Ας υποθέσουμε ότι η περιστροφή οφείλεται στην βαρυτική έλξη από σώμα στο κέντρο.

Ο ανταγωνισμός της απωστικής "φυγόκεντρης δύναμης" με την βαρυτική έλξη μπορεί να οδηγήσει σε κυκλική τροχιά ευσταθούς ισορροπίας (ακτίνας r_{eq} στο σχήμα).



How Galaxies Work Evolution of a Galaxy

One model explains that, like stars, spiral galaxies formed from collapsing and rotating clouds of gas and dust.

1. Bodies of gas, dust and young stars collide.

2. The stars begin to rotate around the center of the mass.

3. The rotation contracts the cloud and forms a galactic disk.

4. Motion created by the spinning disk causes spiral arms to form.

Αέριο διαστρικής σκόνης αρχίζει να συστέλλεται λόγω βαρύτητας.

Το αέριο περιστρέφεται με στροφορμή \vec{L} που διατηρείται κατά την συστολή.

Ο ανταγωνισμός βαρύτητας με φυγόκεντρο σταθεροποιεί το σύστημα ακτινικά κάθετα στο \vec{L} .

Εκπομπή ακτινοβολίας κατά την διεύθυνση \vec{L} οδηγεί στην εμφάνιση του γαλαξιακού δίσκου.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Έστω \vec{R}_1 και \vec{R}_2 τα κέντρα μάζας δύο συστημάτων με μάζες m_1 και m_2 .

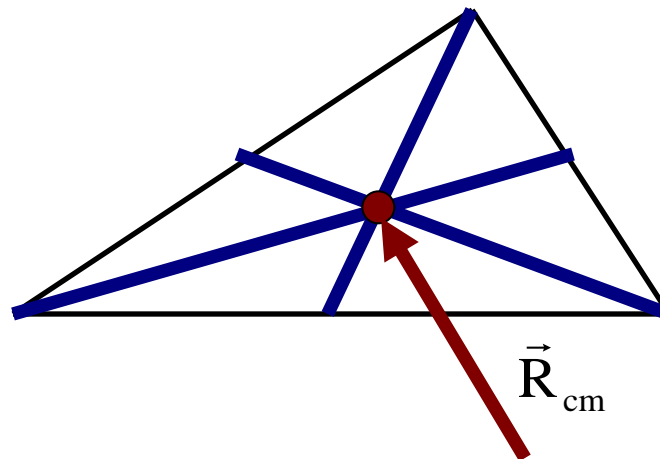
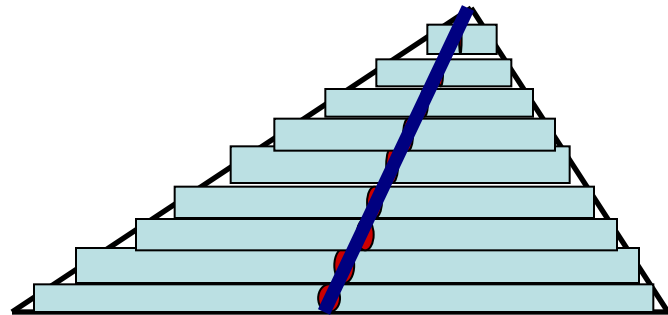
Για το κοινό κέντρο μάζας βρίσκουμε :

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{R} - \vec{R}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1),$$

δηλαδή το κοινό κέντρο μάζας είναι πάνω στην ευθεία που ενώνει τα \vec{R}_1 και \vec{R}_2 .

Το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω σε άξονες (ή σημεία) συμμετρίας.

Κέντρο μάζας ομογενούς σκαληνού τριγώνου



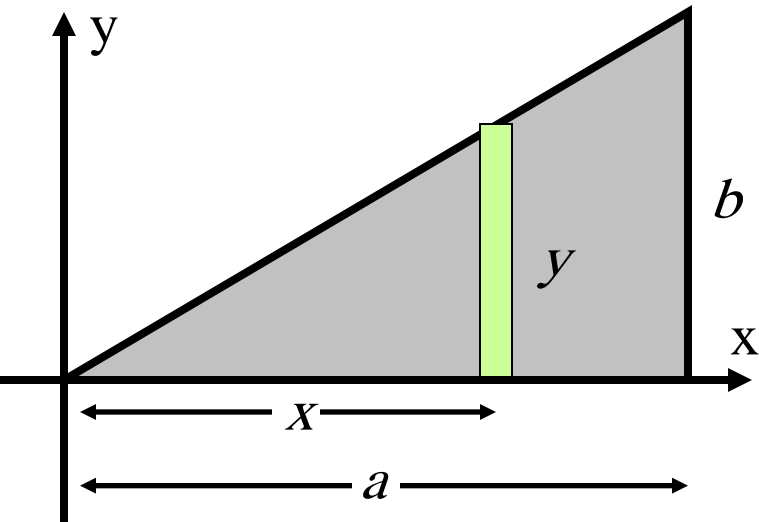
ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

5

Για ένα εκτεταμένο σώμα μάζας M το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας δίνεται από την σχέση

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad (1).$$

Κέντρο μάζας ορθογώνιου τριγώνου.



$$\text{Είναι } x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^a x dm = \frac{1}{M} \int_0^a x \frac{2M}{ab} y dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{2}{ab} \int_0^a xy dx = \frac{2}{ab} \int_0^a x \frac{b}{a} x dx = \frac{2a}{3} \quad (2).$$

$$\text{Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε } y_{cm} = \frac{b}{3} \quad (3).$$

Πύραυλος εκτοξεύεται προς τα πάνω και εκτινάσσει καύσιμα με σχετική ταχύτητα V_0 . Θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα του οχήματος, υποθέτοντας ότι ασκείται ως εξωτερική δύναμη μόνο η βαρύτητα της Γης.



M

ΛΥΣΗ: Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$F = \frac{dp}{dt} = -Mg \Rightarrow$$

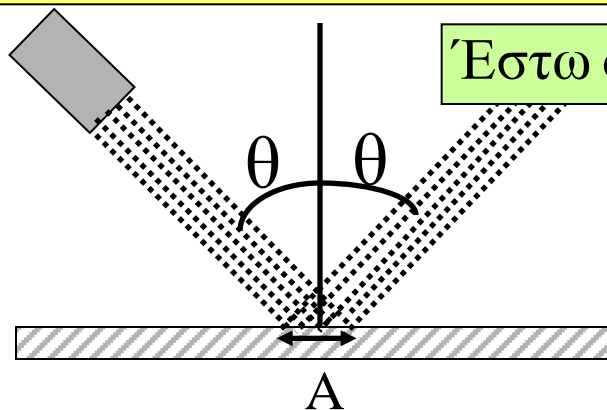
$$M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} - (v - V_0) \frac{dM}{dt} = -Mg \Rightarrow$$

$$dv + V_0 \frac{dM}{M} = -gdt \Rightarrow$$

$$\int_{v_0}^v dv' + V_0 \int_{M_0}^M \frac{dM'}{M'} = -g \int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$v - v_0 + V_0 \ln \frac{M}{M_0} = -gt \Rightarrow v = v_0 + V_0 \ln \frac{M_0}{M} - gt.$$

Ένα ακροφύσιο διατομής a εκτοξεύει με ταχύτητα v ένα ρεύμα αερίου εναντίον ενός τοίχου. Ο τοίχος εκτρέπει τα μόρια χωρίς να αλλάζει το μέτρο της ταχύτητάς τους. Βρείτε την δύναμη που ασκείται πάνω στον τοίχο.



Έστω ότι υπάρχουν n άτομα μάζας m στην μονάδα όγκου.

Για ένα άτομο που ανακλάται κατά γωνία θ η αλλαγή της ορμής λόγω της κάθετης δύναμης από τον τοίχο είναι $2mncos\theta$.

Σε χρόνο Δt στην επιφάνεια $a = A\cos\theta$ προσπίπτουν $nav\Delta t = nAv\Delta t\cos\theta$ άτομα.

Η συνολική μεταβολή ΔP σε χρόνο Δt είναι λοιπόν

$$\Delta P = (nav\Delta t)(2mncos\theta) = 2an\Delta tmv^2\cos\theta.$$

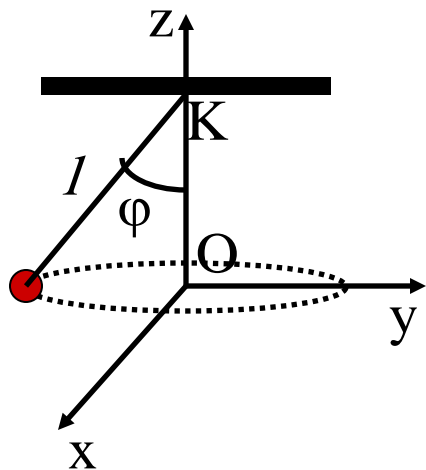
Η δύναμη N που ασκεί ο τοίχος στο αέριο είναι $N = \Delta P/\Delta t = 2Anmv^2\cos^2\theta$.

Για την πίεση p που δέχεται ο τοίχος βρίσκουμε $p = N/A = 2nmv^2\cos^2\theta$

Μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται μέσω νήματος μήκους l από ακλόνητο σημείο ανάρτησης K , και κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας r (της οποίας το κέντρο O βρίσκεται στην κατακόρυφο από το σημείο ανάρτησης). Τη στιγμή $t = 0$ η μάζα είναι στο $(x_0, 0, 0)$ με ταχύτητα $(0, v_0, 0)$.

Να υπολογιστεί : α) η στροφορμή \vec{L}_K της σφαίρας ως προς το σημείο K και β) το το σημείο O , γ) ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της στροφορμής ως προς το σημείο K , δ) ο ρυθμός μεταβολής της \vec{L}_O ως προς το O .

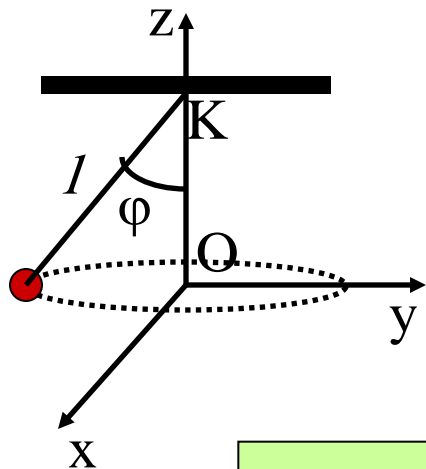
ΛΥΣΗ : α) Είναι $\vec{r}_K = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, -l \cos \varphi)$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}_K = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, 0)$.



$$\text{Άρα } \vec{L}_K = \vec{r}_K \times (m\vec{v}) = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r \cos \omega t & r \sin \omega t & -l \cos \varphi \\ -v_0 \sin \omega t & v_0 \cos \omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_K = mv_0 l \cos \varphi \left(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t \right) + \hat{z} r v_0.$$

Να υπολογιστεί : α) η στροφορμή \vec{L}_K της σφαίρας ως προς το σημείο K και β) το το σημείο O, γ) ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της στροφορμής ως προς το σημείο K, δ) ο ρυθμός μεταβολής της \vec{L}_O ως προς το O.



ΛΥΣΗ : β) Είναι $\vec{r}_O = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0)$ και άρα

$$\text{Άρα } \vec{L}_O = \vec{r}_O \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r \cos \omega t & r \sin \omega t & 0 \\ -v_0 \sin \omega t & v_0 \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} r v_0.$$

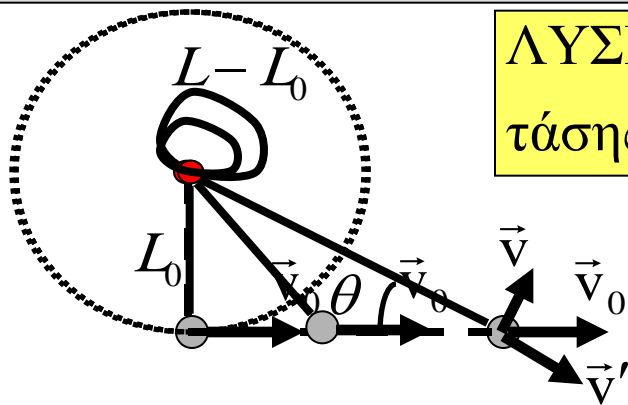
γ) Βρήκαμε $\vec{L}_K = m v_0 l \cos \varphi \left(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t \right) + \hat{z} r v_0$, άρα

$$\frac{d\vec{L}_K}{dt} = \omega m v_0 l \cos \varphi \left(-\hat{x} \sin \omega t + \hat{y} \cos \omega t \right).$$

δ) Από την (2) έχουμε ότι $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$.

Σώμα μάζας m είναι στερεωμένο στο άκρο χορδής μήκους L της οποίας το άλλο άκρο είναι μόνιμα στερεωμένο με πινέζα σε σημείο O πάνω σε λείο τραπέζι.

Στην αρχή κρατάμε ένα ενδιάμεσο σημείο της χορδής στο O και θέτουμε το σώμα σε κυκλική τροχιά ακτίνας $L_0 < L$ περί το O . Στην συνέχεια αφήνουμε ελεύθερο το ενδιάμεσο σημείο της χορδής. Βρείτε α) την ώθηση που ασκείται στιγμιαία στην πινέζα κατά την στιγμή που το νήμα τεντώνεται καθ' όλο το μήκος του, β) την τελική κινητική ενέργεια και γ) την τελική κεντρομόλο δύναμη.



ΛΥΣΗ: α) Στο σώμα ασκείται μόνο η κεντρική δύναμη της τάσης του νήματος την στιγμή που αυτό τεντώνεται.

Άρα διατηρείται η στροφορμή και βρίσκουμε

$$mL_0 v_0 = mLv \Rightarrow v = v_0 L_0 / L.$$

Όταν τεντώνει το νήμα η ορμή αλλάζει από \vec{v}_0 σε \vec{v} .

Η ώθηση στη πινέζα είναι

$$\int \vec{F} dt = \Delta \vec{P} = m\vec{v}' = \hat{v}' m v_0 \cos \theta = \hat{v}' m v_0 \sqrt{1 - (L_0/L)^2}.$$

β - γ) Κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν}} = mv^2/2 = mv_0^2 L_0^2 / (2L^2)$, κεντρομόλος $F = m v^2 / L$.

Άσκηση Γ8: Η τριβή θα λαμβάνει την μέγιστη τιμή της όσο ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε κίνηση. Όταν ο ανελκυστήρας ηρεμεί σε κάποιο σημείο (έστω και στιγμιαία) τότε ενδέχεται η δύναμη της τριβής να μην ισούται με την μέγιστη τιμή, αλλά να πρέπει να προσδιοριστεί με βάση όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στον ανελκυστήρα σε αυτό το σημείο.

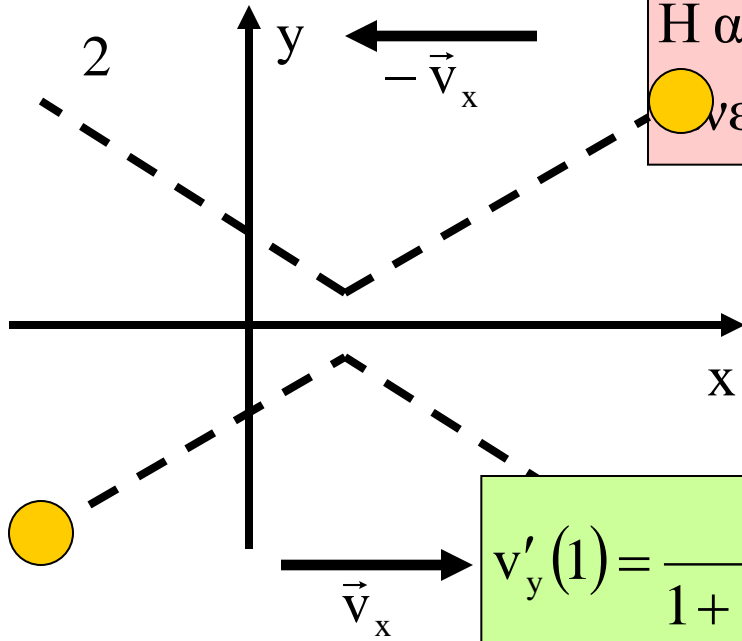
Άσκηση Γ9:1) Έστω \vec{a} η επιτάχυνση ενός σώματος όπως την μετράει αδρανειακός (π.χ. ακίνητος) παρατηρητής και \vec{a}' η επιτάχυνση του ίδιου σώματος όπως την μετράει παρατηρητής σε σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (το πρόβλημα θεωρεί ότι το $\vec{\omega}$ είναι σταθερό). Τότε, έχουμε πει ότι ισχύει

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'),$$

όπου \vec{v}' και \vec{r}' ως προς τον περιστρεφόμενο παρατηρητή.

2) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η σφαίρα δέχεται δύναμη από τα "πλαϊνά" τοιχώματα της ράβδου, όπως θα συνέβαινε αν, για παράδειγμα, η ράβδος είχε ένα αυλάκι μέσα στο οποίο βρίσκεται η σφαίρα.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ 1



Η αρχή διατήρησης της ορμής κατά τον άξονα y δίνει ορμές Mv_y και $-Mv_y$ για τις σφαίρες 1 και 2.

Για σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα $\vec{V} = V \hat{x} = v_x \hat{x}$ οι μετασχηματισμοί Lorentz δίνουν

$$v'_y(1) = \frac{v_y}{1 + v_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{v_y}{1 + v_x^2/c^2} \sqrt{1 - v_x^2/c^2} \quad (1).$$

$$v'_y(2) = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \quad (2).$$

Επειδή $v'_y(1) \neq v'_y(2)$, οι μεταβολές της ορμής, $2Mv'_y(1)$ και $2Mv'_y(2)$, κατά τον άξονα y δεν είναι ίσες στο κινούμενο σύστημα αναφοράς. Επομένως, οι (1) και (2) δείχνουν ότι ο ορισμός της ορμής $\vec{P} = M\vec{v}$ δεν είναι συμβατός με την σχετική αρχή διατήρησης.

Αν ορίσουμε την σχετικιστική ορμή ως $\vec{p} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (1),

τότε μπορεί ναδειχτεί ότι η αρχή διατήρησης της ορμής είναι συμβατή με τους μετασχηματισμούς Lorentz.

(Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $p_y = \gamma M dy/dt = M dy/d\tau$)

Η σχέση (1) δίνει ως οριακή περίπτωση την κλασική έκφραση $\vec{p} = M\vec{v}$.

Η (1) μπορεί να ερμηνευθεί ως ταχύτητα επί την σχετικιστική μάζα

$$\gamma M = \frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2)$$

Με τον συμβολισμό της (2) η M ονομάζεται μάζα ηρεμίας του σώματος.

Μερικές φορές η μάζα ηρεμίας συμβολίζεται με M_0 και η σχετικιστική μάζα με M .

Από τον ορισμό της σχετικιστικής ορμής $\vec{p} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (1).

και τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ βρίσκουμε για το έργο W

$$W = \int F dx = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \frac{dx}{dt} dt = \int \left[\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{Mv^3/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \int \frac{M v dv/dt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} dt = \int \frac{d}{dt} \left[\frac{Mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + A$$

Επειδή για $v = 0$ είναι $W = 0$ προκύπτει $A = -Mc^2$.

Άρα έχουμε για τη σχετικιστική κινητική ενέργεια $K = Mc^2(\gamma - 1)$ (1).

Η (1) δίνει την $K = \frac{Mv^2}{2}$ για $v/c \ll 1$ αφού τότε $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$

Άρα έχουμε για τη σχετικιστική κινητική ενέργεια $K = Mc^2(\gamma - 1)$ (1).

Είναι ακόμη για τη σχετικιστική ορμή $p = Mv\gamma$ (2).

Συνεπώς, αν ορίσουμε την ολική σχετικιστική ενέργεια E ως $E = Mc^2\gamma$ (3)

τότε η ποσότητα $E^2 - p^2c^2 = M^2c^4$ είναι αναλλοίωτο μέγεθος.

Η σχέση (3) εκφράζει την αρχή ισοδυναμίας μάζας - ενέργειας.

Ακόμη και για $v = 0$ ένα σώμα φέρει ενέργεια ίση με την μάζα ηρεμίας επί το τετράγωνο της ταχύτητας του φωτός.

Η ισοδυναμία μάζας - ενέργειας επαληθεύεται συνεχώς σε πειράματα διάσπασης και παραγωγής στοιχειωδών σωματιδίων.

Για τις συνιστώσες της ορμής έχουμε $p_x = M \frac{dx}{d\tau}$, $p_y = M \frac{dy}{d\tau}$, $p_z = M \frac{dz}{d\tau}$ (1)

$$\text{ενώ για την ενέργεια } E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Mc^2 \frac{dt}{d\tau} \quad (2).$$

Αφού τα μεγέθη dx , dy , dz και dt μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις Lorentz, ενώ τα M , c , και τ είναι αναλλοίωτα ως προς αυτούς τους μετασχηματισμούς,

συμπεραίνουμε ότι και τα p_x , p_y , p_z και E μετασχηματίζονται κατά Lorentz :

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{\beta E}{c} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad (3)$$

$$E' = \gamma (E - p_x c \beta) \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) προκύπτει ακόμη ότι $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{c^2 p_x}{E}$

$$\text{ή γενικότερα : } \vec{p} = E\vec{v}/c^2$$

ΜΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Δύο όμοια σωματίδια 1 και 2 συγκρούονται και ενώνονται σε ένα νέο σωματίδιο 3.

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας το 3 ηρεμεί.

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει ($E_1 = E_2$)

$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 \Rightarrow M_3 c^2 = \frac{2Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

όπου v η ταχύτητα του σωματιδίου 1 (ή 2) στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Είναι $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots$

οπότε $M_3 = 2M + \Delta M,$

όπου ΔM αντιπροσωπεύει την απώλεια της κινητικής ενέργειας και την ενσωμάτωσή της ως μέρος της μάζας του σωματιδίου 3.

Για ένα σύστημα N σωμάτων μάζας M η ολική μάζα είναι NM μόνο αν τα σώματα ηρεμούν.

Αν τα σώματα έχουν ταχύτητες $v \ll c$ τότε η συνολική μάζα του συστήματος είναι $NM(1 + v^2/c^2)$.

Ομοίως, παραγωγή δυναμικής ενέργειας αυξάνει την μάζα.

Έτσι, η μάζα ενός συμπιεσμένου ελατηρίου είναι μεγαλύτερη από την μάζα ενός ασυμπιεστού ελατηρίου.

Οι παραπάνω μεταβολές μάζας είναι πολύ μικρές (αμελητέες) στα περισσότερα φαινόμενα της καθημερινής εμπειρίας.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ ΜΑΖΑΣ - ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Δύο μάζες 10^{-3} kg κινούνται η μία προς την άλλη με ταχύτητες 1 km/s . Οι μάζες συγκρούονται και ενώνονται σε ένα σώμα.

$$\text{Η μεταβολή της μάζας είναι } \Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = 2 \frac{1}{2} M \frac{v^2}{c^2} = 10^{-14} \text{ kg.}$$

Το άθροισμα των μαζών ηρεμίας ενός πρωτονίου και ενός νετρονίου είναι $M_p + M_n = 3,34761 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Η μάζα του πυρήνα του δευτερίου (που περιέχει ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο) είναι $3,34365 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Η διαφορά $0,00396 \times 10^{-27} \text{ kg}$ είναι ισοδύναμη με $2,23 \text{ MeV}$

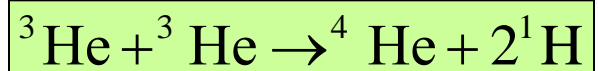
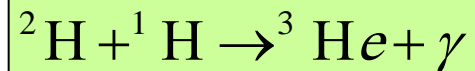
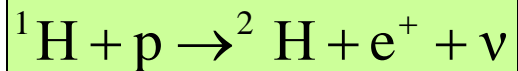
και αντιπροσωπεύει την ενέργεια σύνδεσης του δευτερίου (λόγω των ισχυρών δυνάμεων).

Σε πυρηνικές αντιδράσεις σχάσης η συνολική μάζα ελαττώνεται και η μεταβολή αυτή απελευθερώνεται ως ενέργεια.

Η αντίδραση $\text{Be} + \text{H} \rightarrow \text{Li} + \text{He}$ απελευθερώνει 2,28 MeV.

Σε πυρηνικές αντιδράσεις σύντηξης η μάζα επίσης μειώνεται και έτσι απελευθερώνεται ενέργεια.

Οι παρακάτω αλυσιδωτές αντιδράσεις επιτυγχάνουν σύντηξη υδρογόνου σε ήλιο :



Η αλυσίδα των αντιδράσεων είναι η κύρια πηγή ενέργεια του Ήλιου.

$$\text{Είναι } E^2 - p^2 c^2 = M^2 c^4 \quad (1).$$

Παράδειγμα σωματιδίου μηδενικής μάζας είναι το φωτόνιο (και ίσως το νεutrίνο).

$$\text{Έτσι αν } M = 0, \text{ τότε } E = pc.$$

Η ενέργεια ενός φωτονίου συνδέεται με την συχνότητά του ν με την σχέση $E = h\nu$, όπου $h = 6,62 \times 10^{-34}$ Js είναι η σταθερά του Planck.

Έστω ν η συχνότητα φωτονίου σε σύστημα αναφοράς S και ν' σε κινούμενο με ανηγμένη ταχύτητα β σύστημα S'.

$$\text{Είναι } p'_x = \gamma \left(\frac{h\nu}{c} - \beta \frac{h\nu}{c} \right) = \frac{h\nu}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (1).$$

$$E' = \gamma \left(h\nu - \beta c \frac{h\nu}{c} \right) = h\nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (2).$$

$$\text{Από τις (1) και (2) και επειδή } E' = p'c = h\nu' \text{ βρίσκουμε } \nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (3).$$

Η σχέση (3) περιγράφει το σχετικιστικό φαινόμενο Doppler.

Μετασχηματισμοί Lorentz
για θέση - χρόνο :

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Τα (x, y, z, ct) αποτελούν μια τετράδα (ένα τετραδιάνυσμα) που μετασχηματίζεται σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις του Lorentz.

Ένα άλλο τετραδιάνυσμα είναι $(p_x, p_y, p_z, E/c)$
για το οποίο ο μετασχηματισμός παίρνει την μορφή :

$$p'_x = \frac{p_x - VE/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E'/c^2 = \frac{E/c^2 - (V/c^2)p_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Οι παραπάνω σχέσεις συμπίπτουν
με αυτές που δώσαμε στο
προηγούμενο μάθημα

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{\beta E}{c} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z,$$

$$E' = \gamma (E - p_x c \beta)$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα ισχύει : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (1).

Αν M είναι η μάζα ηρεμίας, τότε

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{M\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{M v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \gamma M \vec{a} + \frac{\gamma^3 M (\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2} \vec{v},$$

δηλαδή, η δύναμη \vec{F} δεν είναι κατ'ανάγκη

παράλληλη στην επιτάχυνση $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Σε αντίθεση με την μάζα, η οποία μεταβάλλεται με την ταχύτητα σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, το φορτίο είναι αναλλοίωτο μέγεθος.

Όλοι οι παρατηρητές μετρούνε το ίδιο φορτίο για το ηλεκτρόνιο, το πρωτόνιο, και για κάθε άλλο φορτισμένο σώμα.

Βρείτε την ελάχιστη κινητική ενέργεια (ενέργεια κατωφλίου) που πρέπει να έχει σωματίδιο 1 που προσπίπτει σε ακίνητο σωματίδιο 2 και παράγει σωματίδια 3 και 4. Οι μάζες ηρεμίας των σωματιδίων είναι m_1 , m_2 , m_3 και m_4 .

ΛΥΣΗ: Στο σύστημα του εργαστηρίου (L - σύστημα) όπου το σωματίδιο 2 ηρεμεί, έχουμε πριν την κρούση: $E_1 = c\sqrt{m_1^2 c^2 + p_1^2}$ και $E_2 = m_2 c^2$.

Επομένως, η συνολική ενέργεια είναι $E = E_1 + m_2 c^2$ και η ορμή $\vec{P} = \vec{p}_1$.

Αν E' είναι η ολική ενέργεια στο σύστημα αναφοράς C του κέντρου μάζας (συνολική ορμή $\vec{P}' = 0$) τότε

$$E'^2 - P'^2 c^2 = E^2 - P^2 c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E' = \sqrt{E^2 - c^2 P^2} = \sqrt{(E_1 + m_2 c^2)^2 - c^2 p_1^2} = c\sqrt{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2E_1 m_2}.$$

Είναι ακόμη $E_1 = E_{k1} + m_1 c^2$, όπου E_{k1} η κινητική ενέργεια του 1 στο L.

$$\text{και } E' = c\sqrt{(m_1 + m_2)^2 c^2 + 2E_{k1} m_2}.$$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ 5

Η ελάχιστη ενέργεια που χρειάζεται η αντίδραση αντιστοιχεί στην περίπτωση που τα παραγόμενα σωματίδια 3 και 4 ηρεμούν στο σύστημα C.

$$\text{Είναι τότε } E_3' = m_3 c^2 \text{ και } E_4' = m_4 c^2.$$

Είδαμε παραπάνω ότι πριν την κρούση είναι $E = c\sqrt{(m_1 + m_2)^2 c^2 + 2E_{k1}m_2}$.

Επομένως, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας βρίσκουμε

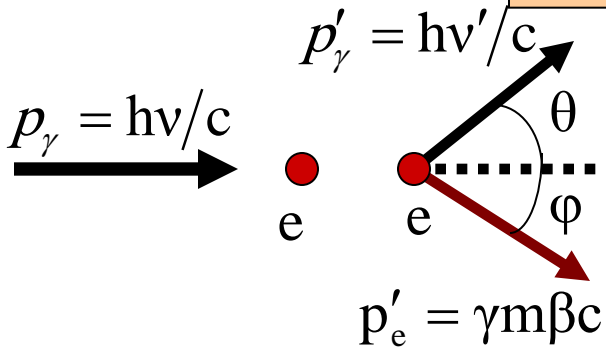
$$E = E_3' + E_4' \Rightarrow c\sqrt{(m_1 + m_2)^2 c^2 + 2E_{k1}m_2} = m_3 c^2 + m_4 c^2 \Rightarrow$$

$$E_{k1} = \frac{c^2}{2m_2} \left[(m_3 + m_4)^2 - (m_1 + m_2)^2 \right] = -\frac{Q}{2m_2} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4),$$

$$\text{όπου } Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2.$$

Αν το Q είναι θετικό, τότε η αντίδραση μπορεί να γίνει ακόμη και με μηδενική κινητική ενέργεια E_{k1} αφού το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των 1 και 2 επαρκεί για την παραγωγή των 3 και 4. Σε αυτήν την περίπτωση, η περίσσεια ενέργεια Qc^2 απελευθερώνεται ως κινητική ενέργεια των 3 και 4.

Σκέδαση φωτονίου από ηλεκτρόνιο.



Διατήρηση ορμής:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + \gamma m \beta c \cos \varphi$$

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \theta = \gamma m \beta c \sin \varphi$$

Από τον νόμο των συνημιτόνων:

Διατήρηση ενέργειας:

$$c^2 p_e'^2 = (h\nu')^2 + (h\nu)^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \theta \quad (1)$$

$$mc^2 + h\nu = h\nu' + \sqrt{p_e'^2 c^2 + m^2 c^4} \Rightarrow (mc^2 + h\nu - h\nu')^2 = p_e'^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας από την (1) στην (2) βρίσκουμε τελικά

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\text{ή για τα μήκη κύματος } \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

Το φαινόμενο Compton κατέδειξε τον σωματιδιακό χαρακτήρα του φωτός.

Η εξίσωση κίνησης ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -Cx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{C}{M} x \quad (1).$$

Η γενική λύση της (1) έχει την μορφή

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (2),$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{C/M}$ είναι η κυκλική συχνότητα.

πλάτος

(αρχική) φάση

Η διατήρηση της ενέργειας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο επίλυσης της κίνησης :

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} Cx^2 = E \quad (2).$$

Έστω ότι για $\frac{dx}{dt} = 0$ είναι $x = A$.

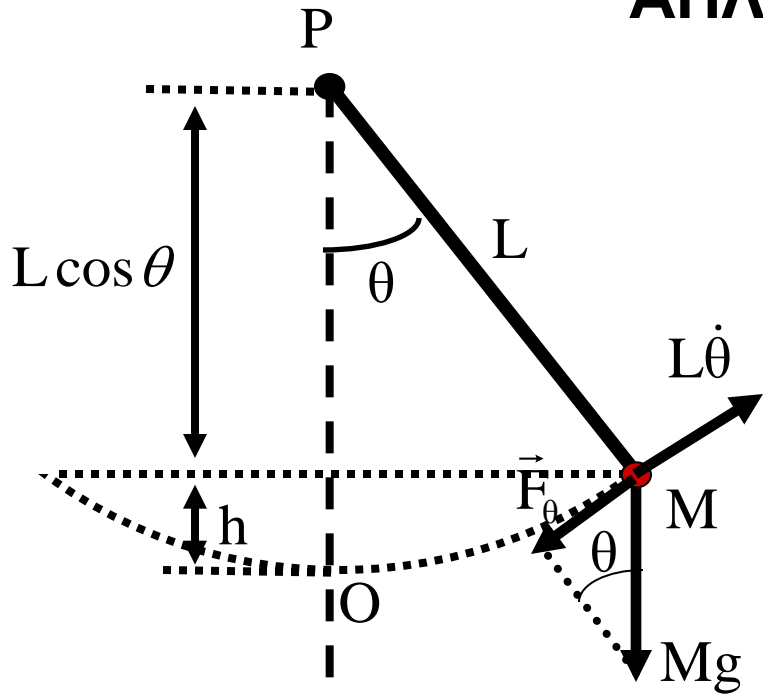
Τότε η (2) δίνει $E = CA^2/2$ και

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2} \quad (3).$$

Η (3) είναι εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.
Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε :

$$\sin^{-1} \frac{x}{A} = \omega_0 t + \varphi \quad (4), \text{ όπου } \varphi \text{ μια σταθερά ολοκλήρωσης.}$$

Από την (4) βρίσκουμε την λύση (1).



Αν s είναι το μήκος της κυκλικής διαδρομής που ακολουθεί η μάζα M τότε ισχύει

$$s = L\theta \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = L\dot{\theta} \Rightarrow a = L\ddot{\theta} \quad (1)$$

Η δύναμη επαναφοράς είναι η $F_{\theta} = Mg \sin \theta$.

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$ML\ddot{\theta} = -Mg \sin \theta \quad (2).$$

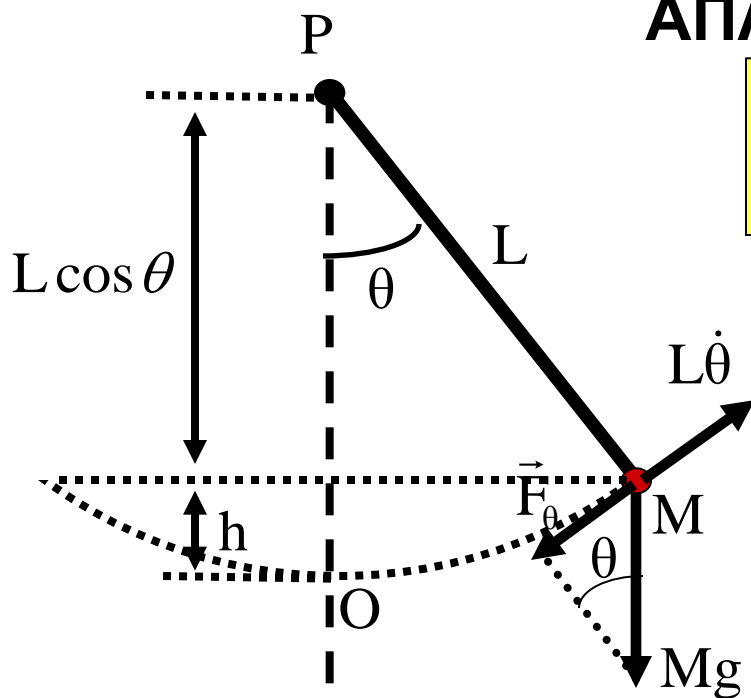
Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για το $\sin \theta$ ($\sin \theta = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots$)

βρίσκουμε για μικρές γωνίες την εξίσωση

$$\ddot{\theta} = -g\theta/L \quad (3).$$

Η γενική λύση της (3) είναι η $\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ (4), με $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{g/L}}{2\pi}$ και η περίοδος $T_0 = 1/f_0$.



Η συχνότητα f_0 είναι ανεξάρτητη του πλάτους της ταλάντωσης (για μικρές γωνίες θ).

Για πεπερασμένες γωνίες η περίοδος T μεταβάλλεται κατά μικρό ποσοστό :

Πλάτος	T/T_0
0°	1,0000
10°	1,0019
20°	1,0077
30°	1,0174

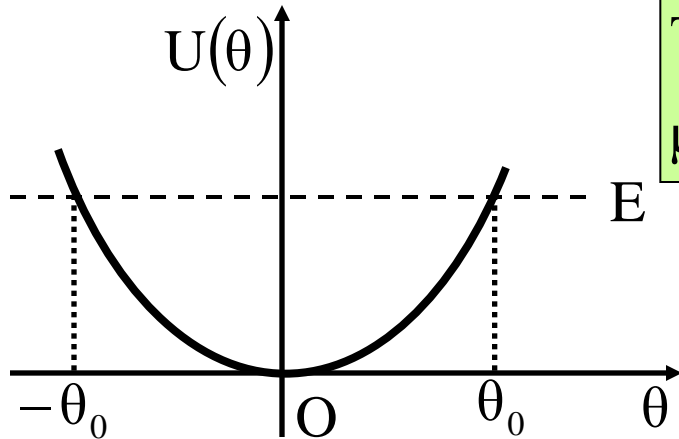
Θα αναλύσουμε τώρα την κίνηση του εκκρεμούς χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας :

Απόκλιση σε γωνία θ αυξάνει την δυναμική ενέργεια λόγω της βαρύτητας της Γης σε $U(\theta) = Mgh = MgL(1 - \cos \theta)$.

Αν E είναι η ολική ενέργεια τότε $E = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos \theta)$ (4).

Για μικρά θ είναι $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ και η (4) δίνει $E = ML^2 \dot{\theta}^2 / 2 + MgL \theta^2 / 2$ (5).

Για μικρά θ είναι $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ και η (4) δίνει $E = ML^2\dot{\theta}^2/2 + MgL\theta^2/2$ (5).

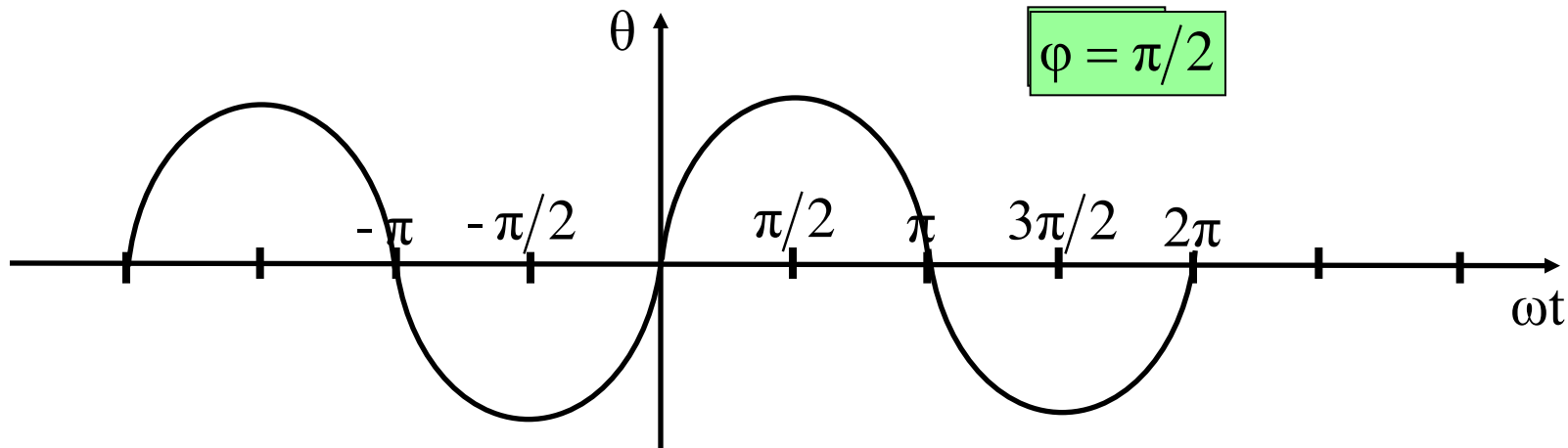


Τα σημεία ανάκαμψης θ_0 προσδιορίζονται από τον μηδενισμό της κινητικής ενέργειας : $E = MgL\theta_0^2/2$.

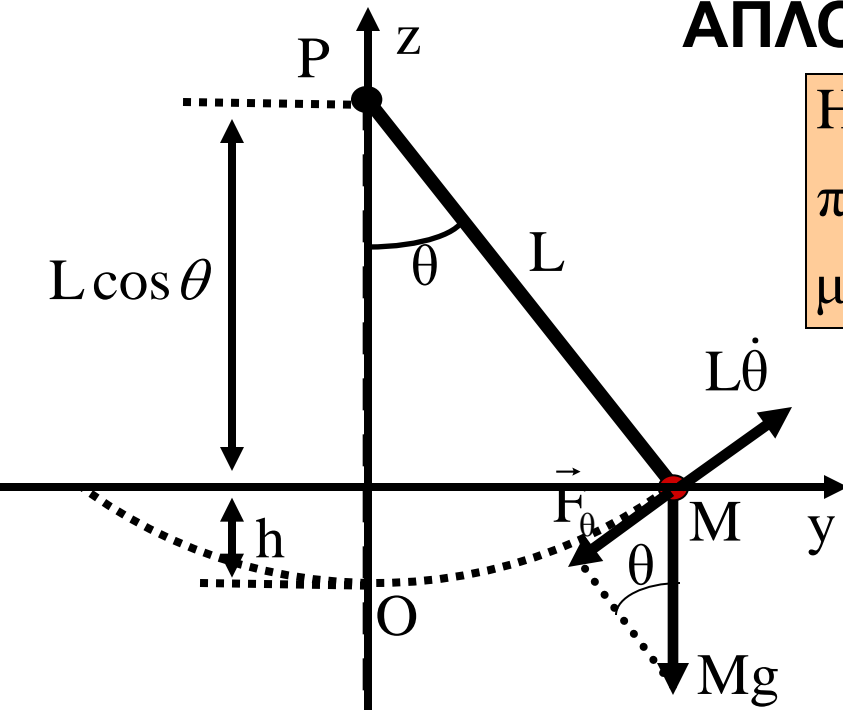
Αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} dt \Rightarrow \sin^{-1} \frac{\theta}{\theta_0} = \omega_0 t + \varphi \Rightarrow \theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (6).$$



ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



Η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς μπορεί να προκύψει από την ροπή που ασκείται στην μάζα M και την σχετική στροφορμή.

Έστω ότι το εκκρεμές ταλαντώνεται στο επίπεδο yz . Τότε για την ροπή βρίσκουμε

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow N_x = -LMg \sin \theta \quad (7).$$

Για την στροφορμή έχουμε

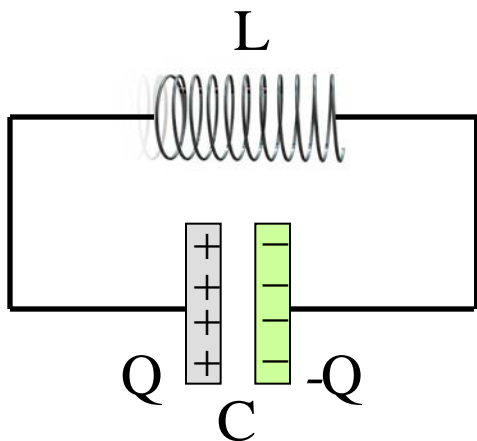
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L_x = ML^2 \dot{\theta} \quad (8).$$

Είναι όμως $N_x = \frac{dL_x}{dt}$ και από τις (7) και (8) βρίσκουμε :

$$-LMg \sin \theta = ML^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (9).$$

Η εξίσωση (9) είναι ίδια με την εξίσωση (2) που βρήκαμε προηγουμένως για την κίνηση του απλού εκκρεμούς.

Αν C είναι η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή και Q το φορτίο που είναι αποθηκευμένο στις πλάκες του πυκνωτή, τότε ανάμεσα στις πλάκες αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού $V_C = Q/C$ (1).



Αν I είναι η ένταση του ρεύματος που διατρέχει αυτεπαγωγή L , τότε η τάση στα άκρα της L είναι $V_L = L dI/dt$ (2).

Όταν ο πυκνωτής C και η αυτεπαγωγή L ενωθούν σε σειρά τότε πρέπει να ισχύει $V_L = -V_C$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) βρίσκουμε (είναι $I = dQ/dt$):

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4).$$

Η (4) είναι ίδια με την εξίσωση του ελατηρίου με βάση τις αντιστοιχίες

$Q \leftrightarrow x, L \leftrightarrow M, 1/C \leftrightarrow C_{\varepsilon\lambda}$, όπου $C_{\varepsilon\lambda}$ η σταθερά του ελατηρίου.

Λύση της (4) δίνει $Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ και $I = \omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

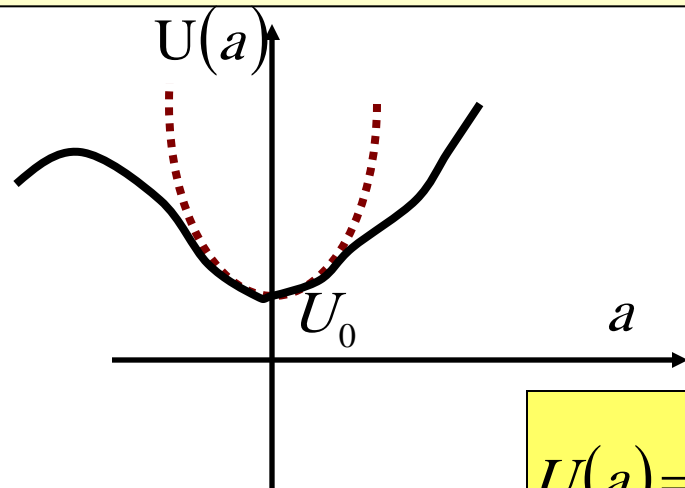
$$\text{όπου } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

	Απλό εκκρεμές	Σύστημα μάζας - ελατηρίου	Κύκλωμα LC	Κινητική ενέργεια, K	Δυναμική ενέργεια, U
A	$t = 0$ $\theta = \theta_0$ 	$x = x_0$ $v = 0$ 	$Q = Q_0$ $I = 0$ 	—	
B	$t = \frac{\pi}{4\omega}$ $\theta > 0$ 	$x > 0$ $v < 0$ 	$Q > 0$ $I < 0$ 		
Γ	$t = \frac{\pi}{2\omega}$ $\theta = 0$ 	$x = 0$ $v = -v_{max}$ 	$Q = 0$ $I = -I_{max}$ 		—
Δ	$t = \frac{3\pi}{4\omega}$ $\theta < 0$ 	$x < 0$ $v < 0$ 	$Q < 0$ $I < 0$ 		
E	$t = \frac{\pi}{\omega}$ $\theta = -\theta_0$ 	$x = -x_0$ $v = 0$ 	$Q = -Q_0$ $I = 0$ 	—	
Z	$t = \frac{5\pi}{4\omega}$ $\theta < 0$ 	$x < 0$ $v > 0$ 	$Q < 0$ $I > 0$ 		
H	$t = \frac{3\pi}{2\omega}$ $\theta = 0$ 	$x = 0$ $v = v_{max}$ 	$Q = 0$ $I = I_{max}$ 		—
Θ	$t = \frac{7\pi}{4\omega}$ $\theta > 0$ 	$x > 0$ $v > 0$ 	$Q > 0$ $I > 0$ 		

Α. Τσέτσερης, 2^ο Γμήμα, Φυσική Ι (2019), ΕΜΠ-ΕΦΜΜΥ

Έστω $U(a)$ η δυναμική ενέργεια ενός φυσικού συστήματος συναρτήσει κάποιου βαθμού ελευθερίας a (π.χ., απόσταση, γωνία, φορτίο, κλπ).

Έστω ακόμη ότι για $a = 0$ το σύστημα είναι σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας



Είναι τότε $\left(\frac{dU}{da}\right)_{a=0} = 0$ και $\left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_{a=0} = k > 0$.

Το ανάπτυγμα Taylor της $U(a)$ γύρω από το 0 δίνει τότε :

$$U(a) = U(0) + a \left(\frac{dU}{da}\right)_{a=0} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{d^2U}{da^2}\right)_{a=0} + \dots \approx U(0) + \frac{ka^2}{2}.$$

Η (γενικευμένη) δύναμη $F(a)$ που σχετίζεται με την $U(a)$ είναι $F(a) = -\frac{dU}{da}$

και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει $M \frac{d^2 a}{dt^2} = -ka$ (1).

Η (1) είναι η εξίσωση κίνησης αρμονικού ταλαντωτή.

Αν T είναι η περίοδος ταλάντωσης τότε η μέση κινητική ενέργεια ορίζεται ως

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} M \dot{x}^2 dt \quad (1) \text{ και για } x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ παίρνουμε}$$

$$\langle K \rangle = \frac{M \omega_0^2 A^2}{4 \pi / \omega_0} \int_0^{2\pi / \omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt \quad (2).$$

$$\text{Είναι } \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi / \omega_0} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 y dy = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Οπότε από την (2) βρίσκουμε } \langle K \rangle = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 \quad (3).$$

Ομοίως βρίσκουμε για την δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{2} C x^2 = \frac{1}{2} C A^2 \sin^2 \omega_0 t$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} C A^2 = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 \quad (4).$$

Για την ενέργεια βρίσκουμε

$$E = \langle K \rangle + \langle U \rangle = \frac{1}{2} M \omega_0^2 A^2 \quad (5).$$

Έχουμε δει ότι σε ορισμένες περιπτώσεις αναπτύσσονται τριβές που είναι ανάλογες της ταχύτητας. Η εξίσωση της κίνησης είναι

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -b\dot{x} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (1),$$

όπου $\tau = \frac{M}{b}$ είναι ο λεγόμενος χρόνος αποκατάστασης.

Η λύση της (1) δίνει $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ και για την κινητική ενέργεια $K = K_0 e^{-2t/\tau}$.

Παράδειγμα τριβής ανάλογης της ταχύτητας είναι η τριβή που αναπτύσσεται σε σφαίρα μέσα σε υγρό :

$F_{\tau\rho} = -6\pi\eta r v$ (2), όπου r η ακτίνα της σφαίρας, η ο συντελεστής εσωτερικής τριβής (ιξώδες) του υγρού.

Η (2) περιγράφει τον λεγόμενο νόμο Stokes.

Αν επιπλέον της τριβής ασκείται στο σώμα μια σταθερή δύναμη $F_{\sigma\tau}$ τότε η (1) δίνει για την οριακή ταχύτητα (αφού επέλθει ισορροπία δυνάμεων) $v = F_{\sigma\tau} / b$.

Έστω ότι μάζα M είναι δεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς C και δέχεται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας. Η εξίσωση κίνησης παίρνει την μορφή :

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0 \quad (1) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2) \quad \text{όπου } \frac{1}{\tau} = \frac{b}{M} \quad (3), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} \quad (4).$$

Θα δοκιμάσουμε ως λύσεις της (2) τις συναρτήσεις με γενική μορφή $x_0 e^{i\phi} e^{\lambda t}$.

$$\text{Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε : } \lambda^2 + \lambda/\tau + \omega_0^2 = 0 \quad (5).$$

Η (5) είναι η εξίσωση του λεγόμενου χαρακτηριστικού διωνύμου, οι λύσεις του οποίου περιγράφουν τις $x_0 e^{i\phi} e^{\lambda t}$.

$$\text{Οι λύσεις της (5) είναι οι } \lambda_{1,2} = \frac{-1/\tau \pm \sqrt{(1/\tau)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -1/2\tau \pm i\sqrt{\omega_0^2 - (1/2\tau)^2}.$$

$$\text{Έτσι παίρνουμε τις λύσεις } x_0 e^{-1/2\tau t} e^{\pm i\omega t + \phi} \quad (6), \quad \text{όπου } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (1/2\tau)^2}.$$

Το πραγματικό (ή φανταστικό) μέρος των λύσεων (6) περιγράφουν περιοδικές αρμονικές κινήσεις με απόσβεση.

Έστω ότι μάζα M είναι δεμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς C και δέχεται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας. Η εξίσωση κίνησης παίρνει την μορφή :

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0 \quad (1) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2) \quad \text{όπου } \frac{1}{\tau} = \frac{b}{M} \quad (3), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} \quad (4).$$

Θα δοκιμάσουμε ως λύσεις της (1) τις συναρτήσεις με γενική μορφή :

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) \quad (5).$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (1) βρίσκουμε :

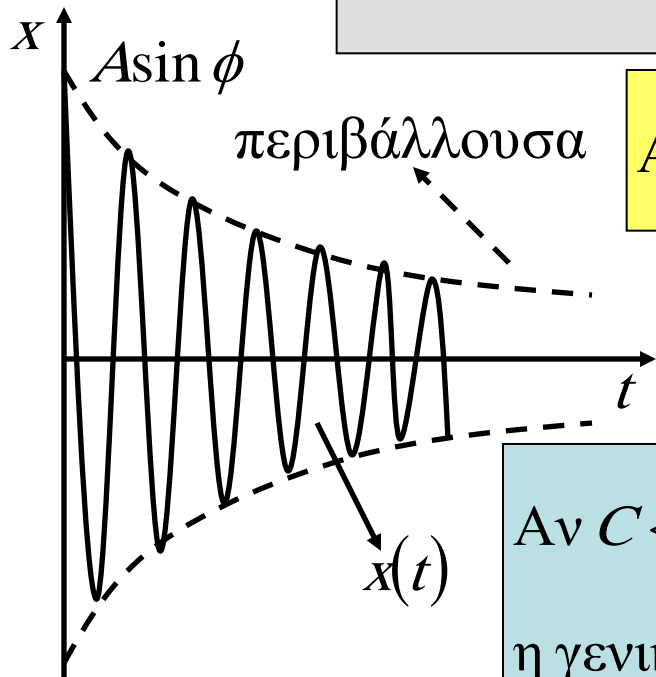
$$Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) [C - \beta b - M\omega^2] + Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) [b\omega - 2M\omega\beta] = 0 \quad (6).$$

Για να αληθεύει η (6) $\forall t$ θα πρέπει :

$$b\omega = 2M\omega\beta \Rightarrow \beta = \frac{b}{2M} \quad (7) \text{ και}$$

$$C - \beta b - M\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{C}{M} - \frac{b^2}{4M^2} = \frac{C}{M} - \beta^2 \quad (8).$$

$$\text{Αν } \beta \ll 1 \text{ τότε } \omega \approx \sqrt{\frac{C}{M}} = \omega_0.$$



$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) \quad (5) \quad \text{με} \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{M} - \frac{b^2}{4M^2}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{b}{2M}.$$

$$\text{Αν } C = \frac{b^2}{4M} \Rightarrow \omega = 0 \text{ η γενική λύση έχει την μορφή:}$$

$$x = A'e^{-bt/2M} + Bte^{-bt/2M} \quad (9)$$

Η (9) είναι η λύση για κρίσιμη απόσβεση.

Αν $C < \frac{b^2}{4M}$ τότε έχουμε περίπτωση υπεραπόσβεσης και η γενική λύση είναι $x = e^{-bt/2M} [A \exp(\lambda t) + B \exp(-\lambda t)]$

$$\text{ή αλλιώς } x = Ae^{-c_1 t} + Be^{-c_2 t}$$

$$\text{όπου } \lambda = \sqrt{b^2/4M^2 - C/M} \text{ και } c_1 = b/2M - \lambda, \quad c_2 = b/2M + \lambda.$$

$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (5) \text{ με } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} \text{ και } \beta = \frac{1}{2\tau}.$$

$$\text{Άρα } x = Ae^{-t/2\tau} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2} + \varphi\right)$$

$$\text{Αν } \omega_0\tau \gg 1 \text{ τότε} \\ x \approx Ae^{-t/2\tau} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (10).$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον ρυθμό απώλειας ενέργειας από αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση.

Για την κινητική ενέργεια έχουμε

$$K = \frac{1}{2} MA^2 e^{-t/\tau} \left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 \sin^2 \omega_0 t + \omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\tau} A^2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \right]$$

Για να προσδιορίσουμε τον μέσο ρυθμό απώλειας πρέπει να ολοκληρώσουμε πάνω σε μία περίοδο $T = 2\pi/\omega$.

$$K = \frac{1}{2} MA^2 e^{-t/\tau} \left[\left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 \sin^2 \omega_0 t + \omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\tau} A^2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \right]$$

$$\int_t^{t+T} e^{-t'/\tau} \sin^2 \omega_0 t' dt' = e^{-t/\tau} \int_t^{t+T} e^{-(t'-t)/\tau} \sin^2 \omega_0 t' dt' \quad (1)$$

Αν $\omega_0 \tau \gg 1$ τότε $e^{-(t'-t)/\tau} \approx 1$ και η (1) δίνει

$$e^{-t/\tau} \int_t^{t+T} \sin^2 \omega_0 t' dt' = \frac{1}{2} e^{-t/\tau} \quad (2)$$

$$\text{Είναι ακόμη } \int_t^{t+T} \cos^2 \omega_0 t' dt' = \frac{1}{2} \text{ και } \int_t^{t+T} \cos \omega_0 t' \sin \omega_0 t' dt' = 0.$$

$$\text{Τελικά βρίσκουμε } \langle K \rangle = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 e^{-t/\tau} \quad (3).$$

Ομοίως έχουμε για την δυναμική ενέργεια $\langle U \rangle = \frac{1}{4} M \omega_0^2 A^2 e^{-t/\tau} \quad (4).$

Για τον ρυθμό απώλειας της ενέργειας (ισχύς απωλειών) έχουμε

$$\langle P \rangle = -\frac{d}{dt} \langle E \rangle = -\frac{d}{dt} (\langle K \rangle + \langle U \rangle) = \frac{\langle E \rangle}{\tau}$$

Σε φυσικά συστήματα που ταλαντώνονται με απόσβεση θέλουμε να χαρακτηρίσουμε τις απώλειες ενέργειας με κάποιον αδιάστατο αριθμό.

Ορίζουμε τον παράγοντα ποιότητας Q ως :

$$Q = 2\pi \frac{\text{αποθηκευμένη ενέργεια}}{\text{απώλεια ενέργειας σε μια περίοδο}} = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T} = \omega_0 \tau$$

Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Q τόσο μικρότερες είναι αναλογικά οι απώλειες ενέργειας.

Παραδείγματα :

Σεισμικό κύμα στην Γη : $Q = 250 - 1400$

Χορδή βιολιού : $Q = 10^3$

Διεγερμένο άτομο : $Q = 10^7$

Σώμα μάζας M είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς C και δέχεται εξωτερική δύναμη $F(t)$. Ας υποθέσουμε ότι $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Η εξίσωση κίνησης είναι

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F_0 \sin \omega t \quad (1), \text{ όπου } b \text{ ο συντελεστής για την δύναμη αντίστασης.}$$

Για $\tau = M/b$, $\omega_0 = \sqrt{C/M}$, $a_0 = F_0/M$ η (1) παίρνει την μορφή

$$\ddot{x} + \dot{x}/\tau + \omega_0^2 x = a_0 \sin \omega t \quad (2). \quad \text{Θα δοκιμάσουμε την λύση } x = x_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (3).$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) βρίσκουμε (μετά από κάποιες πράξεις)

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - \frac{\omega}{\tau} \sin \phi \right] \sin \omega t + \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi + \frac{\omega}{\tau} \cos \phi \right] \cos \omega t = \frac{a_0}{x_0} \sin \omega t$$

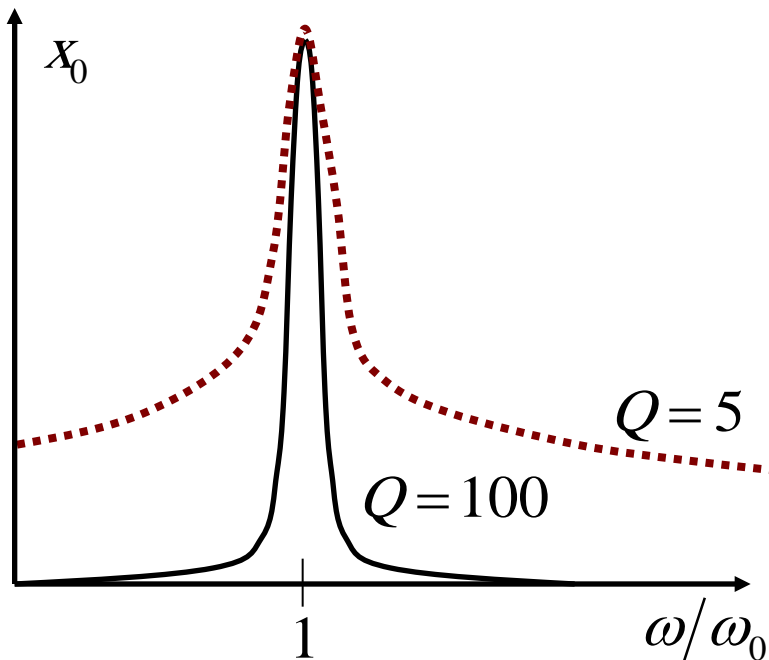
$$\text{Άρα: } (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - \frac{\omega}{\tau} \sin \phi = \frac{a_0}{x_0} \quad (4) \text{ και } (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi + \frac{\omega}{\tau} \cos \phi = 0 \quad (5).$$

$$\text{Από την (5) βρίσκουμε } \tan \phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6).$$

Η (6) μας δίνει τα $\sin \phi$, $\cos \phi$, και από την (4) παίρνουμε

$$x_0 = a_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (7).$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (3), \quad \tan \phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6), \quad x_0 = a_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (7).$$



Το μέγιστο του πλάτους προκύπτει για

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0 \text{ για } Q = \omega_0 \tau \gg 1.$$

Αν $\omega \ll \omega_0$ τότε από την (6) $\phi \approx 0$
(ταλάντωση σε φάση με την εξωτερική \vec{F}).

Για $\omega = \omega_0$ (συντονισμός) είναι $x_0 = \frac{a_0 \tau}{\omega_0}$.

και $\cos \phi \approx 0$, $\sin \phi \approx 1$, δηλαδή $\phi \approx -\pi/2$.

Αν $\omega \gg \omega_0$ τότε $x_0 \approx \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{M\omega^2}$ και $\phi \approx -\pi$.

Έστω $x_1(t)$ και $x_2(t)$ οι λύσεις για ταλαντωτή με απόσβεση υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων $F_1(t)$ και $F_2(t)$. Είναι τότε :

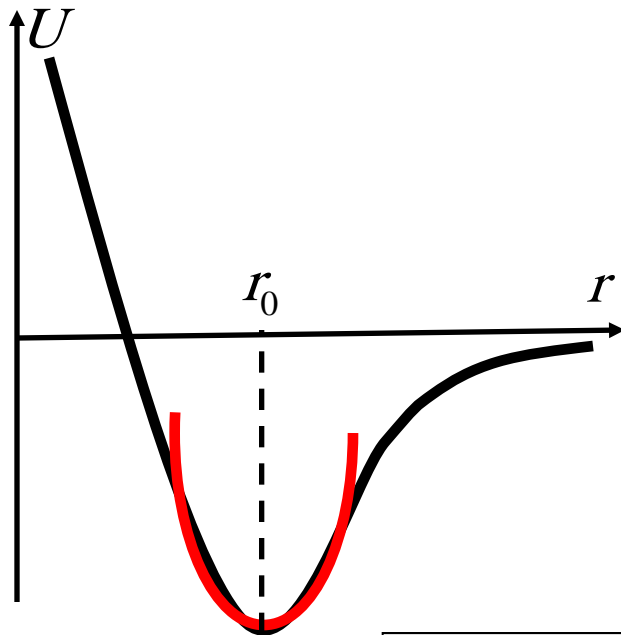
$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1/\tau + \omega_0^2 x_1 = F_1(t) \text{ και } \ddot{x}_2 + \dot{x}_2/\tau + \omega_0^2 x_2 = F_2(t).$$

Προσθέτοντας κατά μέρη βρίσκουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t),$$

δηλαδή η $x_1(t) + x_2(t)$ είναι λύση για ταλάντωση υπό την επίδραση της συνισταμένης δύναμης $F_1(t) + F_2(t)$.

Προσδιορίστε την συχνότητα ταλάντωσης ατόμου μάζας m που κινείται μέσα σε ένα δυναμικό τύπου Lennard - Jones.



Το δυναμικό Lennard - Jones έχει την μορφή

$$U = -A \left[2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} \right] \quad (1).$$

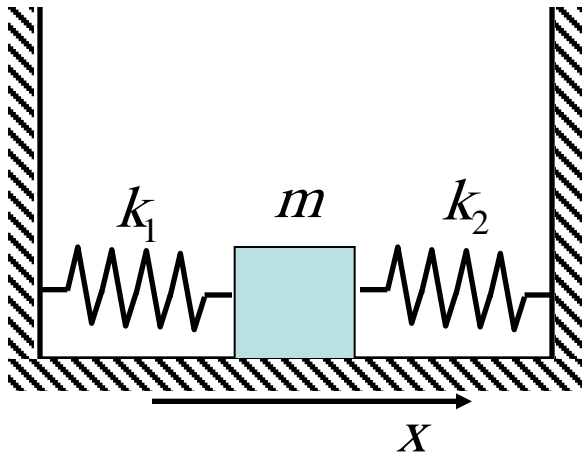
Κοντά στο σημείο ισορροπίας r_0 είναι

$$U \approx U(r_0) + \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \left. \frac{d^2 U}{dr^2} \right|_{r=r_0}$$

$$\text{Είναι } \left. \frac{d^2 U}{dr^2} \right|_{r=r_0} = -A \left(84 \frac{r_0^6}{r^8} - 156 \frac{r_0^{12}}{r^{14}} \right) \Bigg|_{r=r_0} = 72 \frac{A}{r_0^2}.$$

Από την σχέση $U = \frac{1}{2} k r^2$ προκύπτει ότι $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{72 A/m}$.

Προσδιορίστε την συχνότητα ταλάντωσης για την μάζα m του σχήματος. Οι σταθερές των ελατηρίων είναι k_1 και k_2 .



Έστω ότι η μάζα m συμπιέζει το ελατήριο k_2 κατά Δx .

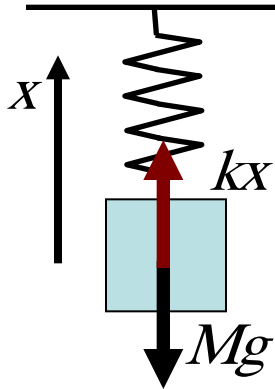
Συγχρόνως το ελατήριο k_1 τεντώνει κατά Δx .

Η δύναμη που δέχεται η μάζα m είναι το άθροισμα $F = F_1 + F_2 = -k_1\Delta x - k_2\Delta x = -(k_1 + k_2)\Delta x$.

Επομένως, το σύστημα των δύο ελατηρίων του σχήματος είναι ισοδύναμο με ένα ελατήριο σταθεράς $k = k_1 + k_2$.

Η κυκλική συχνότητα της κίνησης είναι $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$.

Μάζα M αναρτάται από κατακόρυφο ελατήριο ιδιοσυχνότητας $T = 2\text{s}$. Αν μπορούμε να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις 10^{-6} m της μάζας M , βρείτε την ελάχιστη μεταβολή της επιτάχυνσης της βαρύτητας που μπορεί να μετρηθεί.



Η δύναμη της βαρύτητας εξισορροπεί την δύναμη του ελατηρίου. Άρα, αν x είναι η μετατόπιση από την ισορροπία, τότε

$$Mg = kx \Rightarrow g = \frac{k}{M} x \Rightarrow dg = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 dx \quad (1).$$

Θέτοντας $dx = 10^{-6}\text{ m}$ στην (1) βρίσκουμε

$$dg = \frac{4\pi^2}{4\text{s}^2} 10^{-6}\text{ m} = 9,87 \times 10^{-6}\text{ m/s}^2.$$

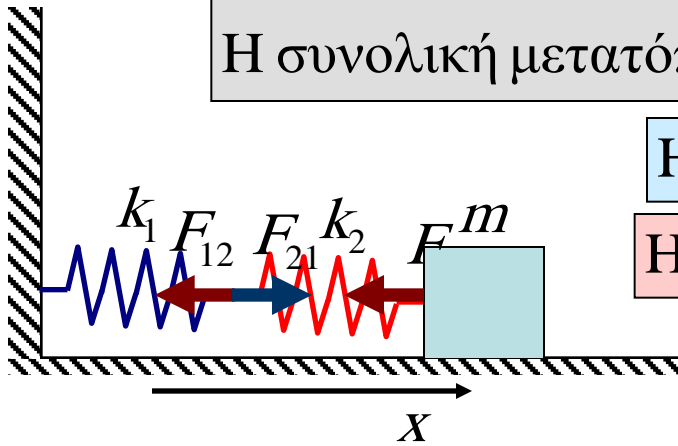
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Προσδιορίστε την συχνότητα ταλάντωσης για την μάζα m του σχήματος. Οι σταθερές των ελατηρίων είναι k_1 και k_2 .

Έστω ότι το ελατήριο k_1 επιμηκύνεται κατά Δx_1 και το k_2 κατά Δx_2 . Η συνολική μετατόπιση για την m είναι $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Η δύναμη που ασκεί το k_2 στο k_1 είναι $F_{21} = k\Delta x_2$.

Η δύναμη που ασκεί το k_1 στο k_2 είναι $F_{12} = -k\Delta x_1$.



Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε :

$$F_{21} = -F_{12} \Rightarrow \Delta x_1 / \Delta x_2 = k_2 / k_1 \quad (1).$$

Έστω ότι η δύναμη F που δέχεται η m μπορεί να γραφτεί ως $F = -k\Delta x$. Τότε :

$$F = -F_{21} \Rightarrow -k\Delta x = -k_2\Delta x_2 \Rightarrow k = k_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta x} = k_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = k_2 \frac{1}{1 + \Delta x_1 / \Delta x_2} \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} k = k_2 \frac{1}{1 + k_2 / k_1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (2).$$

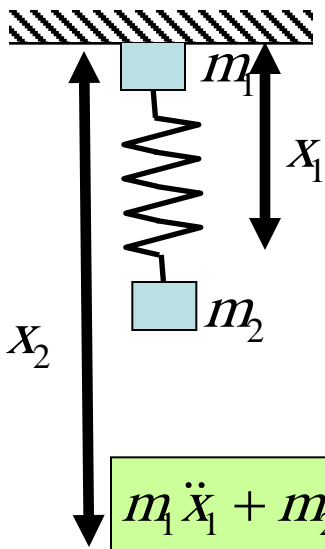
Άρα η συχνότητα ταλάντωσης της μάζας m

$$\text{είναι } \omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} \quad (3).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1

Ένα ελατήριο σταθεράς C και φυσικού μήκους l φέρει δύο μάζες m_1 και m_2 στα δύο άκρα του. Η μάζα m_1 είναι αρχικά κολλημένη στην οροφή, ενώ η m_2 αιωρείται. Κάποια στιγμή ξεκολλάμε την m_1 . Βρείτε τις αποστάσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ των m_1 , m_2 από την οροφή.



Έστω ότι το αρχικό μήκος του ελατηρίου είναι d .

$$\text{Είναι τότε : } m_2 g = C(d - l) \Rightarrow d = l + m_2 g / C \quad (1).$$

Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι :

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + C(x_2 - x_1 - l) \quad (2).$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - C(x_2 - x_1 - l) \quad (3).$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) κατά μέρη βρίσκουμε

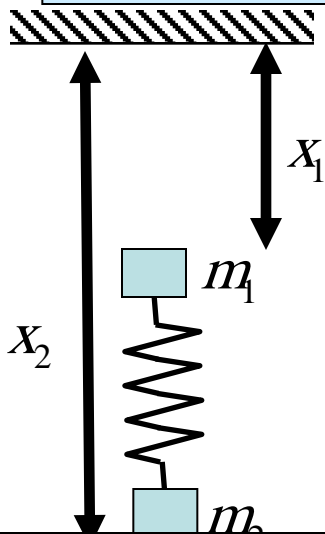
$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \ddot{X}_{cm} = g \Rightarrow X_{cm} = gt^2 / 2 + m_2 d / (m_1 + m_2) \quad (4).$$

Αφαιρώντας τις (2) και (3) κατά μέρη βρίσκουμε

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\left(\frac{C}{m_2} + \frac{C}{m_1}\right)(x_2 - x_1 - l) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1 - l) = -\omega^2(x_2 - x_1 - l) \quad (5),$$

$$\text{όπου } \omega^2 = C(1/m_1 + 1/m_2) \quad (6).$$

Ένα ελατήριο σταθεράς C και φυσικού μήκους l φέρει δύο μάζες m_1 και m_2 στα δύο άκρα του. Η μάζα m_1 είναι αρχικά κολλημένη στην οροφή, ενώ η m_2 αιωρείται. Κάποια στιγμή ξεκολλάμε την m_1 . Βρείτε τις αποστάσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ των m_1 , m_2 από την οροφή.



$$\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1 - l) + \omega^2(x_2 - x_1 - l) = 0 \quad (5), \quad \omega^2 = C(1/m_1 + 1/m_2).$$

Η γενική λύση της (5) δίνει $x_2 - x_1 - l = A \sin(\omega t + \phi)$ (6).

Για $t = 0$ είναι $x_2 - x_1 = d$ και $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε από την (6) :

$$A\omega \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \text{ και } A \sin \phi = d - l \Rightarrow A = d - l.$$

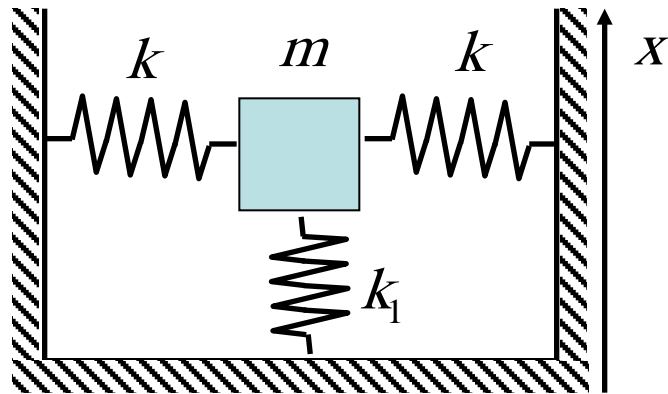
Τελικά : $x_2 - x_1 = l + (d - l) \cos \omega t$ (7). Ακόμη : $X_{cm} = gt^2 / 2 + m_2 d / (m_1 + m_2)$ (4).

Από τις (4) και (7) βρίσκουμε :

$$x_1 = \frac{1}{2} gt^2 + \frac{m_2(d-l)}{m_1 + m_2} (1 - \cos \omega t)$$

$$x_2 = d + \frac{1}{2} gt^2 - \frac{m_1(d-l)}{m_1 + m_2} (1 - \cos \omega t)$$

Μετατοπίζουμε την μάζα m κατά την κατεύθυνση των x . Μπορεί η κίνηση να θεωρηθεί προσεγγιστικά αρμονική ταλάντωση;



Η μετατόπιση κατά Δx δημιουργεί 3 δυνάμεις επαναφοράς :

$$F_1 = -k_1 \Delta x, F_2 = -k \Delta x_2, F_3 = -k \Delta x_3,$$

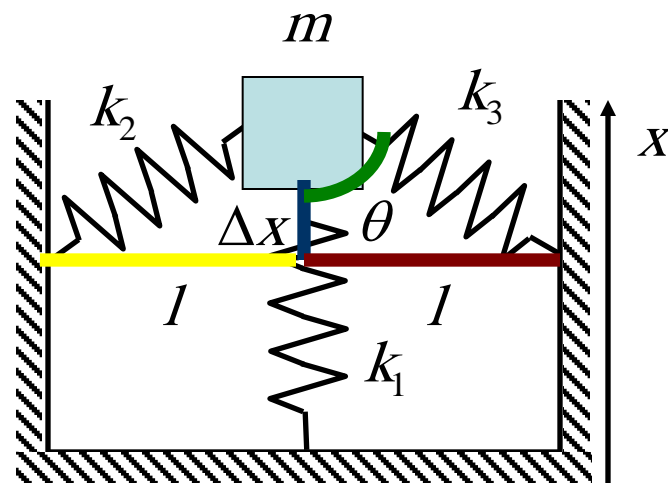
όπου $\Delta x_2 = \Delta x_3$ και $(\Delta x)^2 + l^2 = (l + \Delta x_2)^2 \Rightarrow$

$$\Delta x_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + l^2} - l = l \left(\sqrt{1 + (\Delta x/l)^2} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 \approx l \left[1 + (\Delta x/l)^2 / 2 - 1 \right] = (\Delta x)^2 / 2l.$$

Η προβολή κατά τον άξονα x δίνει δύναμη

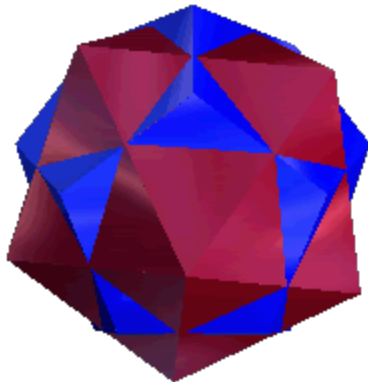
$$F_{2x} = \cos \theta k (\Delta x)^2 / 2l \approx k (\Delta x)^3 / 2l^2.$$



Άρα, για μικρές μετατοπίσεις η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση που καθορίζεται από το k_1 .

Αποκαλούμε (συνήθως) στερεό σώμα ένα σύστημα σωμάτων των οποίων οι μεταξύ τους αποστάσεις παραμένουν αμετάβλητες στο πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Προβλήματα στερεών σωμάτων αναφέρονται ως επί το πλείστον σε περιστροφές γύρω από άξονα που είτε είναι σταθερός, είτε κινείται.



www.PlatonicSolids.info

Βασική εξίσωση κίνησης :

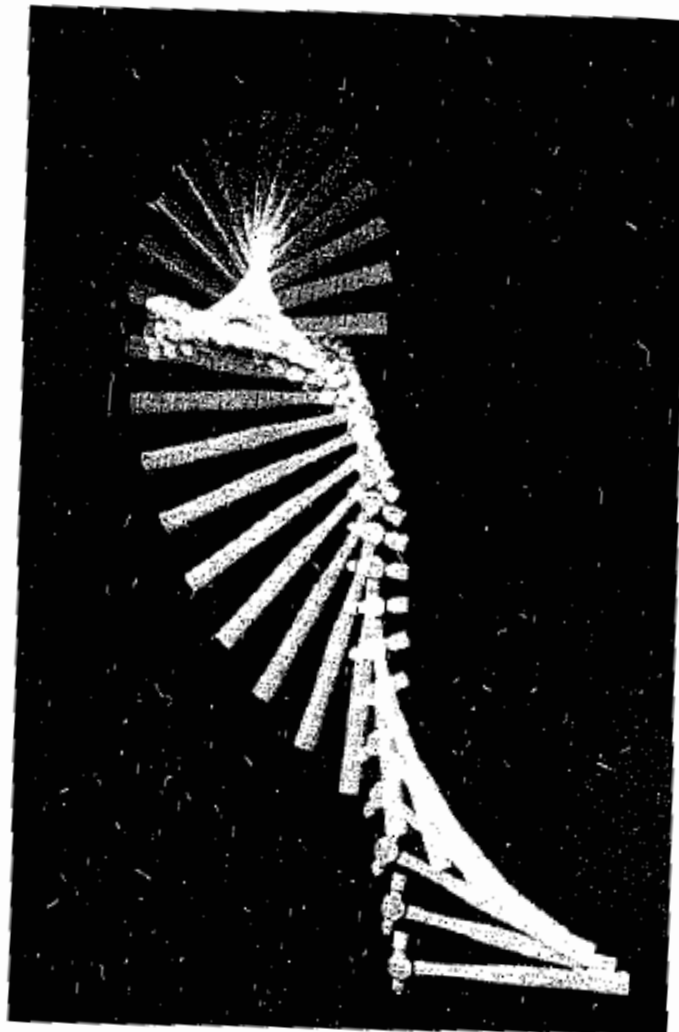
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (1),$$

όπου \vec{L} είναι η συνολική στροφορμή του συστήματος σωμάτων και \vec{N} η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων.

Η κίνηση στερεού σώματος μπορεί εν γένει να θεωρηθεί ως συνδυασμός μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης.

Τα προβλήματα στερεού σώματος απλοποιούνται με την ανάλυση της κίνησης σε δύο συστήματα αναφοράς, σε ένα εκ των οποίων υπάρχει μόνο ιδιοπεριστροφή του σώματος.

Όταν βάλλουμε ένα στερεό σώμα (π.χ. το σφυρί του σχήματος) το κέντρο μάζας διαγράφει την τροχιά βολής, ενώ στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας μπορεί να υπάρχει ιδιοπεριστροφή.



ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

6

Έστω στερεό σώμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από σταθερό άξονα που περνάει από σημείο του σώματος O .

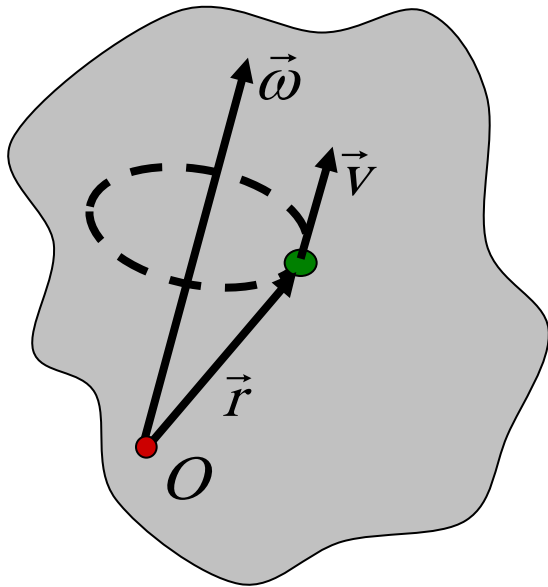
Αν \vec{v} είναι η ταχύτητα του σημείου P με διάνυσμα θέσης \vec{r} ως προς το O , τότε ισχύει ότι $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (2).

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι το στερεό σώμα είναι μια συλλογή σημειακών μαζών m_i με διανύσματα θέσης \vec{r}_i , τότε η συνολική στροφορμή είναι

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad (3),$$

ενώ η συνολική κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 \quad (4).$$



Λεπτή πλάκα στο επίπεδο xy περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα ω . Επειδή είναι $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \Rightarrow v_i = \omega r_i$

βρίσκουμε για την κινητική ενέργεια

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (4).$$

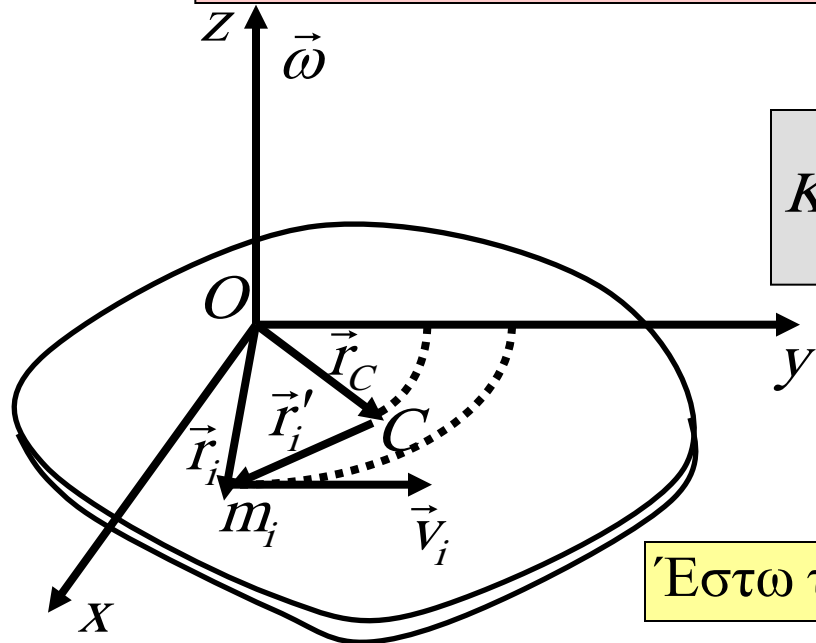
όπου $I_z = \sum_i m_i r_i^2$ (5) ορίζει την ροπή αδράνειας της πλάκας γύρω από τον άξονα z .

Έστω τώρα C το κέντρο μάζας της πλάκας. Τότε

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_C + \vec{r}'_i) \cdot (\vec{r}_C + \vec{r}'_i) = \sum_i m_i (r_C^2 + 2\vec{r}_C \cdot \vec{r}'_i + r_i'^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_z = Mr_C^2 + 2\vec{r}_C \cdot \sum_i m_i \vec{r}'_i + \sum_i m_i r_i'^2 = Mr_C^2 + \sum_i m_i r_i'^2 \Rightarrow I_z = Mr_C^2 + I_{cz},$$

όπου $I_{cz} = \sum_i m_i r_i'^2$ είναι η ροπή αδράνειας ως το C .



ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

8

$$I_z = Mr_C^2 + I_{cz}, \text{ όπου } I_{cz} = \sum_i m_i r_i'^2 \text{ είναι η ροπή αδράνειας ως το } C.$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τυχαίο άξονα είναι ίση με την ροπή αδράνειας ως προς παράλληλο άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος συν το γινόμενο της ολικής μάζας επί το τετράγωνο της απόστασης των δύο αξόνων.

Η κινητική ενέργεια δίνεται από την σχέση

$$K = \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 + \frac{1}{2} MV^2 \quad (5)$$

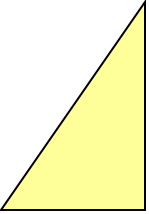
Για την στροφορμή έχουμε :

$$\vec{L} = \sum_i m_i r_i^2 \omega \hat{z} = I_z \omega \hat{z} = (I_{cz} + Mr_C^2) \omega \hat{z} = I_{cz} \omega \hat{z} + M\vec{r}_C \times \vec{V},$$

$$\text{αφού } \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

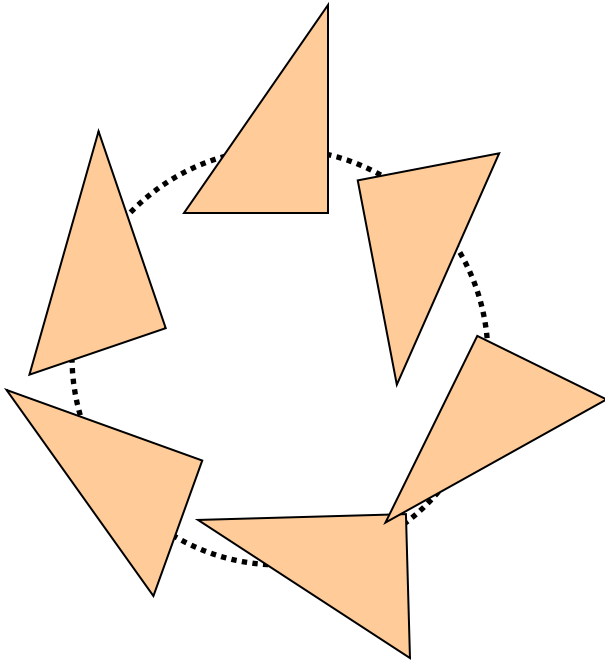
Η στροφορμή ως προς τυχαίο σημείο είναι ίση με την στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας του σώματος συν την στροφορμή ως προς το ίδιο σημείο μάζας M που κινείται με την ταχύτητα \vec{V} του κέντρου μάζας.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ


$$I_z = Mr_C^2 + I_{cz}, K = \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 + \frac{1}{2} MV^2 \quad (5).$$

$$\vec{L} = M\vec{r}_C \times \vec{V}.$$

$$K = \frac{1}{2} MV^2.$$

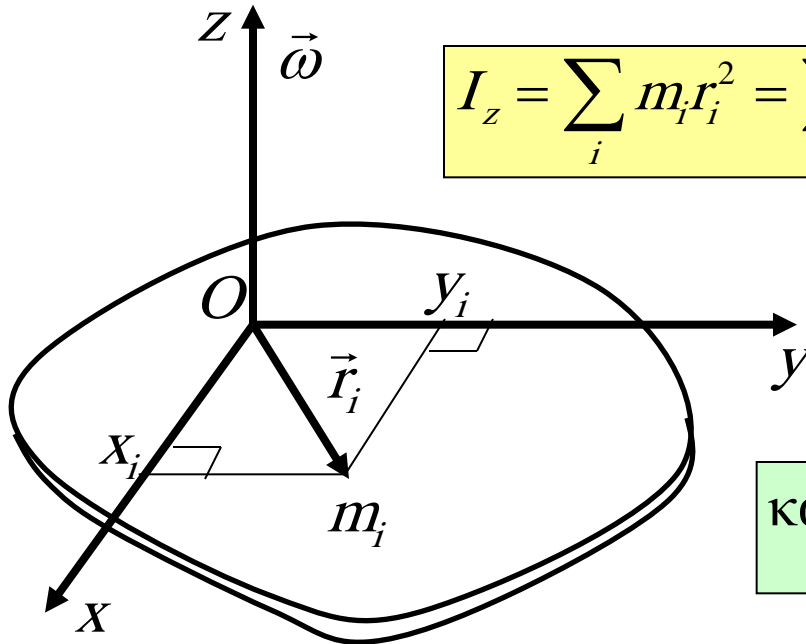


$$\vec{L} = I_{cz} \omega \hat{z} + M\vec{r}_C \times \vec{V}.$$

$$K = \frac{1}{2} I_{cz} \omega^2 + \frac{1}{2} MV^2.$$

Για την ροπή αδράνειας επίπεδης χυπλάκας ως προς τον άξονα z έχουμε

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_x + I_y,$$

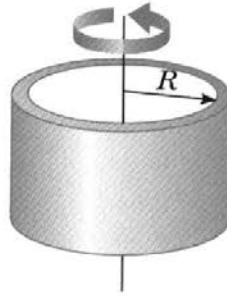


$I_x = \sum_i m_i x_i^2$ είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα x

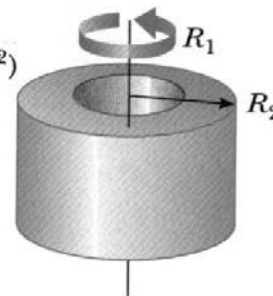
και $I_y = \sum_i m_i y_i^2$ η ροπή αδράνειας ως προς y .

Η ροπή αδράνειας επίπεδου λεπτού φύλλου ως προς άξονα κάθετο στο φύλλο είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας ως προς κάθετους μεταξύ τους άξονες μέσα στο φύλλο.

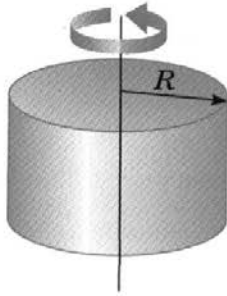
Hoop or cylindrical shell
 $I_c = MR^2$



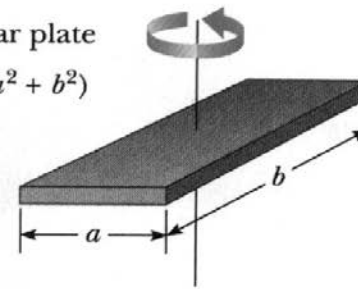
Hollow cylinder
 $I_c = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$



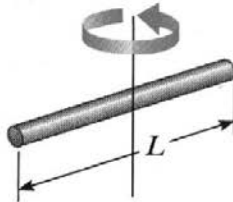
Solid cylinder or disk
 $I_c = \frac{1}{2} MR^2$



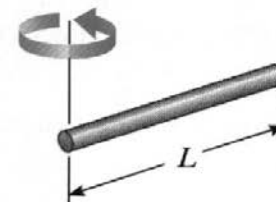
Rectangular plate
 $I_c = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



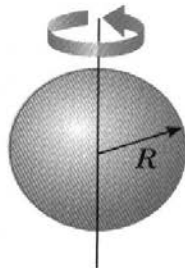
Long thin rod
 $I_c = \frac{1}{12} ML^2$



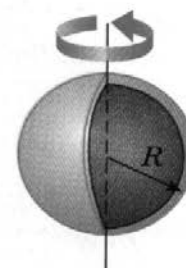
Long thin rod
 $I = \frac{1}{3} ML^2$



Solid sphere
 $I_c = \frac{2}{5} MR^2$



Thin spherical shell
 $I_c = \frac{2}{3} MR^2$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Για τον λεπτό ομογενή δακτύλιο του σχήματος είναι

$I_z = MR^2$, όπου M και R είναι η μάζα και η ακτίνα του δακτυλίου.

Ποια είναι η ροπή αδράνειας I_x (I_y) ως προς τον άξονα x (y);

Λόγω συμμετρίας είναι $I_x = I_y$.

Από το θεώρημα
κάθετων αξόνων :

$$I_z = 2I_x \Rightarrow I_x = I_z/2 = MR^2/2 \quad (1).$$

Θέλουμε να βρούμε τις I_z και I_x για ομογενή δίσκο ακτίνας R και μάζας M .

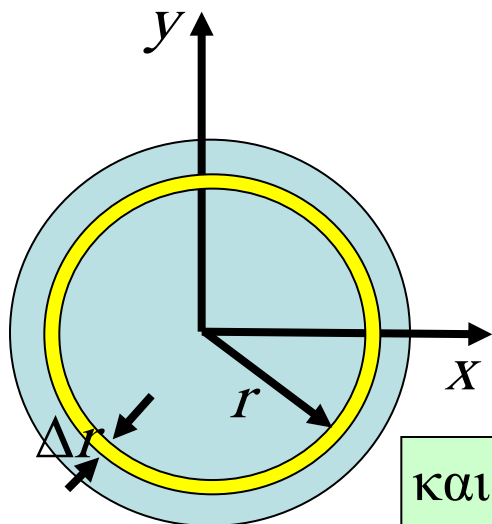
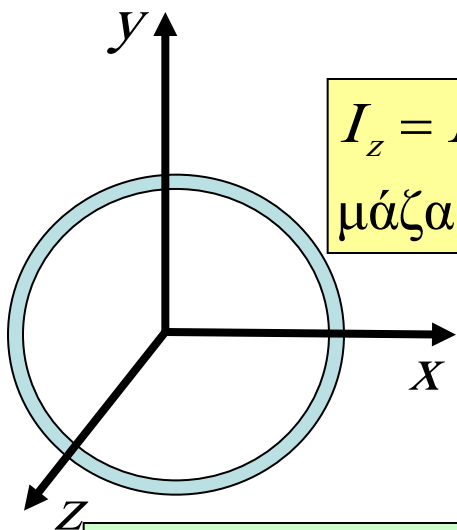
Ένας λεπτός δακτύλιος πάχους Δr έχει

$$\text{μάζα } \Delta M = \frac{\pi(r - \Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2} M \approx \frac{2r\Delta r}{R^2} M.$$

$$\text{Επομένως : } I_z = \int_0^R \frac{2rM}{R^2} r^2 dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2} \quad (2)$$

και από το θεώρημα κάθετων αξόνων $I_x = I_z/2 = MR^2/4 \quad (3).$

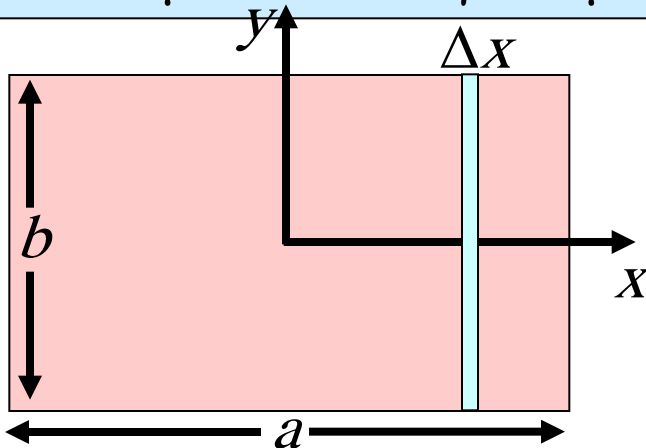
Η (2) ισχύει και για ομογενή κύλινδρο ακτίνας R .



ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις ροπές αδράνειας για ομογενή ορθογώνια πλάκα.



Η μάζα μιας κατακόρυφης ράβδου πάχους Δx είναι

$$\Delta M = M\Delta x/a. \text{ Άρα } I_y = \int_{-a/2}^{a/2} Mx^2 dx/a = Ma^2/12.$$

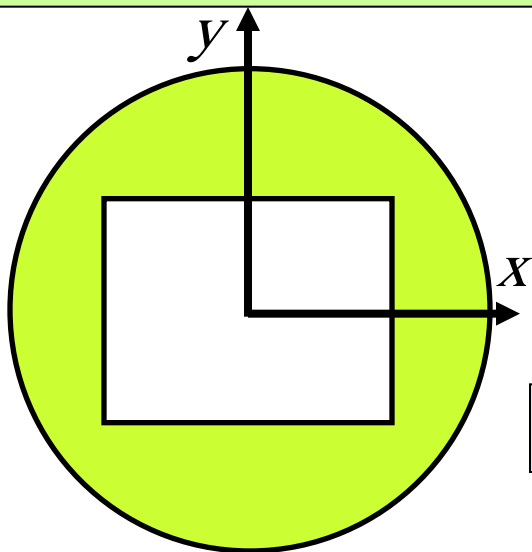
Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει $I_x = Mb^2/12$.

$$\text{Επομένως: } I_z = I_x + I_y = M(a^2 + b^2)/12.$$

Διαφορετικά χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα:

$$I_z = \frac{M}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{M}{ab} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \right) dy + \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \left(\int_{-a/2}^{a/2} dx \right) dy \right] =$$

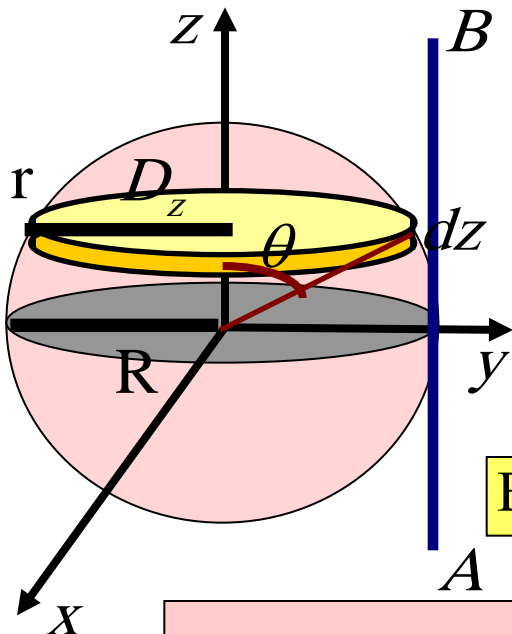
$$= M \left[\int_{-b/2}^{b/2} \frac{a^3}{12} dy + \int_{-b/2}^{b/2} y^2 a dy \right] / ab = M(a^2 + b^2)/12.$$



Για δίσκο πυκνότητας ρ με ορθογώνια τρύπα στο κέντρο έχουμε

$$I_z = I_z^{\text{δίσκου}} - I_z^{\text{ορθογωνίου}} = \pi\rho R^2(R^2/2) - \rho ab(a^2 + b^2)/2.$$

Ροπή αδράνειας ομογενούς σφαίρας γύρω από άξονα που εφάπτεται της σφαίρας.



Η σφαίρα αποτελείται από διαδοχικούς λεπτούς κυλίνδρους πάχους dz , όπως ο D_z του σχήματος.

Η μάζα του D_z είναι $M_{D_z} = M \frac{\pi r^2 dz}{4\pi R^3/3}$,

ενώ η ροπή αδράνειας του D_z είναι $I_z^{D_z} = M_{D_z} r^2 / 2$.

Είναι ακόμη : $r = R \sin \theta$ και $z = R \cos \theta \Rightarrow dz = R \sin \theta d\theta$.

Άρα η ροπή της σφαίρας ως προς z είναι : $I_z = \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 M \frac{\pi r^2 R \sin \theta d\theta}{4\pi R^3/3} =$

$$= \frac{3MR^2}{8} \int_0^\pi \sin^4 \theta d(\cos \theta) = \frac{3MR^2}{8} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{3MR^2}{8} \frac{16}{15} = \frac{2MR^2}{5}.$$

Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων βρίσκουμε για την ροπή I_{AB}

ως προς τον άξονα AB : $I_{AB} = I_z + MR^2 = 8MR^2/5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του σώματος του σχήματος. Η ακτίνα του μεγάλου δίσκου είναι a , η ακτίνα κάθε κυκλικού κενού είναι $a/3$ και το κέντρο του κάθε κενού βρίσκεται σε απόσταση $a/2$ από το κέντρο του δίσκου. Η συνολική μάζα του σώματος είναι M .

Έστω ρ η πυκνότητα του σώματος.

Εάν καλύπταμε με το ίδιο υλικό τα κενά το κάθε ένα από αυτά θα είχαν μάζα $m_0 = \rho\pi(a/3)^2$ και

ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο τους $I_{c_0} = m_0(a/3)^2/2$.

Η ροπή αδράνειας ενός πληρωθέντος κενού ως προς το κέντρο του σώματος θα ήταν $I_0 = I_{c_0} + m_0(a/2)^2$.

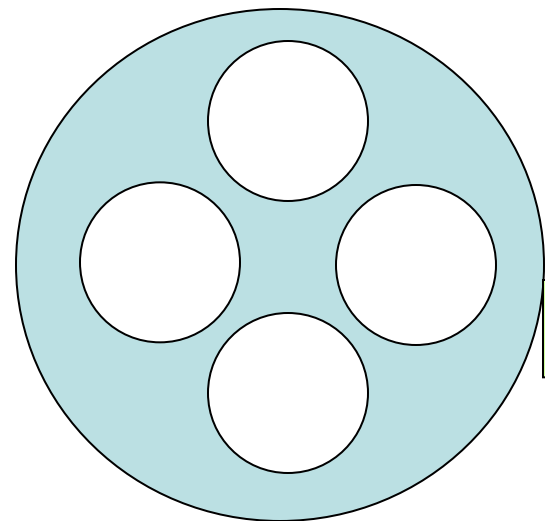
Η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ακτίνας a είναι $I_d = \rho\pi a^2 a^2/2$.

Επομένως, η ροπή αδράνειας του σώματος του σχήματος είναι

$$I = I_d - 4I_0 = \rho\pi a^4/2 - 11\rho\pi a^4/81.$$

$$\text{Επειδή είναι } M = \rho\pi a^2 - 4m_0 = 5\rho\pi a^2/9$$

$$\text{τελικά βρίσκουμε } I = (1/2 - 11/81)9Ma^2/5 = 59Ma^2/90.$$



ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Έστω στερεό σώμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από σταθερό άξονα που περνάει από σημείο του σώματος O .

Αν \vec{v} είναι η ταχύτητα του σημείου P με διάνυσμα θέσης \vec{r} ως προς το O , τότε ισχύει ότι $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (2).

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι το στερεό σώμα είναι μια συλλογή σημειακών μαζών m_i με διανύσματα θέσης \vec{r}_i , τότε η συνολική στροφορμή είναι

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad (3),$$

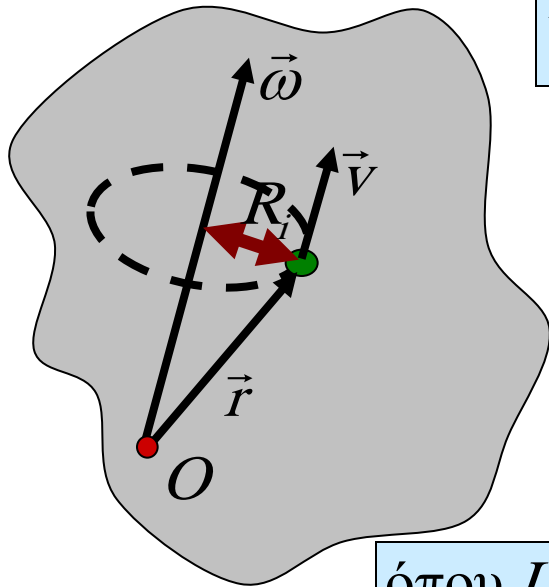
Για την συνιστώσα της \vec{L} ως προς τον άξονα $\vec{\omega}$ έχουμε

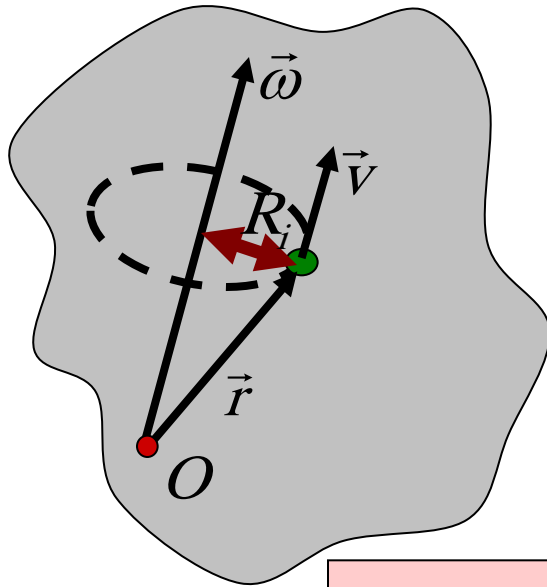
$$L_a = \vec{L} \cdot \hat{\omega} = \frac{1}{\omega} \sum m_i \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] =$$

$$= \frac{1}{\omega} \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{\omega} \sum m_i \omega^2 R_i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_a = \omega \sum m_i R_i^2 = I_a \omega,$$

όπου I_a είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον σταθερό άξονα $\vec{\omega}$.





$L_a = I_a \omega$, όπου I_a είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον σταθερό άξονα $\hat{\omega}$.

Από την σχέση $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ προκύπτει

$$\frac{dL_a}{dt} = N_a \Rightarrow I_a \frac{d\omega}{dt} = N_a \quad (1),$$

όπου N_a είναι η συνιστώσα της ολικής ροπής κατά τον άξονα $\hat{\omega}$.

(Σημείωση: στην απόδειξη της (1) θεωρούμε ότι το I_a δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο και χρησιμοποιούμε την πληροφορία ότι $d\hat{\omega}/dt = 0$)

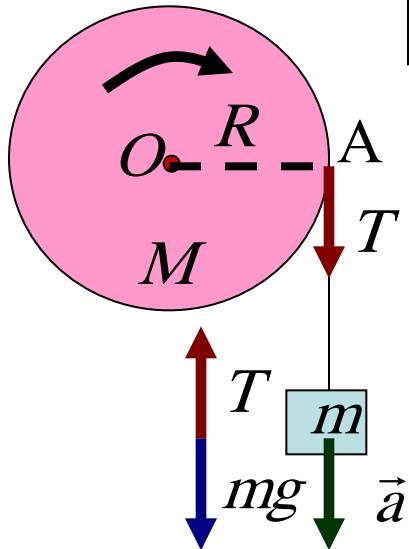
Για την κινητική ενέργεια περιστροφής βρίσκουμε $K = \frac{1}{2} I_a \omega^2$.

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΛΟΓΩ ΡΟΠΗΣ

Συμπαγής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου όταν από την μία πλευρά του κρέμεται με νήμα μάζα m .

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς το κέντρο του είναι $I = \frac{1}{2} MR^2$ (1).

Η ροπή που ασκείται στο σημείο A είναι $N = m(g - a)R$ (2).



Αντικαθιστώντας από τις (1) και (2) στην εξίσωση κίνησης $\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = N$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt} = m(g - a)R \quad (4).$$

$$\text{Είναι ακόμη } R\omega = v \Rightarrow R \frac{d\omega}{dt} = a \quad (5).$$

Από τις (4) και (5) (με απαλοιφή του a και επίλυση ως προς $d\omega/dt$) βρίσκουμε

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{m + M/2} \frac{g}{R} = \frac{g}{R} \frac{1}{1 + M/2m}.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση στερεού σώματος που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Υποθέτουμε ότι το σώμα έχει κυκλική συμμετρία με ακτίνα R και ροπή αδράνειας I ως προς το κέντρο του

Στο σώμα ασκούνται η τριβή $F_{\tau\rho}$ και το βάρος $W = Mg$.

Το βάρος ασκεί ροπή ως προς το σημείο επαφής P

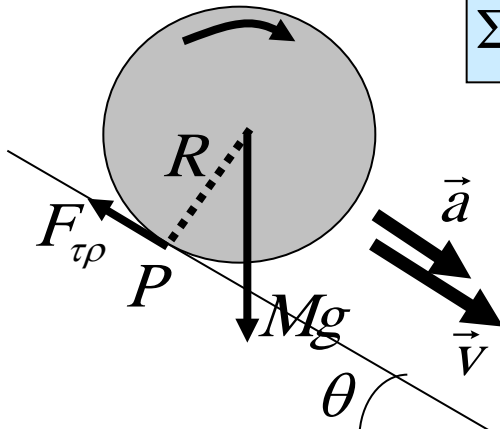
$$N_P = MgR \sin \theta \quad (1).$$

Είναι ακόμη για την στροφορμή $L_P = I_P \omega = I_P v / R$ (2)

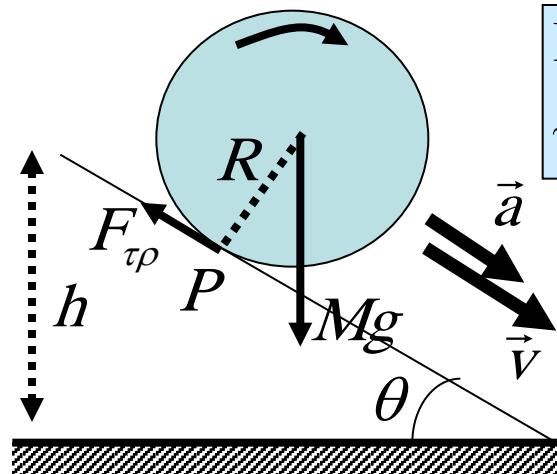
όπου v είναι η ταχύτητα του σώματος και $I_P = I + MR^2$.

Από την εξίσωση $dL_P / dt = N_P$ βρίσκουμε για $a \equiv dv / dt$

$$\left(I + MR^2 \right) \frac{a}{R} = MgR \sin \theta \Rightarrow a = \frac{g \sin \theta}{1 + I / MR^2} \quad (3).$$



Θέλουμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση στερεού σώματος που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Υποθέτουμε ότι το σώμα έχει κυκλική συμμετρία με ακτίνα R και ροπή αδράνειας I ως προς το κέντρο του



Παρόλο που ασκείται τριβή, η $F_{\tau\rho}$ δεν παράγει έργο γιατί η επαφή είναι στιγμιαία. Έτσι διατηρείται η ενέργεια

$$E = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} v^2 + Mgh \quad (3).$$

$$\text{Είναι λοιπόν } \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \left(M + I/R^2\right)v \frac{dv}{dt} + Mg \frac{dh}{dt} = 0 \quad (4).$$

$$\text{Αλλά } dh/dt = -v \sin \theta \text{ και } dv/dt = a.$$

$$\text{Επομένως η (4) δίνει } \left(M + I/R^2\right)va - Mgv \sin \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{g \sin \theta}{1 + I/MR^2} \quad (5),$$

αποτέλεσμα που συμπίπτει με αυτό που βρήκαμε προηγουμένως.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση στερεού σώματος που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . Υποθέτουμε ότι το σώμα έχει κυκλική συμμετρία με ακτίνα R και ροπή αδράνειας I ως προς το κέντρο του

Αντί για το σημείο επαφής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κέντρο μάζας C για τον υπολογισμό δυνάμεων και ροπών.

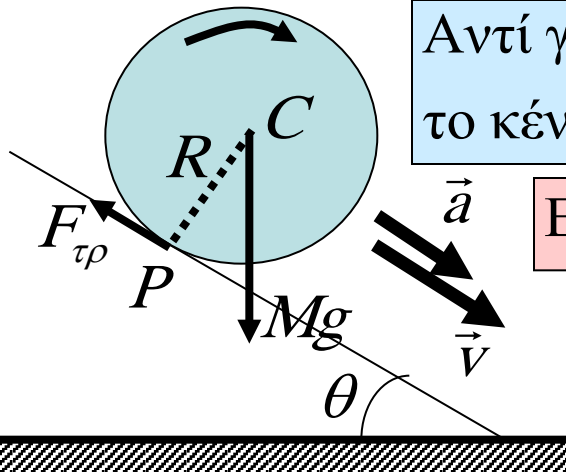
Είναι $Ma = Mg \sin \theta - F_{\tau\rho}$ (1) και $F_{\tau\rho} R = I d\omega/dt$ (2).

Είναι ακόμη $\omega R = v \Rightarrow d\omega/dt = a/R$ (3).

Η (1) με βάση τις (2) και (3) δίνει

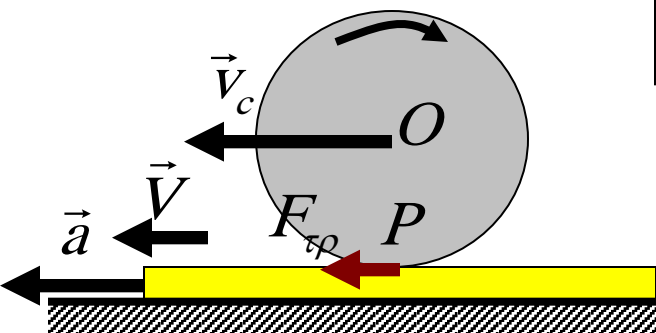
$$Ma = Mg \sin \theta - Ia/R^2 \Rightarrow a = \frac{g \sin \theta}{1 + I/MR^2} \quad (4).$$

Το αποτέλεσμα (4) συμπίπτει με αυτό που βρήκαμε προηγουμένως.



ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΣΕ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Κύλινδρος βρίσκεται πάνω σε επιφάνεια που σύρεται με επιτάχυνση a κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου. Ποια είναι η κίνηση του κυλίνδρου (υποθέτουμε ότι ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει).



Στον κύλινδρο ασκείται μόνο η δύναμη τριβής $F_{\tau\rho}$.

Αν v_c η ταχύτητα του κέντρου μάζας O του κυλίνδρου τότε $M dv_c / dt = F_{\tau\rho}$ (1).

Η τριβή ασκεί ροπή $F_{\tau\rho} R$ ως προς το O και

$$F_{\tau\rho} R = I_c \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt} \quad (2).$$

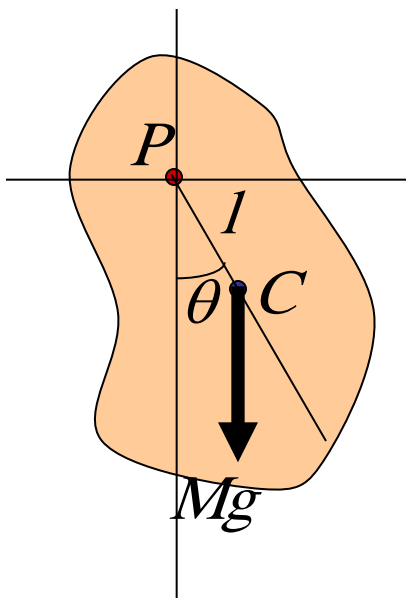
$$\text{Οι (1) και (2) δίνουν } M \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2} MR \frac{d\omega}{dt} \quad (3).$$

Αν V είναι η ταχύτητα της επιφάνειας τότε $v_c = V - R\omega$ και $\frac{dv_c}{dt} = \frac{dV}{dt} - R \frac{d\omega}{dt}$ (4).

Χρησιμοποιώντας την (4) στην (3) βρίσκουμε $\frac{3}{2} R \frac{d\omega}{dt} = a (\equiv \frac{dV}{dt})$

$$\text{και } dv_c / dt = a/3, \quad F_{\tau\rho} = Ma/3.$$

Στερεό σώμα μάζας M μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο του P . Αν C είναι το κέντρο μάζας, τότε το σώμα ισορροπεί όταν η ευθεία PC συμπίπτει με την κατακόρυφο. Τι θα συμβεί αν εκτρέψουμε το σώμα κατά γωνία θ ;



Αν I_c και I είναι οι ροπές αδράνειας ως προς τα C και P , αντίστοιχα, τότε από το θεώρημα παράλληλων αξόνων είναι

$$I = I_c + Ml^2 \quad (1).$$

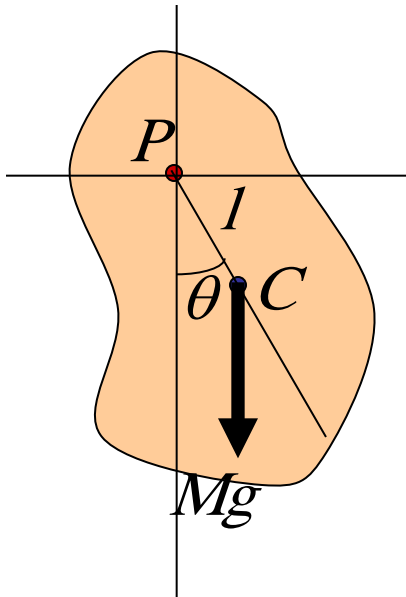
Η στροφορμή ως προς τον άξονα που περνάει από το P είναι

$$L = I\omega = (I_c + Ml^2) \frac{d\theta}{dt} \quad (2).$$

Η ροπή που ασκείται στο C είναι $N = -Mgl \sin \theta$ (3).

Η εξίσωση της περιστροφικής κίνησης δίνει

$$\frac{dL}{dt} = N \Rightarrow (I_c + Ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgl \sin \theta = 0 \quad (4).$$



$$(I_c + Ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mgl \sin \theta = 0 \quad (4).$$

Για μικρές γωνίες εκτροπής είναι $\sin \theta \approx \theta$ και η (4) δίνει

$$(I_c + Ml^2) \ddot{\theta} + Mgl\theta = 0 \quad (5).$$

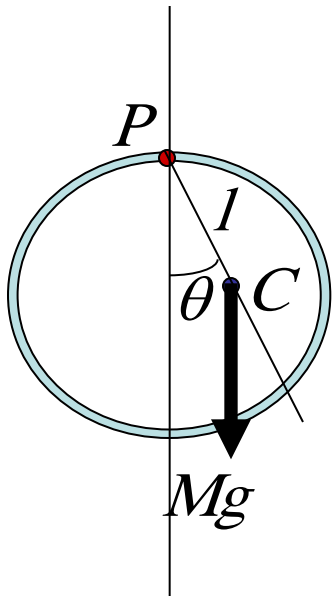
Η (5) είναι η διαφορική εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

$$\text{με συχνότητα } \omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{1}{1 + I_c/Ml^2}} \quad (6).$$

Παράδειγμα : Αν αναρτήσουμε λεπτό δακτύλιο ακτίνας r από κάποιο σημείο του τότε για την σχέση (6) έχουμε τα εξής :

$$l = r, \quad I_c = Mr^2 \quad \text{και άρα βρίσκουμε}$$

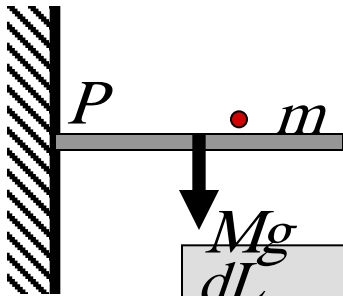
$$\text{συχνότητα } \omega = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{1}{1 + Mr^2/Mr^2}} = \sqrt{\frac{g}{2r}} \quad (7).$$



ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΡΑΒΔΟΣ

1

Ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβή γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από οριζόντια θέση. Ποια είναι η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου; Σε ποιο σημείο της πρέπει να τοποθετήσουμε σωμα μάζας m (με $m \ll M$) ώστε αυτό μόλις που θα ξεκολλήσει από την ράβδο;



Το βάρος της ράβδου ασκεί μια ροπή ως προς το σημείο P ίση με $N = MgL/2$.

Από την εξίσωση κίνησης βρίσκουμε

$$\frac{dL}{dt} = N \Rightarrow I \frac{d\omega}{dt} = MgL/2 \Rightarrow \frac{1}{3} ML^2 \frac{d\omega}{dt} = MgL/2 \Rightarrow \alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2L} \quad (1).$$

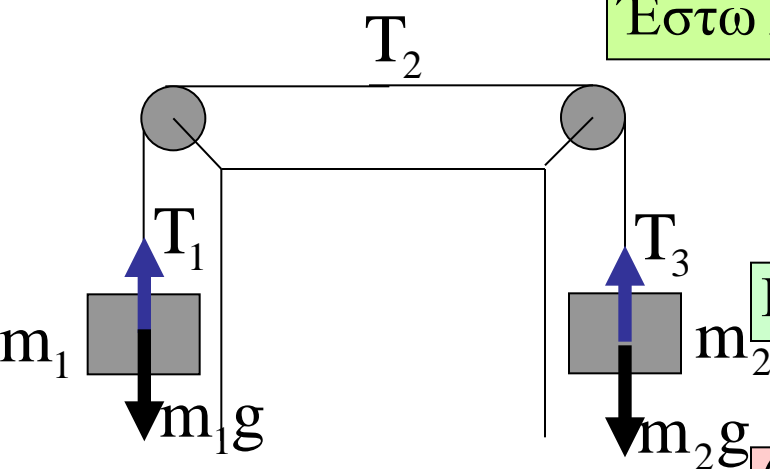
όπου α είναι η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου.

Έστω ότι αφήνουμε την μάζα m σε απόσταση x από το P .

Η αρχική γραμμική ταχύτητα της ράβδου σε αυτό το σημείο είναι $v = \omega x$

$$\text{Για να αποκολληθεί το σωματίδιο θα πρέπει } a \geq g \Rightarrow \frac{3g}{2L} x \geq g \Rightarrow x \geq \frac{3L}{2}.$$

Δύο μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένες με ένα ελαφρύ νήμα το οποίο περνάει πάνω από δύο όμοιες τροχαλίες από τις οποίες η καθεμία έχει ροπή αδράνειας I και ακτίνα R . Βρείτε την επιτάχυνση κάθε μάζας. (Υποθέτουμε ότι το νήμα δεν γλιστράει στις τροχαλίες).



Έστω $m_2 > m_1$ και οι μάζες κινούνται με επιτάχυνση a .

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \quad (1), \quad m_2 g - T_3 = m_2 a \quad (2).$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της κάθε τροχαλίας είναι

$$\alpha = a/R \text{ και από τις εξισώσεις περιστροφής}$$

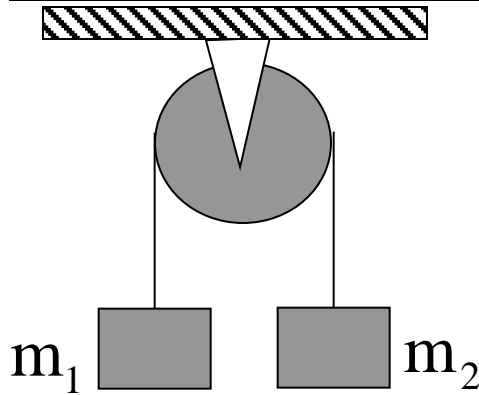
$$(T_2 - T_1)R = I\alpha = Ia/R \quad (3), \quad (T_3 - T_2)R = Ia/R \quad (4).$$

$$\text{Από τις (3) και (4) βρίσκουμε } (T_3 - T_1)R = 2Ia/R \quad (5),$$

$$\text{ενώ από τις (1) και (2) παίρνουμε } T_3 - T_1 = m_2(g - a) - m_1(g + a) \quad (6).$$

$$\text{Οι (5) και (6) δίνουν τελικά } a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + 2I/R^2} \quad (7).$$

Δύο μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένες με νήμα που είναι περασμένο πάνω από μια τροχαλία ροπής αδράνειας I . Το νήμα δεν γλιστρά στην τροχαλία και το σύστημα αρχικά ηρεμεί. Βρείτε τις γραμμικές ταχύτητες των μαζών όταν η m_2 πέσει προς τα κάτω κατά h , καθώς και την γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας την στιγμή αυτή.



Αρχικά το σύστημα ηρεμεί και η ολική ενέργεια είναι

$$E_i = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \quad (1), \text{ όπου } h_1 \text{ και } h_2 \text{ είναι τα αρχικά ύψη των } m_1 \text{ και } m_2.$$

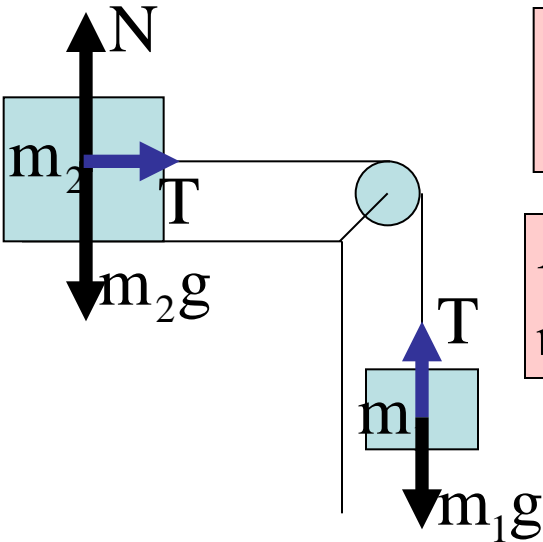
Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας την χρονική στιγμή που η m_2 έχει πέσει κατά h , τότε η ενέργεια είναι

$$E_f = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + m_1 g(h_1 + h) + m_2 g(h_2 - h) \quad (2).$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας βρίσκουμε (είναι $\omega R = v$)

$$E_i = E_f \Rightarrow \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}} \text{ και } v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}}$$

Δύο μάζες m_1 και m_2 είναι συνδεδεμένες, όπως φαίνεται στο σχήμα, με αβαρές νήμα που είναι περασμένο σε τροχαλία ακτίνας R και ροπής αδράνειας I . Η m_2 ολισθαίνει χωρίς τριβές. Προσδιορίστε την επιτάχυνση των δύο μαζών.



Η συνολική στροφορμή του συστήματος ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο O της τροχαλίας είναι

$L = m_1 vR + m_2 vR + I\omega$ (1), όπου v η ταχύτητα των μαζών και $\omega = vR$ η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.

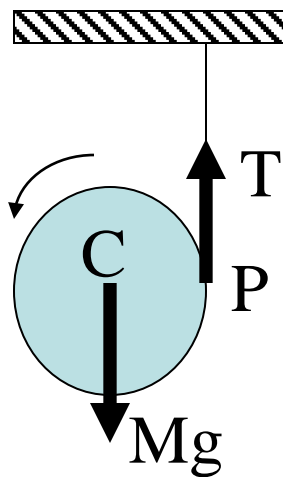
Η συνισταμένη ροπή εξωτερικών δυνάμεων είναι $m_1 gR$.

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (1) βρίσκουμε

$$\frac{dL}{dt} = m_1 gR \Rightarrow (m_1 + m_2)R \frac{dv}{dt} + \frac{I}{R} \frac{dv}{dt} = m_1 gR \Rightarrow$$

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

Δίσκος ακτίνας R κρέμεται από την οροφή όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, καθώς και η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του.



Έστω I η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας και a η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου. Τότε :

$$\frac{dL}{dt} = N \Rightarrow I \frac{d\omega}{dt} = TR \Rightarrow \frac{1}{2} MR^2 \alpha = TR \Rightarrow \frac{1}{2} Ma = T \quad (1),$$

όπου $a = \alpha R$ είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας.

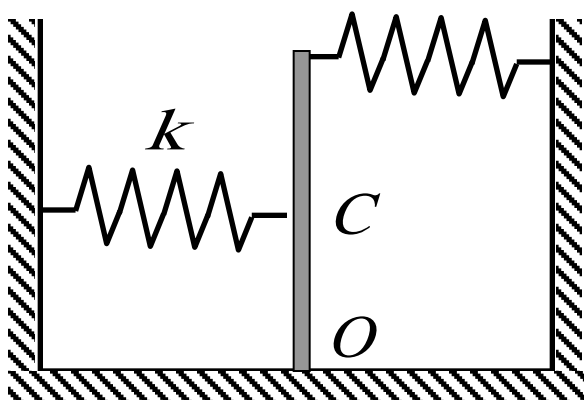
Είναι ακόμη από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$Mg - T = Ma \Rightarrow Mg - \frac{1}{2} Ma = Ma \Rightarrow a = \frac{2g}{3} \quad (2).$$

$$\text{Για την γωνιακή επιτάχυνση έχουμε } \alpha = \frac{2g}{3R} \quad (3).$$

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΡΑΒΔΟΣ

Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l κρατιέται από ελατήρια σταθεράς k , όπως φαίνεται στο σχήμα (C είναι το κέντρο της ράβδου). Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σταθερό σημείο O. Βρείτε την περίοδο της κίνησης της ράβδου για μετατοπίσεις των ελατηρίων πολύ μικρότερες του του μήκους l και του φυσικού μήκους των ελατηρίων. Αγνοείστε την βαρύτητα.



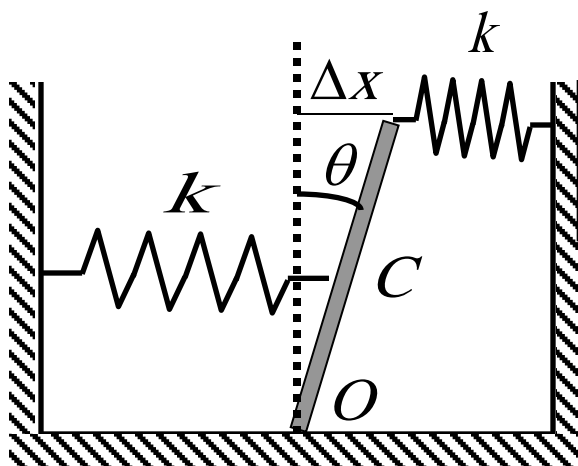
Έστω ότι το πάνω ελατήριο συμπιέζεται κατά Δx .

Τότε το κάτω ελατήριο τεντώνεται κατά $\Delta x/2$.

Η ράβδος δέχεται ροπές ως προς το σημείο O

$$N = N_1 + N_2 = -k\Delta x l - k \frac{\Delta x}{2} \frac{l}{2} = -\frac{5kl^2 \sin \theta}{4} \quad (1).$$

Από την εξίσωση περιστροφής ως προς O βρίσκουμε



$$\frac{dL}{dt} = N \Rightarrow I \frac{d\omega}{dt} = -\frac{5kl^2 \sin \theta}{4} \Rightarrow \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} = -\frac{5kl^2 \sin \theta}{4}$$

και για μικρές θ : $\ddot{\theta} = -\frac{15k}{4m} \theta$

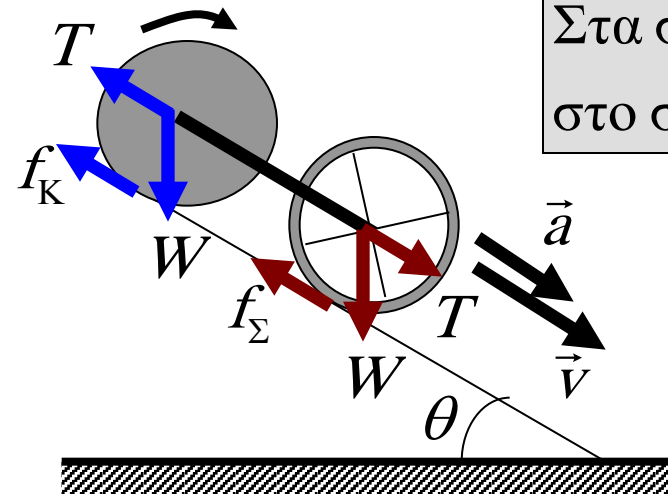
Άρα : $\omega = \sqrt{15k/4m}$
και $T = 4\pi \sqrt{m/15k}$.

ΚΥΛΙΣΗ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

7

Ένας στερεός κύλινδρος και μία λεπτή στεφάνη με την ίδια μάζα m και ακτίνα R συνδέονται με αβαρή ράβδο και κυλάνε χωρίς ολίσθηση πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης θ . Βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κατεβαίνει το σύστημα.

Στα σώματα ασκούνται το βάρος W , η τριβή (f_K και f_Σ) στο σημείο επαφής και η τάση T από την ράβδο.



Αν a είναι η επιτάχυνση του συστήματος και α η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου τότε

από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$mg \sin \theta - T - f_K = 0 \quad (1), \quad mg \sin \theta + T - f_\Sigma = 0 \quad (2).$$

Από την εξίσωση περιστροφής ως προς τα σημεία επαφής παίρνουμε

$$(mg \sin \theta - T)R = I_K \alpha = (mR^2 + mR^2/2)\alpha = 3mR^2 \alpha/2 \quad (3)$$

$$\text{και } (mg \sin \theta + T)R = I_\Sigma \alpha = (mR^2 + mR^2)\alpha = 2mR^2 \alpha \quad (4).$$

$$\text{Από τις (3) και (4) βρίσκουμε } 2mgR \sin \theta = 7mR^2 \alpha/2 \Rightarrow \alpha = 4g \sin \theta/7R \quad (5).$$

$$\text{Τελικά είναι : } a = \alpha R = 4g \sin \theta/7 \text{ και } T = mg \sin \theta/7.$$

Μια λεπτή ράβδος μήκους L και βάρους W στηρίζεται στα δύο άκρα της σε τριγωνικές βάσεις. Κάποια στιγμή αφαιρούμε την μία βάση. Βρείτε την δύναμη που ασκεί εκείνη την στιγμή η άλλη βάση στην ράβδο, καθώς και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της ράβδου.

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = W - N \quad (1), \text{ όπου } m \text{ είναι η μάζα της ράβδου.}$$

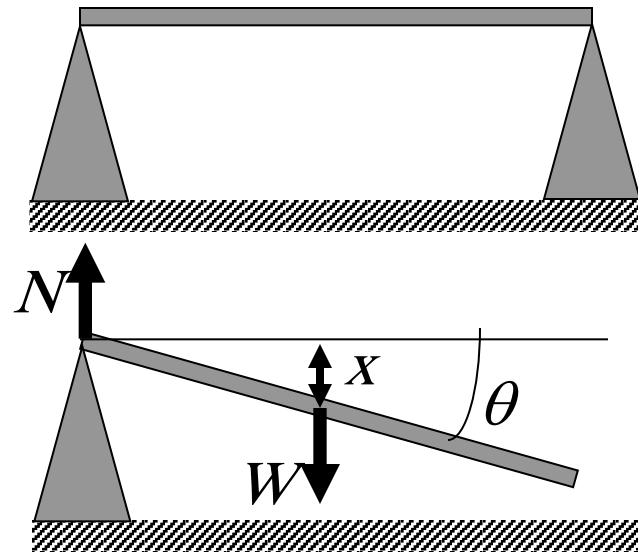
Από την εξίσωση περιστροφής βρίσκουμε

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = W \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} mL^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mg \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{3g}{2L} \quad (2).$$

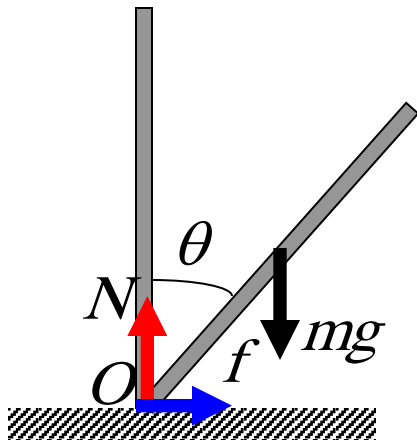
Για μικρές γωνίες θ είναι $x \approx L\theta/2$.

Επομένως, από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$m \frac{L}{2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mg - N \Rightarrow N = \frac{mg}{4} = \frac{W}{4} \text{ και } \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{3g}{4}.$$



Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ στέκεται αρχικά κατακόρυφα πάνω σε δάπεδο που έχει συντελεστή στατικής τριβής μ . Η ράβδος εκτρέπεται λίγο και αφήνεται να πέσει. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο (υποθέτουμε ότι η ράβδος δεν έχει ολισθήσει). Βρείτε ακόμη τον συντελεστή μ αν η ολίσθηση αρχίζει για $\theta = 30^\circ$.



Στην ράβδο ασκούνται το βάρος, η κάθετη αντίδραση N και η τριβή f .

Αν α είναι η γωνιακή επιτάχυνση τότε λόγω της ροπής του βάρους ως προς O έχουμε

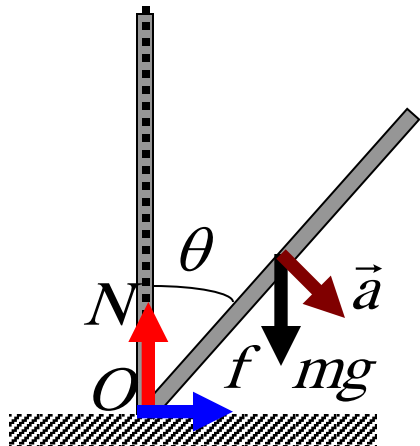
$$mgl \sin \theta = I\alpha = \frac{1}{3} m(2l)^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \theta \quad (1).$$

Έχουμε μια μεταβλητή α και για να βρούμε την ω πρέπει να ολοκληρώσουμε :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \theta \Rightarrow \frac{1}{2} d(\omega^2) = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \theta d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^{\omega^2} d(\omega'^2) = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} (1 - \cos \theta) \quad (2).$$

Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους $2l$ στέκεται αρχικά κατακόρυφα πάνω σε δάπεδο που έχει συντελεστή στατικής τριβής μ . Η ράβδος εκτρέπεται λίγο και αφήνεται να πέσει. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο (υποθέτουμε ότι η ράβδος δεν έχει ολισθήσει). Βρείτε ακόμη τον συντελεστή μ αν η ολίσθηση αρχίζει για $\theta = 30^\circ$.



Η γωνιακή επιτάχυνση α αντιστοιχεί σε επιτάχυνση $a = \alpha l$ του κέντρου μάζας.

Χρησιμοποιώντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση βρίσκουμε

$$(mg - N) = m\alpha l \sin \theta = \frac{3}{4} mg \sin^2 \theta \quad (1).$$

$$f = ml\alpha \cos \theta = \frac{3}{4} mg \sin \theta \cos \theta \quad (2).$$

Μόλις αρχίζει η ολίσθηση είναι $f = \mu N$ και από τις (1) και (2) βρίσκουμε

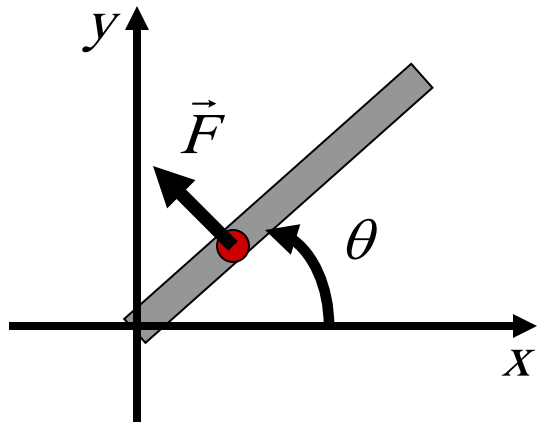
$$N = \frac{mg}{4} (4 - 3 \sin^2 \theta), \quad \mu = \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{4 - 3 \sin^2 \theta}. \text{ Για } \theta = 30^\circ, \mu = 0,40.$$

Το μάθημα της Τετάρτης 19/1/2011
ΔΕΝ θα πραγματοποιηθεί.

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΡΑΒΔΟΣ – ΣΩΜΑ

1

Λεπτή ράβδος μήκους L περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας m το οποίο ξεκινά από το σταθερό άκρο της ράβδου με αρχική ταχύτητα v_0 . Πότε φθάνει στο L ;



ΛΥΣΗ 1:

Η σφαίρα δέχεται πλευρική δύναμη \vec{F} από τα τοιχώματα της ράβδου, δηλαδή η \vec{F} είναι κάθετη στην ράβδο.

Θα δουλέψουμε σε πολικές συντεταγμένες του συστήματος αναφοράς του εργαστηρίου.

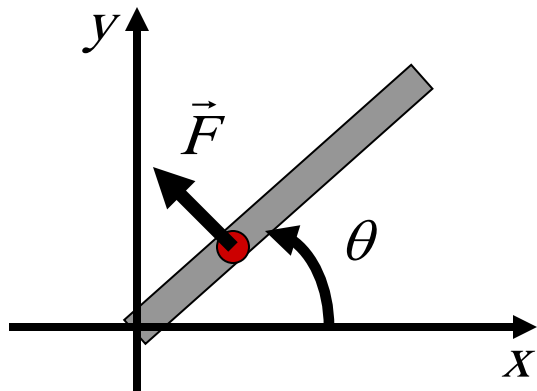
$$\text{Είναι } \vec{F} = m\vec{a} \quad (1), \text{ όπου } \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta} \quad (2).$$

Είναι όμως $\vec{F} = F\hat{\theta}$ και $\dot{\theta} = \omega = \text{σταθερό}$.

Οπότε από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad (3) \text{ και } m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\omega r^2) = F \Rightarrow F = 2m\omega\dot{r} \quad (4).$$

Λεπτή ράβδος μήκους L περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας m το οποίο ξεκινά από το σταθερό άκρο της ράβδου με αρχική ταχύτητα v_0 . Πότε φθάνει στο L ;



ΛΥΣΗ 1:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad (3) \text{ και } m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\omega r^2) = F \Rightarrow F = 2m\omega \dot{r} \quad (4).$$

$$\text{Η γενική λύση της (3) είναι η } r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad (5).$$

Για τον προσδιορισμό των A και B εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες

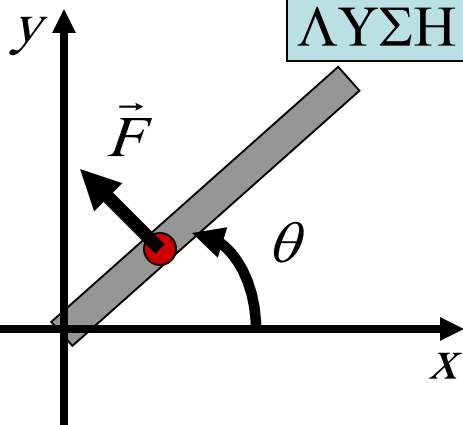
$$\text{Για } t = 0 \text{ είναι } r = 0 \Rightarrow A + B = 0 \quad (6) \text{ και } \dot{r} = v_0 \Rightarrow \omega(A - B) = v_0 \quad (7).$$

$$\text{Οι (6) και (7) δίνουν } A = v_0/2\omega, B = -v_0/2\omega.$$

$$\text{Είναι λοιπόν } r(t) = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \text{ και για } r = L \text{ βρίσκουμε}$$

$$t = \frac{1}{\omega} \sinh^{-1}(L\omega/v_0)$$

Λεπτή ράβδος μήκους L περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας m το οποίο ξεκινά από το σταθερό άκρο της ράβδου με αρχική ταχύτητα v_0 . Πότε φθάνει στο L ;



ΛΥΣΗ 2:

Στο σύστημα αναφοράς της περιστρεφόμενης ράβδου ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παίρνει την μορφή

$$m\vec{a} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1),$$

όπου $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, $\vec{r} = r \hat{r}$, $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{r}$, $\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r}$.

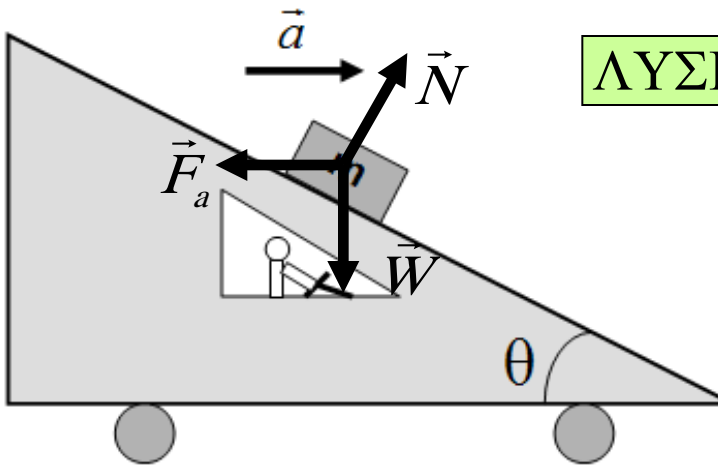
Επομένως για τους όρους που εμφανίζονται στην (1) έχουμε

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \omega \dot{r} \left(\hat{z} \times \hat{r} \right) = \omega \dot{r} \hat{\theta} \quad \text{και} \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 r \hat{r}.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε 2 εξισώσεις για τις \dot{r} και \ddot{r} συνιστώσες

$$F - 2m\omega\dot{r} = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \ddot{r} = \omega^2 r \quad (3), \quad \text{που συμπίπτουν με αυτές της ΛΥΣΗΣ 1.}$$

Αμαξάκι σχήματος κεκλιμένου επιπέδου κινείται οριζόντια με επιτάχυνση a . Επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο βρίσκεται ένα σώμα μάζας m , η τριβή ολίσθησης ανάμεσα στο κεκλιμένο επίπεδο και το σώμα είναι μ . Υποθέτουμε ότι $1 > \mu \tan \theta$ όπου θ η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου με τον ορίζοντα. (α) Βρείτε την επιτάχυνση a_0 του αμαξιού ώστε το σώμα να ισορροπεί επί του κεκλιμένου επιπέδου χωρίς την δύναμη της τριβής. (β) Εάν $a > a_0$ περιγράψτε την κίνηση του σώματος ως προς το αμαξάκι και βρείτε την επιτάχυνση του σώματος ως προς το κεκλιμένο επίπεδο.



ΛΥΣΗ:

Στο σώμα ασκούνται το βάρος \vec{W} , η κάθετη αντίδραση \vec{N} , και ενδεχομένως η τριβή \vec{f} .

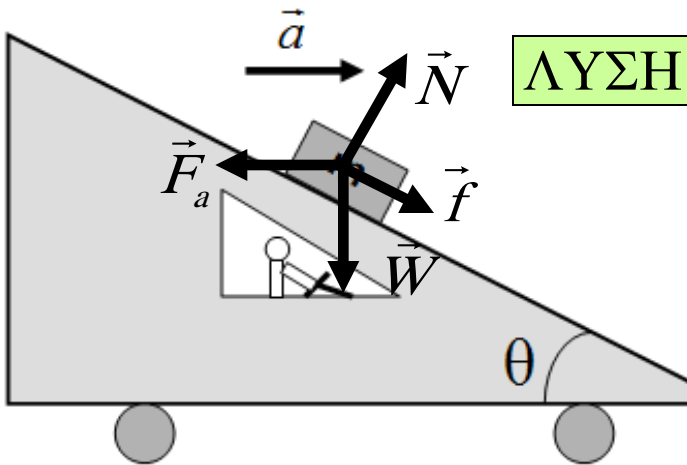
Στο σύστημα αναφοράς του οδηγού θα πρέπει να συμπεριλάβουμε την ψευδοδύναμη $\vec{F}_a = -m\vec{a}$.

α) Η συνθήκη ισορροπίας για $\vec{f} = 0$ δίνει $\vec{F}_a + \vec{W} + \vec{N} = 0 \Rightarrow$

$$ma_0 = N \sin \theta \quad (1) \quad \text{και} \quad mg = N \cos \theta \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $\frac{ma_0}{mg} = \tan \theta \Rightarrow a_0 = g \tan \theta \quad (3).$

Αμαξάκι σχήματος κεκλιμένου επιπέδου κινείται οριζόντια με επιτάχυνση a . Επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο βρίσκεται ένα σώμα μάζας m , η τριβή ολίσθησης ανάμεσα στο κεκλιμένο επίπεδο και το σώμα είναι μ . Υποθέτουμε ότι $1 > \mu \tan \theta$ όπου θ η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου με τον ορίζοντα. (α) Βρείτε την επιτάχυνση a_0 του αμαξιού ώστε το σώμα να ισορροπεί επί του κεκλιμένου επιπέδου χωρίς την δύναμη της τριβής. (β) Εάν $a > a_0$ περιγράψτε την κίνηση του σώματος ως προς το αμαξάκι και βρείτε την επιτάχυνση του σώματος ως προς το κεκλιμένο επίπεδο.



ΛΥΣΗ:

β) Έστω τώρα ότι το όχημα κινείται με $a > a_0$.

Τότε στο σώμα ασκείται και τριβή παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο και προς τα κάτω.

Αν $\vec{\gamma}$ είναι η επιτάχυνση του σώματος ως προς τον οδηγό, τότε από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}_a + \vec{W} + \vec{N} + \vec{f} \quad (1).$$

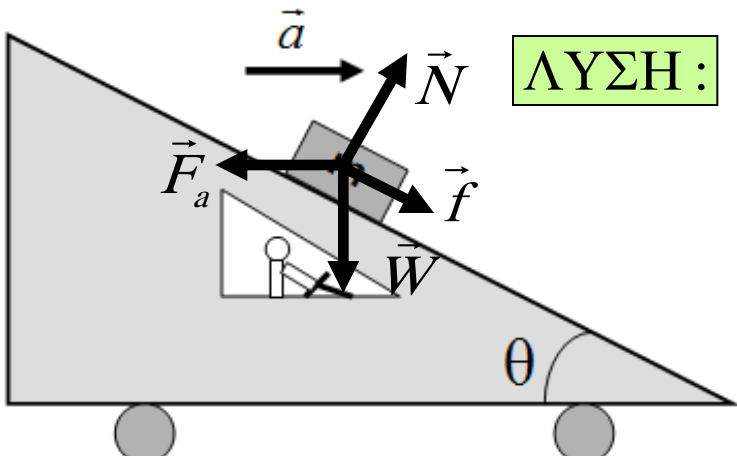
Η προβολή της (1) στο κεκλιμένο επίπεδο δίνει

$$m\gamma = ma \cos \theta - f - mg \sin \theta \quad (2)$$

Κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο έχουμε

$$0 = ma \sin \theta + mg \cos \theta - N \quad (3).$$

Αμαξάκι σχήματος κεκλιμένου επιπέδου κινείται οριζόντια με επιτάχυνση a . Επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο βρίσκεται ένα σώμα μάζας m , η τριβή ολίσθησης ανάμεσα στο κεκλιμένο επίπεδο και το σώμα είναι μ . Υποθέτουμε ότι $1 > \mu \tan \theta$ όπου θ η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου με τον ορίζοντα. (α) Βρείτε την επιτάχυνση a_0 του αμαξιού ώστε το σώμα να ισορροπεί επί του κεκλιμένου επιπέδου χωρίς την δύναμη της τριβής. (β) Εάν $a > a_0$ περιγράψτε την κίνηση του σώματος ως προς το αμαξάκι και βρείτε την επιτάχυνση του σώματος ως προς το κεκλιμένο επίπεδο.



ΛΥΣΗ:

$$m\gamma = ma \cos \theta - f - mg \sin \theta \quad (2)$$

$$0 = ma \sin \theta + mg \cos \theta - N \quad (3).$$

Διακρίνουμε δύο φυσικές περιπτώσεις:

Έστω ότι το σώμα κινείται με $\gamma > 0$.

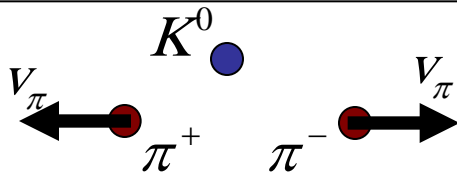
Τότε $f = \mu N$ και από τις (2) - (3) παίρνουμε

$$\gamma = a \cos \theta - \mu a \sin \theta - \mu g \cos \theta - g \sin \theta = a(\cos \theta - \mu \sin \theta) - g(\sin \theta + \mu \cos \theta) \quad (4)$$

Από την (4) προκύπτει ότι $\gamma = 0$ όταν $a_1 = g \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} > a_0$.

Για επιταχύνσεις a με $a_0 < a < a_1$ το σώμα ισορροπεί δεχόμενο $f < \mu N$.

Το σωματίδιο K^0 έχει μάζα ηρεμίας που είναι ισοδύναμη με $m_K c^2 = 498 \text{ MeV}$ και διασπάται σε δύο μεσόνια π^+ και π^- που έχουν ίσες μάζες ηρεμίας m_π . Στο σύστημα ηρεμίας του K^0 τα μεσόνια κινούνται με ταχύτητα $0,83 c$ το καθένα. (α) Να βρεθεί ο λόγος μαζών ηρεμίας m_π / m_K . (β) Έστω ότι στο εργαστήριο το K^0 κινείται με ταχύτητα $0,83 c$ και τα δύο π κινούνται πάνω στην ευθεία κίνησης του K^0 . Να βρεθούν οι κινητικές ενέργειες των μεσονίων π στο σύστημα του εργαστηρίου.



(α) Η διατήρηση της ενέργειας δίνει

$$m_K c^2 = 2m_\pi \gamma_\pi c^2 \quad (1),$$

$$\text{όπου } \gamma_\pi = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_\pi/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,83^2}} = 1,793.$$

$$\text{Επομένως από την (1) παίρνουμε } \frac{m_\pi}{m_K} = \frac{1}{2\gamma_\pi} = 0,279.$$

$$\text{Για την μάζα ηρεμίας βρίσκουμε } m_\pi c^2 = \frac{1}{2\gamma_\pi} m_K = 139 \text{ MeV}.$$

Το σωματίδιο K^0 έχει μάζα ηρεμίας που είναι ισοδύναμη με $m_K c^2 = 498 \text{ MeV}$ και διασπάται σε δύο μεσόνια π^+ και π^- που έχουν ίσες μάζες ηρεμίας m_π . Στο σύστημα ηρεμίας του K^0 τα μεσόνια κινούνται με ταχύτητα $0,83 c$ το καθένα. (α) Να βρεθεί ο λόγος μαζών ηρεμίας m_π / m_K . (β) Έστω ότι στο εργαστήριο το K^0 κινείται με ταχύτητα $0,83 c$ και τα δύο π κινούνται πάνω στην ευθεία κίνησης του K^0 . Να βρεθούν οι κινητικές ενέργειες των μεσονίων π στο σύστημα του εργαστηρίου.

β) Εφόσον στο σύστημα του εργαστηρίου κινείται με ταχύτητα $0,83 c$,

στο σύστημα αυτό το ένα π θα είναι ακίνητο και το άλλο θα έχει συντελεστή γ'_π .

Αν γ'_K είναι ο σχετικιστικός συντελεστής για το K^0 , τότε

$$m_K \gamma'_K c^2 = m_\pi c^2 + m_\pi \gamma'_\pi c^2 \Rightarrow \gamma'_\pi = \left(\frac{m_K}{m_\pi} \gamma'_K - 1 \right) = 5,43.$$

Για το ένα μεσόνιο η κινητική ενέργεια είναι μηδέν, για το άλλο $E_K^\pi = m_\pi c^2 (\gamma'_\pi - 1) = 616 \text{ MeV}$.

Το σωματίδιο K^0 έχει μάζα ηρεμίας που είναι ισοδύναμη με $m_K c^2 = 498 \text{ MeV}$ και διασπάται σε δύο μεσόνια π^+ και π^- που έχουν ίσες μάζες ηρεμίας m_π . Στο σύστημα ηρεμίας του K^0 τα μεσόνια κινούνται με ταχύτητα $0,83 c$ το καθένα. (α) Να βρεθεί ο λόγος μαζών ηρεμίας m_π / m_K . (β) Έστω ότι στο εργαστήριο το K^0 κινείται με ταχύτητα $0,83 c$ και τα δύο π κινούνται πάνω στην ευθεία κίνησης του K^0 . Να βρεθούν οι κινητικές ενέργειες των μεσονίων π στο σύστημα του εργαστηρίου.

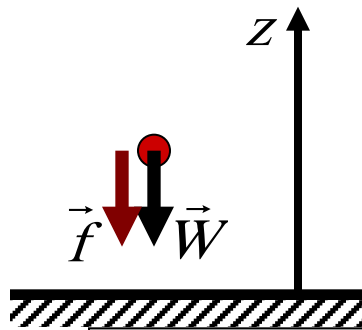
Εναλλακτικά μπορούμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα του κινούμενου π με τον σχετικιστικό κανόνα σύνθεσης ταχυτήτων

$$v'_\pi = \frac{v_\pi - v_K}{1 - v_\pi v_K / c^2} = \frac{-\beta c - \beta c}{1 - (-\beta c)\beta c / c^2} = 0,983c.$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια του κινούμενου π είναι

$$E_K^\pi = m_\pi c^2 (\gamma'_\pi - 1) = 139 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,983^2}} - 1 \right) \text{ MeV} = 616 \text{ MeV}.$$

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0 . Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητας, να βρεθεί το μέγιστο ύψος και η σχέση μεταξύ ταχύτητας και ύψους κατά την άνοδο και την κάθοδο του σώματος.



Κατά την άνοδο το βάρος \vec{W} και η αντίσταση $\vec{f} = -bv^2 \hat{v}$ είναι ομόρροπες δυνάμεις.

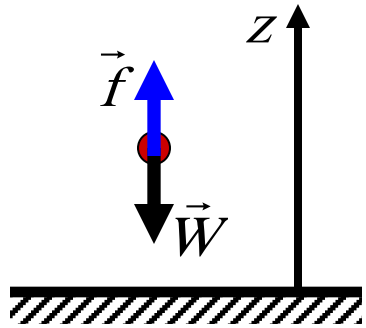
Η εξίσωση κίνησης στην άνοδο είναι

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - bv^2 \Rightarrow m \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = -mg - bv^2 \Rightarrow mv \frac{dv}{dz} = -mg - bv^2 \Rightarrow (1).$$

$$\Rightarrow \frac{d(v^2)}{g + kv^2} = -2dz \Rightarrow \frac{1}{k} \ln \left(\frac{g + kv^2}{g + kv_0^2} \right) = -2z, \text{ όπου } k = b/m.$$

$$\Theta \acute{\epsilon} \tau \omicron \nu \tau \alpha \varsigma \ v = 0 \ \beta \rho \acute{\iota} \sigma \kappa \omicron \upsilon \mu \epsilon \ z_{\max} = \frac{1}{2k} \ln \left(1 + \frac{kv_0^2}{g} \right)$$

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0 . Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της ταχύτητας, να βρεθεί το μέγιστο ύψος και η σχέση ταχύτητας και ύψους κατά την άνοδο και την κάθοδο του σώματος.



Κατά την κάθοδο το βάρος \vec{W} και η αντίσταση $\vec{f} = -bv^2 \hat{v}$ είναι αντίρροπες δυνάμεις.

Η εξίσωση κίνησης στην κάθοδο είναι

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + bv^2 \Rightarrow m \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = -mg + bv^2 \Rightarrow mv \frac{dv}{dz} = -mg + bv^2 \Rightarrow (3).$$

$$\Rightarrow \frac{d(v^2)}{g - kv^2} = -2 dz \Rightarrow -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{g - kv^2}{g - kv_0^2} \right) = -2z.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

1

Πύραυλος που αρχικά ηρεμεί αρχίζει και αυξάνει την ταχύτητά του χρησιμοποιώντας ως προωθητικό "καύσιμο" φωτόνια. Δείξτε ότι μόνο περίπου 5% της αρχικής μάζας ηρεμίας (πύραυλος+"καύσιμα") απομένει στον πύραυλο όταν τελικά αποκτήσει ταχύτητα $0,995c$.

Έστω ότι αρχικά ο πύραυλος είχε μάζα (ηρεμίας) m_0 .

Έστω ακόμη ότι στο τέλος απομένει fm_0 ως μάζα ηρεμίας.

Αν p είναι η ορμή των φωτονίων που έχουν εκπεμφθεί,

τότε από την αρχή της διατήρησης της ορμής βρίσκουμε $p = \gamma fm_0 v(1)$,

όπου $v = 0,995c$ είναι η τελική ταχύτητα του πυραύλου και $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Από την διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε

$$m_0 c^2 = \gamma fm_0 c^2 + pc(2).$$

Αντικαθιστώντας το p από την (1) στην (2) παίρνουμε

$$m_0 c^2 = \gamma fm_0 c^2 + \gamma fm_0 vc \Rightarrow f = \frac{1}{\gamma} \frac{c}{c+v} = \sqrt{1-0,995^2} \frac{1}{1+0,995} \approx 0,05.$$

Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των επιταχύνσεων ενός σωματιδίου, όπως μετρούνται από δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε ομαλή σχετική κίνηση. Υποθέτουμε ότι το σωματίδιο κινείται κατά μήκος της γραμμής της σχετικής κίνησης.

Έστω v η σχετική ταχύτητα κίνησης των δύο παρατηρητών.

Έστω ακόμη ότι ο παρατηρητής 1 (2) μετράει ταχύτητα V_1 (V_2) για το σωματίδιο.

Τότε, από τον σχετικιστικό κανόνα σύνθεσης ταχυτήτων $V_2 = \frac{V_1 - v}{1 - vV_1/c^2}$ (1).

Αν t_1 και t_2 είναι οι χρόνοι που μετράνε οι δύο παρατηρητές, τότε

είναι $\frac{dV_2}{dt_2} = \frac{dV_2}{dt_1} \frac{dt_1}{dt_2}$ (2).

Από την (1) βρίσκουμε

$$\frac{dV_2}{dt_1} = \frac{dV_1/dt_1}{1 - vV_1/c^2} - \frac{V_1 - v}{(1 - vV_1/c^2)^2} \left(-\frac{v}{c^2} \frac{dV_1}{dt_1} \right) = \frac{1 - v^2/c^2}{1 - vV_1/c^2} a_1 \quad (3).$$

Είναι επίσης $\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{1 - vV_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, οπότε $a_2 = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vV_1/c^2)^2} a_1$.

Ένα αερόστατο μάζας m_0 ισορροπεί σε ύψος h . Η μισή από την συνολική του μάζα είναι σε μορφή άμμου. Κάποια στιγμή ανοίγει τρύπα στο δάπεδο του κουβούκλιου του αερόστατου και η άμμος αρχίζει να πέφτει με σταθερό ρυθμό k . Να βρεθεί η ταχύτητα του αερόστατου την στιγμή που αυτό χάνει όλη την άμμο.

Το αερόστατο αρχικά ισορροπεί και άρα $m_0 g = A$, όπου A είναι η άνωση.

Έστω ότι την χρονική στιγμή t η μάζα του αερόστατου είναι m και την χρονική στιγμή $t + dt$ η μάζα είναι $m - dm$. Αν οι ταχύτητες του αερόστατου τις στιγμές t και $t + dt$ είναι v και $v + dv$, τότε η διαφορά της ορμής είναι

$$(m - dm)(v + dv) + (v - V)dm - mv = [A - mg]dt, \text{ όπου}$$

$V = 0$ η σχετική ταχύτητα της άμμου ως προς το αερόστατο.

Επειδή είναι $dm = kdt$, $v_s = v$ και αγνοώντας γινόμενα διαφορικών, βρίσκουμε

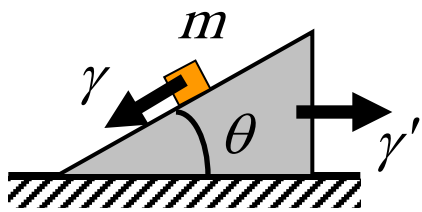
$$mdv = (A - mg)dt \Rightarrow dv/dt = [A - (m_0 - kt)g]/m = ktg/(m_0 - kt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^v dv' = \int_0^t \frac{ktg}{m_0 - kt} dt' \Rightarrow v = -gt - \frac{m_0 g}{k} \ln\left(1 - \frac{kt}{m_0}\right)$$

Αν τ είναι η στιγμή που $m = m_0/2$ τότε $\tau = m_0/2k$,

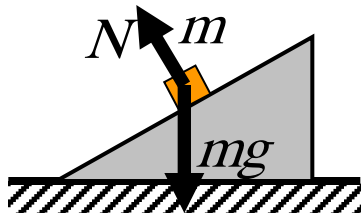
$$\text{τότε } v(\tau) = (\ln 2 - 1/2)m_0 g/k.$$

Σώμα μάζας m αφήνεται να γλυστρήσει πάνω σε λεία σφήνα γωνίας θ . Η σφήνα μπορεί να γλύστραει πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί η επιτάχυνση της σφήνας. Οι μάζες της σφήνας και του Σ είναι ίσες με M και m , αντίστοιχα.



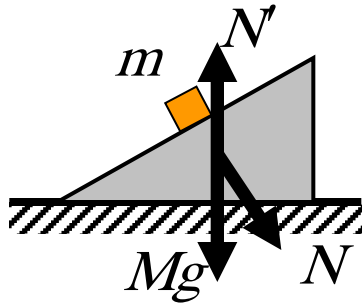
Στο σώμα m ασκούνται το βάρος mg και η αντίδραση N από την σφήνα. Οι εξισώσεις κίνησης παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο και κάθετα σε αυτό δίνουν

$$mg \sin \theta = m(\gamma - \gamma' \cos \theta) \quad (1), \quad mg \cos \theta - N = m\gamma' \sin \theta \quad (2).$$



Στην σφήνα M ασκούνται το βάρος Mg , η αντίδραση N από την m και η αντίδραση από το οριζόντιο επίπεδο. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει σε οριζόντια και κάθετη διεύθυνση

$$Mg - N' + N \cos \theta = 0 \quad (3), \quad N \sin \theta = M\gamma' \quad (4).$$



Από τις (2) και (4) προκύπτει $mg \cos \theta = \gamma' \left(m \sin \theta + \frac{M}{\sin \theta} \right) \Rightarrow$

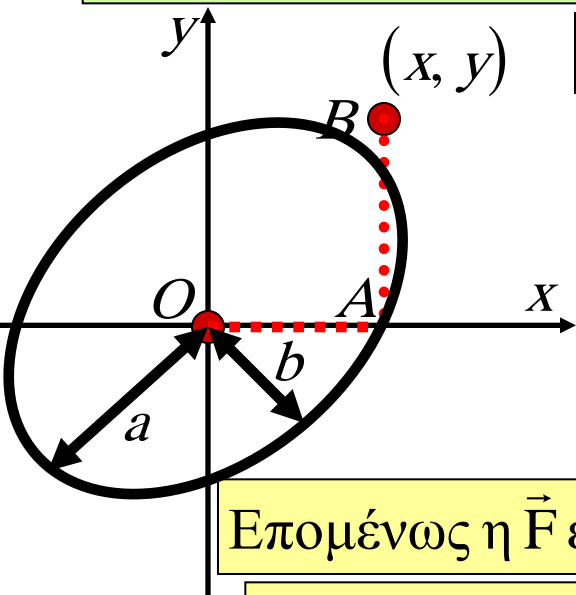
$$\Rightarrow \gamma' = \frac{mg \cos \theta \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

5

Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο Oxy υπό την επίδραση της δύναμης

$\vec{F} = (-2x + y)\hat{x} + (x - 2y)\hat{y}$. Δείξτε ότι η \vec{F} είναι συντηρητική και βρείτε για ποιες ενέργειες η κίνηση είναι περιορισμένη στον χώρο. Περιγράψετε τον γεωμετρικό τόπο των ορίων της κίνησης για μια περιορισμένη τροχιά.



Ελέγχουμε καταρχήν ότι η δύναμη είναι συντηρητική :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x + y & x - 2y & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1).$$

Επομένως η \vec{F} είναι διατηρητική και αν θεωρήσουμε ότι $V(0,0) = 0$ τότε

$$V(x, y) = -W_{O \rightarrow B} = -\int_{O \rightarrow A} \vec{F} \cdot d\vec{r}' - \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = \int_0^x (2x' - 0) dx' + \int_0^y (2y' - x) dy'$$

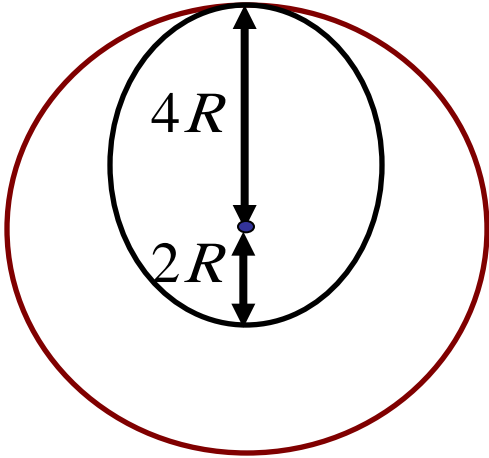
$$V(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

Για ενέργεια $E > 0$ η κίνηση είναι περιορισμένη από μια έλλειψη $V(x, y) = E$ με $a = \sqrt{2E}$ και $b = \sqrt{2E/3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΤΡΟΧΙΑ ΔΟΡΥΦΟΡΟΥ

1

Δορυφόρος γυρίζει γύρω από την Γη σε κυκλική τροχιά ακτίνας $4R$, όπου R είναι η ακτίνα της Γης. Σε μια στιγμή, μια σύντομη ανάφλεξη των ανασχετικών πυραύλων του ελαττώνει την ταχύτητά του από v_0 σε v χωρίς να μεταβάλλει την κατεύθυνσή της. Τι είδος τροχιάς θα ακολουθήσει ο πύραυλος; Αν η ελάχιστη απόσταση της νέας τροχιάς από την Γη είναι $2R$ να βρεθεί ο λόγος $\lambda = v/v_0$.



Ο δορυφόρος θα ακολουθήσει ελλειπτική τροχιά με απόσταση απόγειου $4R$ και περιγείου $2R$.

Η ενέργεια για κίνηση στο βαρυτικό πεδίο της Γης είναι

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_{\Gamma} m}{r} \quad (1), \text{ όπου } L \text{ η στροφορμή.}$$

Οι αποστάσεις περιγείου και απόγειου είναι λύσεις της $E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_{\Gamma} m}{r} \quad (2)$

$$\text{Για κυκλική τροχιά είναι } v_0^2/4R = GM_{\Gamma}/(4R)^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{GM_{\Gamma}/4R}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: ΤΡΟΧΙΑ ΔΟΡΥΦΟΡΟΥ

2

Δορυφόρος γυρίζει γύρω από την Γη σε κυκλική τροχιά ακτίνας $4R$, όπου R είναι η ακτίνα της Γης. Σε μια στιγμή, μια σύντομη ανάφλεξη των ανασχετικών πυραύλων του ελαττώνει την ταχύτητά του από v_0 σε v χωρίς να μεταβάλλει την κατεύθυνσή της. Τι είδος τροχιάς θα ακολουθήσει ο πύραυλος; Αν η ελάχιστη απόσταση της νέας τροχιάς από την Γη είναι $2R$ να βρεθεί ο λόγος $\lambda = v/v_0$.

Οι αποστάσεις περιγείου και απογείου είναι λύσεις της $E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_\Gamma m}{r}$ (2)

Για κυκλική τροχιά είναι $v_0^2/4R = GM_\Gamma/(4R)^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{GM_\Gamma/4R}$.

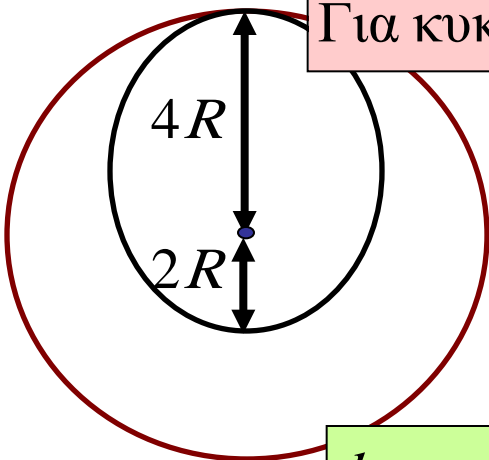
Για την ελλειπτική τροχιά είναι $L = m4Rv = 2m\lambda\sqrt{GM_\Gamma R}$

$$\text{και } E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\Gamma m}{4R} = \frac{GM_\Gamma m}{8R}(\lambda^2 - 2).$$

Αντικαθιστώντας στην (2) και για $k = GM_\Gamma$ βρίσκουμε

$$\frac{km}{8R}(\lambda^2 - 2) = \frac{4m^2\lambda^2 kR}{2mr^2} - \frac{km}{r} \Rightarrow \lambda^2 - 2 = 16\lambda^2 R^2/r^2 - 8R/r \quad (3).$$

Για $r = 2R$ η (3) δίνει $\lambda^2 - 2 = 4\lambda^2 - 4 \Rightarrow 3\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{2/3}$.



Σώμα Α εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα πάνω για να φτάσει σε μέγιστο ύψος h . Δεύτερο ίδιο σώμα Β εκτοξεύεται οριζόντια για να φτάσει στο ίδιο μέγιστο ύψος h . Να βρεθεί ο λόγος των δύο ταχυτήτων εκτόξευσης ως συνάρτηση του h και της ακτίνας R της Γης.

Η ολική ενέργεια δίνεται από την σχέση $E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_{\Gamma} m}{r}$ (1).

Για το Α η διατήρηση της ενέργειας δίνει

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{km}{R} = -\frac{km}{R+h} \Rightarrow v_A^2 = 2k \frac{h}{R(R+h)} \quad (2).$$

Για το Β έχουμε $L = mRv_B$ και $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{km}{R} = \frac{L^2}{2m(R+h)^2} - \frac{km}{R+h} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{km}{R} = \frac{(mRv_B)^2}{2m(R+h)^2} - \frac{km}{R+h} \Rightarrow v_B^2 \left[1 - \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \right] = 2k \frac{h}{R(R+h)} \quad (3).$$

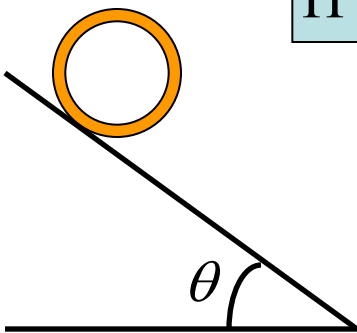
Από τις (2) και (3) βρίσκουμε τον λόγο $v_A/v_B = \sqrt{h(2R+h)/(R+h)}$ (4).

Μια κούφια σφαίρα με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 κυλάει προς τα κάτω, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ . (α) Να βρείτε την γωνιακή και τη γραμμική επιτάχυνση της σφαίρας. (β) Στο χαμηλότερο άκρο του το κεκλιμένο επίπεδο συνδέεται με καμπύλη επιφάνεια που τελικά καταλήγει σε οριζόντιο επίπεδο. Με ποια ταχύτητα θα κινείται το σώμα στο τελικό οριζόντιο επίπεδο αν ξεκινάει από την ηρεμία και το κέντρο του βρίσκεται σε ύψος H πάνω από το τελικό οριζόντιο επίπεδο;

Η γραμμική επιτάχυνση a της σφαίρας όσο αυτή κατρακυλάει είναι

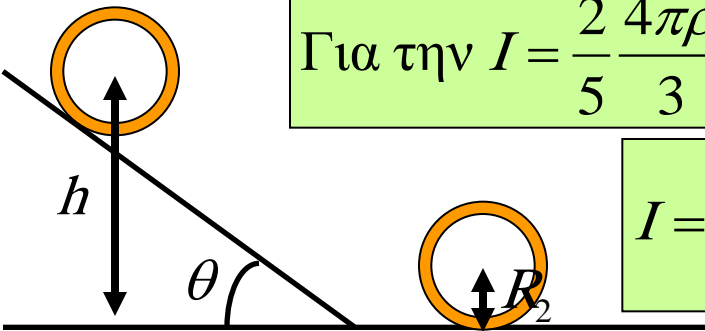
$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + I/MR^2}, \text{ όπου } M \text{ και } I \text{ είναι η μάζα και η ροπή αδράνειας.}$$

Έστω ρ είναι η πυκνότητα της κούφιας σφαίρας.



Η ροπή αδράνειας συμπαγούς σφαίρας είναι $I_s = \frac{2}{5} (\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha) R^2 = \frac{2}{5} \rho \frac{4}{3} \pi R^5$.

Επομένως η ροπή αδράνειας I είναι $I = \frac{2}{5} \frac{4\pi\rho}{3} (R_2^5 - R_1^5) (1)$.



Για την $I = \frac{2}{5} \frac{4\pi\rho}{3} (R_2^5 - R_1^5)$ (1) συναρτήσει της μάζας M παίρνουμε

$$I = \frac{2}{5} \frac{4\pi}{3} \frac{M}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)/3} (R_2^5 - R_1^5) = \frac{2}{5} M \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \quad (2).$$

Η γραμμική επιτάχυνση a και η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = a/R_2$ προκύπτουν

από την σχέση $a = \frac{g \sin \theta}{1 + I/MR^2}$ για $R = R_2$ και I από την (2).

(β) Αν v η ταχύτητα της σφαίρας στο οριζόντιο επίπεδο, τότε από την

$$\text{διατήρηση της ενέργειας } Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} + MgR_2 \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{2g(h - R_2)}{1 + \frac{2}{5} \frac{1 - (R_1/R_2)^5}{1 - (R_1/R_2)^3}}$$

Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο *xy* δίνονται συναρτήσει του χρόνου *t*, από τις σχέσεις $x(t) = 3 \sin 5t$, $y(t) = 4 \cos 5t$ (σε *m* όταν ο χρόνος μετριέται σε *sec*). Να βρεθούν : (α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου. (β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου. (γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

$$\alpha) \text{ Είναι } v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 15 \cos 5t, v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -20 \sin 5t,$$

$$\text{και } \gamma_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -75 \sin 5t, \gamma_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -100 \cos 5t.$$

$$\beta) \text{ Για το μέτρο } v \text{ της ταχύτητας έχουμε } v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15 + 175 \sin^2 5t} \text{ m/sec.}$$

$$\text{Για το μέτρο } \gamma \text{ της επιτάχυνσης έχουμε } \gamma(t) = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1, \text{ δηλαδή η τροχιά είναι μια έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα } 3 \text{ m και μικρό ημιάξονα } 4 \text{ m.}$$

Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$ κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{r}_1 = (3t + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z} \text{ και } \vec{r}_2 = (20 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + (1 + 4t)\hat{z}$$

αντίστοιχα, όπου $t = \text{χρόνος}$ (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s). (α) Δείξτε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. (β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; (γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος. Αν ναι, πόση είναι; (δ) Αν μετά την σύγκρουση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση του ως συνάρτηση του χρόνου.

α) Αναζητούμε χρόνο τ για τον οποίο $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \Leftrightarrow$

$$3\tau + 2\tau^2 = 20 - \tau - \tau^2, 4 + 4\tau^2 = 10 + 9\tau - \tau^2, 5 + 2\tau = 1 + 4\tau \Leftrightarrow \tau = 2 \text{ sec.}$$

β) Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα είναι

$$\vec{F}_1 = m\ddot{\vec{r}}_1 = 4m \left(\hat{x} + 2\hat{y} \right) \text{ N και } \vec{F}_2 = m\ddot{\vec{r}}_2 = -4m \left(\hat{x} + 2\hat{y} \right) \text{ N.}$$

$$\text{Άρα: } \vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

γ) Επειδή $\vec{F}_{ολ} = 0$ η ορμή του συστήματος διατηρείται και

$$\vec{P}_{ολ} = m \left[(3 + 4t)\hat{x} + 8t\hat{y} + 2\hat{z} \right] + 2m \left[(-1 - 2t)\hat{x} + (9 - 4t)\hat{y} + 4\hat{z} \right] = m \left(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z} \right).$$

Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$ κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{r}_1 = (3t + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z} \text{ και } \vec{r}_2 = (20 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + (1 + 4t)\hat{z}$$

αντίστοιχα, όπου $t = \text{χρόνος}$ (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s). (α) Δείξτε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. (β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; (γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος. Αν ναι, πόση είναι; (δ) Αν μετά την σύγκρουση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση του ως συνάρτηση του χρόνου.

$$\vec{P}_{ολ} = m \left[(3 + 4t)\hat{x} + 8t\hat{y} + 2\hat{z} \right] + 2m \left[(-1 - 2t)\hat{x} + (9 - 4t)\hat{y} + 4\hat{z} \right] = m \left(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z} \right).$$

δ) Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε για το νέο σώμα

$$\vec{v} = \vec{P}_{ολ} / 3m \text{ και } \vec{r}(t) = \vec{r}_1(\tau) + (t - \tau)\vec{v}(t) = \left(14\hat{x} + 20\hat{y} + 9\hat{z} \right) + \frac{(t - 2)}{3} \left(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{3} \left(40\hat{x} + 24\hat{y} + 7\hat{z} \right) + \frac{t}{3} \left(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z} \right).$$

Σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες $x = 3a \sin \omega t$, $y = 4a \sin \omega t$, $z = 5a \cos \omega t$, όπου $t =$ χρόνος και ω και a είναι θετικές σταθερές. Αποδείξτε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3 τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ είναι συνεπίπεδα. Συνθήκη: $\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) = 0$

Έστω τυχαίοι χρόνοι t_1, t_2, t_3 και τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Τότε :

$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = a^2 \left(3 \hat{x} \sin \omega t_2 + 4 \hat{y} \sin \omega t_2 + 5 \hat{z} \cos \omega t_2 \right) \times \left(3 \hat{x} \sin \omega t_3 + 4 \hat{y} \sin \omega t_3 + 5 \hat{z} \cos \omega t_3 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}_2 \times \vec{r}_3}{a^2} &= 12 \hat{z} \sin \omega t_2 \sin \omega t_3 - 15 \hat{y} \sin \omega t_2 \cos \omega t_3 - \\ &- 12 \hat{z} \sin \omega t_2 \sin \omega t_3 + 20 \hat{x} \sin \omega t_2 \cos \omega t_3 + \\ &+ 15 \hat{y} \cos \omega t_2 \sin \omega t_3 - 20 \hat{x} \cos \omega t_2 \sin \omega t_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = a^2 \left(20 \hat{x} \sin[\omega(t_2 - t_3)] - 15 \hat{y} \sin[\omega(t_2 - t_3)] \right) \text{ και } \vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) = 0 \text{ (ό.ε.δ).}$$

Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = bt^2$, όπου t είναι ο χρόνος και a, b, ω είναι θετικές σταθερές. (α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης \vec{r} , η ταχύτητα \vec{v} , και η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου. (β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{c} = z \hat{z} = bt^2 \hat{z}$ και $\vec{R} = \vec{r} - \vec{c}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στην μάζα, να βρείτε το \vec{R} και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα z είναι σταθερή.

α) Διάνυσμα θέσης : $\vec{r}(t) = a \hat{x} \cos \omega t + a \hat{y} \sin \omega t + bt^2 \hat{z} \quad (1)$.

Ταχύτητα $\vec{v}(t) = a\omega \left(-\hat{x} \sin \omega t + \hat{y} \cos \omega t \right) + 2bt \hat{z}$.

Επιτάχυνση $\vec{\gamma}(t) = -a\omega^2 \left(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t \right) + 2b \hat{z}$.

β) Είναι $\vec{R} = \vec{r} - \vec{c} = a \left(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t \right)$ και $R = a = \text{σταθερό}$.

(γ) Βρείτε την δύναμη F που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξτε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο K και μία σταθερή στην κατεύθυνση z . (δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ και δείξτε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στη κατεύθυνση z .

(γ) Είναι από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα $\vec{F} = m\vec{\gamma} = -m\omega^2 [\vec{r}(t) - \vec{c}] + 2mb\hat{z}$

κεντρομόλος ως προς K

(δ) Για τον ρυθμό παραγωγής έργου βρίσκουμε

$$P = m\vec{\gamma} \cdot \vec{v} = m \left[-a\omega^2 \left(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t \right) + 2b\hat{z} \right] \cdot \left[a\omega \left(-\hat{x} \sin \omega t + \hat{y} \cos \omega t \right) + 2bt\hat{z} \right]$$

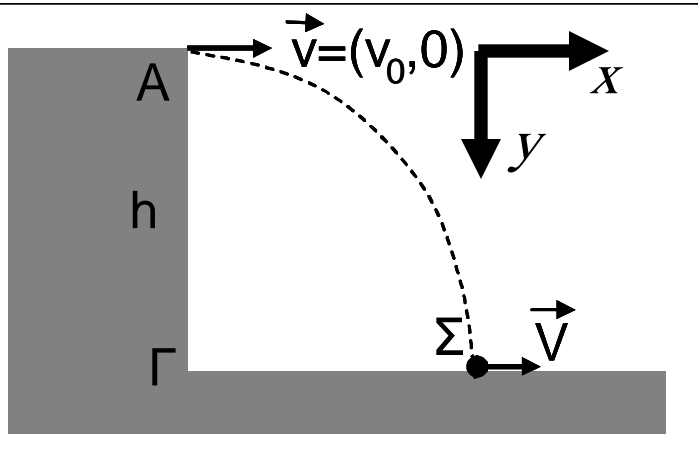
$P = 4mb^2 t$, που εξαρτάται μόνο από το b που εμφανίζεται στην z συνιστώσα της κίνησης.

Να βρεθεί η μαγνητική δύναμη \vec{F}_μ που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο Q που κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v_x \hat{x}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$. Να βρεθεί επίσης το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{F}_μ .

$$\text{Είναι } \vec{F}_\mu = Q(\vec{v} \times \vec{B}) = v_x Q (B_y \hat{z} - B_z \hat{y}).$$

$$\text{Άρα } \hat{F}_\mu = \frac{1}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} (B_y \hat{z} - B_z \hat{y}).$$

Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v} = (v_0, 0)$ με σκοπό να πετύχει στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\vec{V} = (v_1, 0)$ οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα ($t = 0$) από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα, που θεωρούμε ότι επενεργεί μόνο στην σφαίρα, είναι ανάλογη της ταχύτητας: $-k\vec{v}$ ($k > 0$). α) Γράψτε την διανυσματική εξίσωση κίνησης για την σφαίρα. β) Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου.



α) Η εξίσωση κίνησης είναι $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + m\vec{g}$, ή

$$dv_x/dt = -kv_x/m, \quad dv_y/dt = g - kv_y/m.$$

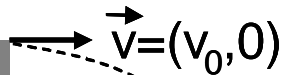
β) Είναι $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x \Rightarrow \int_{v_0}^{v_x} \frac{dv'_x}{v'_x} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt' \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_x = v_0 \exp(-kt/m)$$

Είναι ακόμη $\frac{dv_y}{g - kv_y/m} = dt \Rightarrow \int_0^{v_y} \frac{dv'_y}{g - kv'_y/m} = \int_0^t dt' \Rightarrow v_y = \frac{mg}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) \right]$

γ) Βρείτε τα $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας (θεωρώντας το σημείο Α ως την αρχή των αξόνων). δ) Γράψτε τις σχέσεις που υπακούουν τα $x(t)$ και $y(t)$ υποθέτοντας ότι η σφαίρα συναντά τον στόχο κάποια χρονική στιγμή t_0 . ε) Στην περίπτωση που

ισχύει το δ) δείξτε ότι η σφαίρα πετυχαίνει τον στόχο σε χρόνο $t_0 = \frac{kh}{mg(1 - v_1/v_0)}$.



γ) Χρειάζεται να ολοκληρώσουμε ακόμη μια φορά :

$$x(t) = \int_0^t v_x dt' = v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{kt'}{m}\right) dt' = -\frac{mv_0}{k} \left[\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) - 1 \right] = \frac{mv_0}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) \right]$$

$$\text{Ακόμη } y(t) = \int_0^t v_y dt' = \frac{mg}{k} \int_0^t \left[1 - \exp\left(-\frac{kt'}{m}\right) \right] dt' = \frac{mgt}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) \right].$$

δ - ε) Η σφαίρα θα βρει τον στόχο αν υπάρχει χρόνος t_0 ώστε $x(t_0) = v_1 t_0$, $y(t_0) = h \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{mgt_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt_0}{m}} \right) = h, \quad \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt_0}{m}} \right) = v_1 t_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \left(\frac{mg}{k} - \frac{g v_1 m}{v_0 k} \right) t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{kh}{mg(1 - v_1/v_0)}$$

Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy . Το επίπεδο xy είναι λεία οριζόντια επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(0,0)$ και έχει ταχύτητα \vec{v}_0 η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x . Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μια δύναμη τριβής $-mkv_y \hat{y}$, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής. (α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σώματος; (β) Βρείτε την ταχύτητά ως συνάρτηση του χρόνου. (γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy ; (δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m στην τροχιά;

α) Η εξίσωση κίνησης είναι $m d\vec{v}/dt = -mkv_y \hat{y} \Rightarrow$

$$dv_x/dt = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad dv_y/dt = -kv_y \quad (2).$$

β) Ολοκληρώνοντας $v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ (3) και $\ln v_y - \ln\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}\right) = -kt \Rightarrow v_y = \frac{v_0 e^{-kt}}{\sqrt{2}}$ (4).

Για να βρούμε την τροχιά πρέπει να ολοκληρώσουμε τις (3) και (4).

(γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy ,

(δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m στην τροχιά;

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (3) \quad \text{και} \quad v_y = \frac{v_0 e^{-kt}}{\sqrt{2}} \quad (4).$$

$$\gamma) \text{ Από την (3) } v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \text{ βρίσκουμε } x = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}} \quad (5).$$

$$\text{Από την (4) παίρνουμε: } y = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \int_0^t e^{-kt'} dt' = \frac{v_0}{k\sqrt{2}} (1 - e^{-kt}) \quad (6).$$

Αντικαθιστώντας από την (5) στην (6) βρίσκουμε τελικά

$$\text{την εξίσωση της τροχιάς } y = \frac{v_0 \sqrt{2}}{2k} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{2}kx/v_0\right) \right] \quad (7).$$

$$\delta) \text{ Θέτοντας } \frac{dy}{dt} = 0 \text{ βρίσκουμε } \tau \rightarrow \infty$$

$$\text{και αντικαθιστώντας στην (6) παίρνουμε } y_{\max} = \frac{v_0}{k\sqrt{2}}.$$