ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2022-23
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Κ. Φαράκος, Ι. Ράπτης

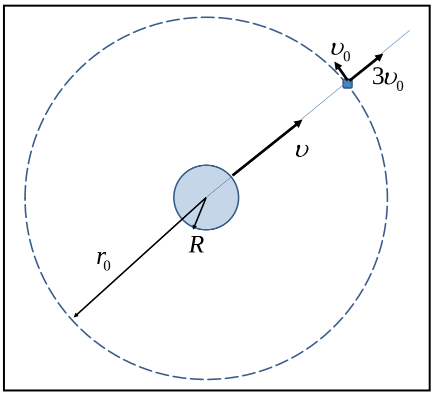
Δ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 28/12/2022

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 21/1/23, οι 1, 2, 3, 4, 5.
[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και να αναρτηθούν, ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF στις Εργασίες του Helios]

1. Ράβδος ΟΑ μήκους l είναι ακίνητη πάνω σε τραχειά οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ μεταξύ της ράβδου και της οριζόντιας επιφάνειας. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα, $\lambda = \kappa(2l - r)$ όπου r η απόσταση από το άκρο Ο της ράβδου και $\kappa>0$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ε που διέρχεται από το άκρο της Ο. (α) Να βρείτε την μάζα m_ρ της ράβδου (συναρτήσει των (κ, l), την απόσταση του Κέντρου Μάζας της ράβδρου από το Ο, και την ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κατακόρυφο άξονα ε που διέρχεται από το άκρο της Ο. (β) Μπάλα του γκολφ μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_0 και κτυπάει την ράβδο κάθετα στο μέσον της. Εάν η κρούση είναι ελαστική να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. (γ) Να βρείτε την στροφορμή της ράβδου συναρτήσει του χρόνου.

2. Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας Μ και ακτίνας R, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Στην περιφέρεια της πλατφόρμας, που ακινητεί, στέκεται άνθρωπος μάζας m ο οποίος, τη χρονική στιγμή $t = 0$, εκτοξεύει μάζα m_0 εφαπτομενικά προς την περιφέρεια, με ταχύτητα υ_0, ως προς τον ίδιο. (α) Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα αρχίσει να περιστρέφεται, και υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0. (β) Μόλις η πλατφόρμα συμπληρώσει ένα τέταρτο του κύκλου, ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά προς το κέντρο της πλατφόρμας (κατά μήκος μίας ακτίνας) με ταχύτητα υ και σταματά σε απόσταση R/2 από το κέντρο. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος Πλατφόρμα-Άνθρωπος για το χρονικό διάστημα που ο άνθρωπος μετακινείται. (γ) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, από τη στιγμή που ο άνθρωπος σταματά και έπειτα.

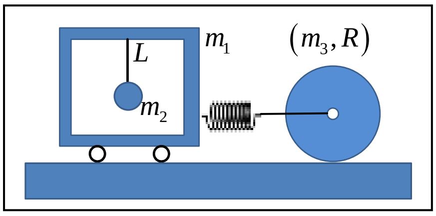
3. Ένας μετεωρολογικός δορυφόρος μάζας m κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_0}$ σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρο από τη γη. Τα μετρητικά συστήματα του δορυφόρου έχουν καταστραφεί και η NASA θέλει να απαλλαγεί από τον δορυφόρο στέλνοντάς τον στο διάστημα μακριά από την γήινη ατμόσφαιρα και εκτός του πεδίου βαρύτητας της γης. Για τον σκοπό αυτό εκτοξεύεται ακτινικά ένα βλήμα μάζας m με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$, συγκρούεται με τον δορυφόρο με ταχύτητα $3\boldsymbol{\upsilon_0}$ και ενσωματώνεται με αυτόν δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα μάζας $M=2m$.



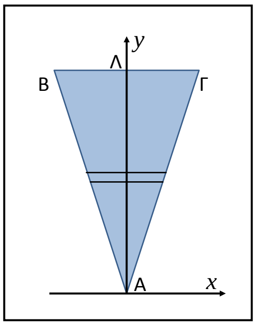
α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή L του συσσωματώματος ως προς το κέντρο της γης διατηρείται και υπολογίστε την τιμή της.
β) Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να αποδείξετε ότι η ολική ενέργεια του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση : $E = \frac{1}{2}M(dr/dt)^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r)$
Περιγράψτε ποιοτικά τις δυνατές κινήσεις του συσσωματώματος.
γ) Είναι αρκετή η ταχύτητα $3\boldsymbol{\upsilon_0}$ του βλήματος ώστε το συσσωμάτωμα να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της

γης; Σε αυτή την περίπτωση τί ταχύτητα θα έχει σε άπειρη – πολύ μεγάλη απόσταση από την γη;
δ) Για να ακολουθήσει το συσσωμάτωμα παραβολική τροχιά (Ε=0) πόση θα έπρεπε να είναι η αρχική ταχύτητα ***v*** του βλήματος;
Θεωρήστε ότι η γη είναι σφαιρική και έχει μάζα M_Γ.

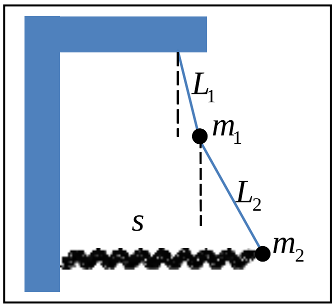
4. Μία λεπτή τετράγωνη πόρτα με μάζα Μ και πλευρά a μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα ΑΒ που συμπίπτει με μία από τις πλευρές της. Αρχικά η πόρτα είναι ανοιχτή και σχηματίζει γωνία 90^o με τον τοίχο. Μία μπάλα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα V και συγκρούεται κάθετα με την πόρτα σε απόσταση a/2 από τον άξονα ΑΒ. Η κρούση είναι ελαστική.
(α) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα ΑΒ.
(β) Ποιες ποσότητες διατηρούνται κατά την ελαστική κρούση της μπάλας με την πόρτα?
(γ) Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα από την στιγμή σύγκρουσης με την μπάλα?



5. Όχημα μάζας m_1 ευρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, επί του οποίου μπορεί να ***κινείται χωρίς τριβές***, έχει αναρτημένο στην οροφή του εκκρεμές (m_2, L), και είναι συνδεδεμένο, μέσω ελατηρίου με σταθερά σκληρότητας s, με ομοιογενή κύλινδρο, μάζας m_3 και ακτίνας R, ο οποίος μπορεί να ***κυλάει χωρίς ολίσθηση*** στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το όχημα, όπως στο σχήμα [Ροπή αδράνειας κυλίνδρου, $\mathrm{I} = mR^2/2$].
(α) Υποθέτοντας μικρή οριζόντια διαταραχή του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας (έτσι ώστε ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς ολίσθηση και το εκκρεμές να διαγράφει μικρές γωνίες, $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$), να γράψετε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης για τις μετατοπίσεις x_1, x_2, x_3 του κάθε σώματος, αντίστοιχα, από τη θέση ισορροπίας.
(β) Υποθέτοντας Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης, $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$, $x_3 = \Gamma\cos(\omega t + \varphi)$ να παράγετε τη συνθήκη επιλυσιμότητας του συστήματος.
(γ) Να υπολογίσετε τις συχνότητες των Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, αν ισχύει $m_1 = m_2 = m = 3m_3/2$, $\quad s/m = \omega_0^2 = g/L$, όπου g: η επιτάχυνση της βαρύτητας.

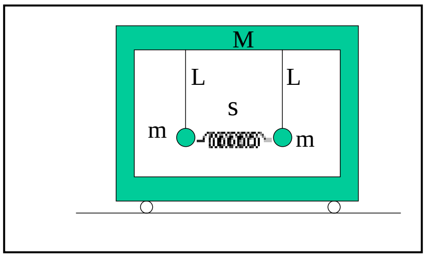


6. **(α)** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας $I_A = I_A(M, \beta, \upsilon)$ λεπτού ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο που διέρχεται από την κορυφή Α, αν είναι γνωστή η μάζα του M, η βάση του ΒΓ=β και το ύψος του ΑΛ=υ. **(β)** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ίδιου τριγώνου, $I_K = I_K(M, \beta, \upsilon)$ ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ. **(γ)** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ίδιου τριγώνου, $I_\Lambda = I_\Lambda(M, \beta, \upsilon)$ ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο, που διέρχεται από το μέσο Λ της βάσης του.



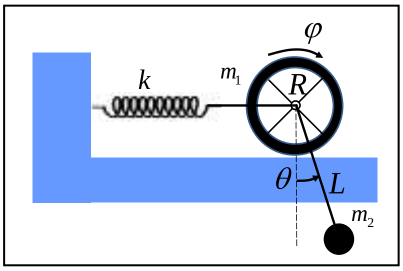
7. Δύο ιδανικά εκκρεμή με μάζες m_1, m_2, και αβαρείς ράβδους μηκών L_1, L_2 αναρτώνται το ένα κάτω από το άλλο, και το δεύτερο συνδέεται με ακλόνητο τοίχωμα μέσω ελατηρίου σταθεράς s. Σε κατάσταση ισορροπίας, οι ράβδοι είναι κατακόρυφοι και το ελατήριο οριζόντιο, έχοντας το φυσικό του μήκος, ενώ το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας, με επιτάχυνση g.

Διαταράσσουμε το σύστημα, έτσι ώστε να έχουμε μικρές γωνιακές αποκλίσεις του κάθε εκκρεμούς από την κατακόρυφο, (τέτοιες ώστε $\sin\theta_{1,2} \approx \tan\theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$), και όλο το σύστημα να βρίσκετα πάντα στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.
(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις των μαζών από την κατάσταση ισορροπίας τους σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις μικρών γωνιών.
(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ), να υπολογιστούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0, όταν $L_1 = L_2 = L$, $m_1 = m_2 = m$, και $(s/m) = (g/L) = \omega_0^2$.



8. Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας m και μήκους L, το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας M, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας g, και τα δύο εκκρεμή συνδέονται με ελατήριο σταθεράς s. Τα δύο εκκρεμή εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν μικρές ταλαντώσεις, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (m, m, M). (β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ: κοινή συχνότητα και φάση, διαφορετικά πλάτη) και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. (γ) Επιλύστε τη χαρακτηριστική εξίσωση, για την περίπτωση m=M, $(g/L) = (s/m) = \omega_0^2$, και προσδιορίστε τις συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0.

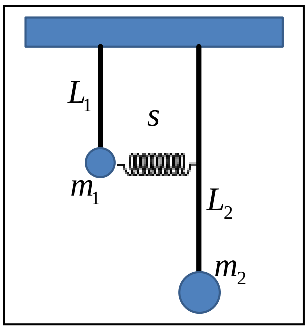
9. Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά μήκος της κατεύθυνσης-x υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας: $U(x) = Axe^{-\alpha x^2}$.
(α) Να εκτιμηθούν οι διαστάσεις (μονάδες) των θετικών σταθερών A και α.
(β) Να προσδιορισθούν τα σημεία ισορροπίας και το είδος ισορροπίας (ευσταθής/ασταθής)
(γ) Να προσδιορισθεί το σημείο μηδενισμού, x_0, της δυναμικής ενέργειας και η απόλυτη τιμή και η φορά της δύναμης στο ίδιο σημείο.
(δ) Να προσδιορισθεί το τετράγωνο της συχνότητας μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και η απόλυτη τιμή της ταχύτητας πάνω από την οποία αν αφεθεί το σωματίδιο, από το ίδιο σημείο, θα κινηθεί προς το άπειρο, χωρίς επιστροφή, ανεξάρτητα από τη φορά αυτής της ταχύτητας



10. Λεπτότοιχος κύλινδρος μάζας m_1 και ακτίνας R είναι συνδεδεμένος, μέσω ελατηρίου σταθεράς k, με ακλόνητο σημείο. Από τον άξονα του κυλίνδρου είναι αναρτημένο εκκρεμές μάζας m_2 και μήκους αβαρούς νήματος L. Διαταράσσουμε το σύστημα ώστε οι διαγραφόμενες γωνίες του νήματος, ως προς την κατακόρυφο, να είναι μικρές, $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$, και ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο $(x_1 = R\varphi)$.

(Ροπή αδράνειας του λεπτότοιχου κυλίνδρου, περί τον άξονα συμμετρίας του: $I = m_1R^2$).
(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των σωμάτων m_1 και m_2, από τις θέσεις ισορροπίας τους.
(β) Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t + \phi)$ και να υπολογιστούν οι συχνότητες ω_1, ω_2 των ΚΤΤ συναρτήσει του ω_0 στην περίπτωση που $m_2 = 2m_1 = m$ και $k/m = g/L = \omega_0^2$.

[Υπόδειξη: Προς αποφυγή λαθών, ονομάστε $F_{\tau\rho}$ την δύναμη της τριβής και T την τάση του νήματος]

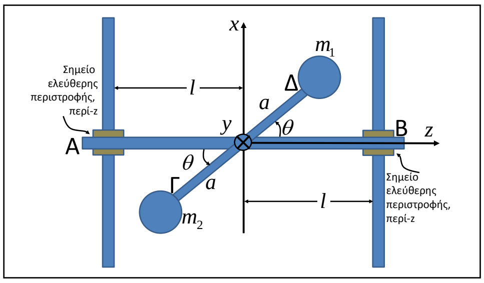


11. Δύο ιδανικά εκκρεμή αποτελούνται από σημειακές μάζες m_1, m_2, και από αβαρείς ράβδους με μήκη L_1, L_2, αντίστοιχα. Τα δύο εκκρεμή είναι αναρτημένα από ακλόνητα σημεία μέσα σε κατακόρυφο ομοιογενές βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση g, και συνδέονται μεταξύ τους, όπως στο σχήμα, με ελατήριο το οποίο έχει σταθερά σκληρότητας s και φυσικό μήκος ίσο με την απόσταση των δύο σημείων ανάρτησης των εκκρεμών. Διαταράσσουμε το σύστημα έτσι ώστε τα δύο εκκρεμή να εκτελούν ταλαντώσεις μικρών γωνιών, $(\sin\theta_1 \approx \theta_1, \sin\theta_2 \approx \theta_2)$, στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

(α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για το κάθε εκκρεμές,

(β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κανονικές ταλαντώσεις της μορφής $x_1 = A\sin(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\sin(\omega t + \varphi)$, αντικαταστήστε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του ερωτήματος-α, και γράψτε τις εξισώσεις που ικανοποιούν τα πλάτη A και B.

(γ) Υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, ω_1^2, ω_2^2, συναρτήσει του ω_0^2, αν $L_2 = 2L_1$, $m_2 = m_1/2$ και $g/L_1 = s/m_1 = \omega_0^2$. [Υπόδειξη: Μπορείτε να ξεκινήσετε με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης κάθε εκκρεμούς περί το σημείο ανάρτησής του]



12. Δύο ράβδοι, ΑΒ (μήκους $2l$) και ΓΔ (μήκους 2α), με αμελητέα μάζα, είναι συνδεδεμένοι ακλόνητα, υπό σταθερή γωνία θ. Η ράβδος ΑΒ διέρχεται από σημεία ελεύθερης περιστροφής περί τον άξονά της, που συμπίπτει με τον άξονα-z. Στα άκρα της ράβδου ΓΔ είναι στηριγμένες σημειακές μάζες $m_1 = m_2 = m$. Το σύστημα περιστρέφεται περί τον άξονα-z με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.

(α) Να υπολογισθεί η στροφορμή του συστήματος, ως προς την αρχή του (x,y,z),

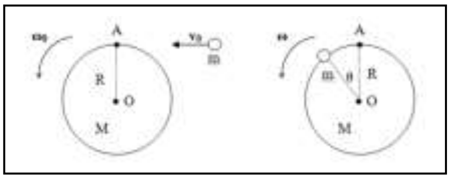
(β) Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της είναι $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε κάθε μάζα, αν το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.

13. Ενας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης R και ύψος H. Αποτελείται από υλικό του οποίου η πυκνότητα μεταβάλλεται με την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου σύμφωνα με τη σχέση $\rho=\rho_0(1-r/R)$, όπου ρ_o είναι θετική σταθερά.

α) Να υπολογισθεί η μάζα M του κυλίνδρου

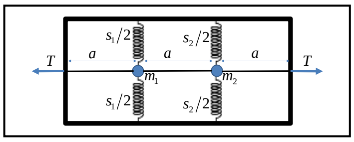
β) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα του, συναρτήσει της μάζας M και της ακτίνας R.



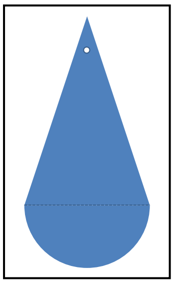
γ) Θεωρήστε ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται χωρίς τριβές περί σταθερό οριζόντιο άξονα που ταυτίζεται με τον άξονά του, με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega_0}$. Τη χρονική στιγμή t=0, μια μικρή μάζα m με ταχύτητα $\mathbf{v_0}$ κτυπάει και κολλάει στην άκρη του κυλίνδρου, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μόλις κολλήσει η μάζα στον κύλινδρο.

δ) Χρησιμοποιήστε τη σχέση d**L**/dt=**N** για να υπολογίσετε το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας $\omega'^2(\theta)$ όταν το σύστημα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, μετά την κρούση.

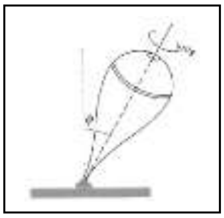
ε) Πόση δύναμη F ασκείται στη μάζα m από την «κόλληση», καθώς το σύστημα περιστρέφεται, για γωνία θ στο διάστημα (0, π/2



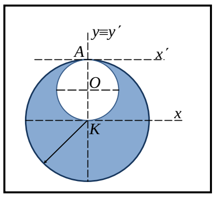
14. Ιδανική χορδή αμελητέας μάζας και μήκους $L = 3a$, έχει ακλόνητα άκρα, τείνεται με τάση T και φέρει δύο σωματίδια μάζας m_1 και m_2, σε απόσταση a μεταξύ τους και από τα άκρα της. Κάθε σωματίδιο είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια, με σταθερές $s_1/2$ και $s_2/2$, αντίστοιχα, κάθετα στη χορδή, έτσι ώστε τα ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση ισορροπίας. Το πλαίσιο στήριξης της χορδής και των ελατηρίων είναι ακλόνητο και το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας. Διαταράσσουμε τα σωματίδια από την κατάσταση ισορροπίας, κάθετα στην χορδή, ώστε οι διαγραφόμενες γωνίες του νήματος να είναι μικρές, $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$, και το σύστημα να διατηρείται στο αρχικό του επίπεδο. **(α)** Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των σωματιδίων από τις θέσεις ισορροπίας τους. **(β)** Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t + \phi)$ και να υπολογιστούν οι συχνότητες, ω_1, ω_2 των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0, στην περίπτωση που $m_1 = m_2$, $s_1 = s_2$, $T/(ma) = s/m = \omega_0^2$. **(γ)** Να υπολογιστούν οι λόγοι των πλατών A_1/B_1 και A_2/B_2 και οι κανονικές συντεταγμένες.



15. Μεγάλο ρολόι του τοίχου διαθέτει φυσικό εκκρεμές το οποίο αποτελείται από πλάκα σχήματος τριγώνου με βάση μήκους 2R και ύψος 3R, στη βάση του οποίου είναι προσαρτημένη ημικυκλική πλάκα ακτίνας R (βλ. σχήμα). Το συνολικό εκκρεμές έχει μάζα Μ και διαθέτει μικρή τρύπα (αμελητέων διαστάσεων), που βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του σχήματος και απέχει απόσταση R/2 από την κορυφή του τριγώνου. (α) Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας του φυσικού εκκρεμούς. (β) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του φυσικού εκκρεμούς, ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του φυσικού εκκρεμούς, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. (γ) Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς, περί άξονα που διέρχεται από την τρύπα, κάθετα προς αυτό.

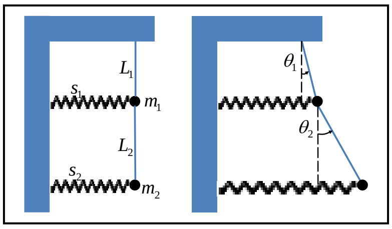


16. Μια σβούρα μάζας M περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_s περί τον άξονά της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ροπή αδρανείας της σβούρας περί τον άξονα περιστροφής είναι I_0 και το κέντρο μάζας της σβούρας βρίσκεται σε απόσταση l από το σημείο στήριξής της. Ο άξονας έχει κλίση φ ως προς την κατακόρυφο και η σβούρα εκτελεί ομοιόμορφη μετάπτωση. Η βαρύτητα έχει κατεύθυνση προς τα κάτω.
Η σβούρα βρίσκεται σε έναν ανελκυστήρα, και η κορυφή της συγκρατείται στο δάπεδο του ανελκυστήρα με μια άρθρωση χωρίς τριβή. Να βρείτε το ρυθμό μετάπτωσης, Ω, σημειώνοντας με σαφήνεια την κατεύθυνσή της, σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις:
(α) Ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος
(β) ο ανελκυστήρας επιταχύνει προς τα κάτω με ρυθμό $2g$.



17. Κυκλικός δίσκος αμελητέου πάχους και ακτίνας R, φέρει κυκλική οπή ακτίνας R/2, της οποίας το κέντρο βρίσκεται σε απόσταση R/2 από το κέντρο του κυκλικού δίσκου. (α) Αν η μάζα του τρύπιου δίσκου είναι Μ, να υπολογιστεί η θέση του κέντρου μάζας του δίσκου και και η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στο δίσκο που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. (β) Αν ο δίσκος αναρτηθεί από το σημείο Α και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου που διέρχεται από το Α, να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων μικρού πλάτους, μέσα σε ομοιογενές πεδίο βαρύτητας (g).

18 . Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας Μ και ακτίνας R, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Άνθρωπος μάζας m, βρίσκεται πάνω στην πλατφόρμα σε απόσταση $r_0\left(<R\right)$. (α) Κάποια στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να κινείται διαγράφοντας κύκλο ομόκεντρο με την πλατφόρμα, με ακτίνα $r_0(<R)$. Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα περιστρέφεται, προσδιορίστε την φορά περιστροφής, σε σχέση με τη φορά κίνησης του ανθρώπου, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα περιστροφής ω της πλατφόρμας, αν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του ανθρώπου, ως προς την πλατφόρμα, είναι υ_R. (β) Ως προς το, μη-αδρανειακό, σύστημα αναφοράς της πλατφόρμας, υπολογίστε τις ψευδοδυνάμεις που αισθάνεται ο άνθρωπος, παράλληλα προς την επιφάνεια της πλατφόρμας,. (γ) Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα της πλατφόρμας, και ως προς το αδρανειακό σύστημα του δαπέδου. (ε) Αν ο συντελεστής τριβής πλατφόρμας-κινητού είναι μ, υπολογίστε την μέγιστη ταχύτητα υ, που μπορεί να αναπτύξει ο άνθρωπος, χωρίς να αρχίσει να γλιστράει πάνω στην πλατφόρμα.



19. Δύο ιδανικά εκκρεμή με μάζες m_1, m_2, και αβαρείς ράβδους μηκών L_1, L_2 αναρτώνται το ένα κάτω από το άλλο, και συνδέονται με ακλόνητο τοίχωμα μέσω ελατηρίων με σταθερές s_1, s_2, όπως στο Σχήμα **. Σε** κατάσταση ισορροπίας, οι ράβδοι είναι κατακόρυφοι και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, ενώ το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας, με επιτάχυνση *g*.
Διαταράσσουμε το σύστημα, έτσι ώστε να έχουμε μικρές γωνιακές αποκλίσεις του κάθε εκκρεμούς από την κατακόρυφο, (τέτοιες ώστε $\sin\theta_{1,2} \approx \tan\theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$), και όλο το σύστημα να βρίσκετα πάντα στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.
(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις των μαζών από την κατάσταση ισορροπίας τους σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις μικρών γωνιών.
(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ), να υπολογιστούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0, όταν $s_1 = s_2 = s$, $L_1 = L_2 = L$, $m_1 = m_2 = m$, και $\left(s/m\right) = \left(g/L\right) = \omega_0^2$.

20. Μία κατακόρυφη χοάνη φόρτωσης μεταλλεύματος τροφοδοτεί, με παροχή υλικού $dm/dt = \mu$, μία οριζόντια ταινία μεταφοράς που βρίσκεται κάτω από τη χοάνη, και κυλίεται, με σταθερή ταχύτητα υ, σε ένα σύστημα κυλίνδρων χωρίς τριβή, με τη βοήθεια εξωτερικής δύναμης $F_{\varepsilon\xi\omega\tau}$, που ασκείται στην ταινία από έναν κινητήρα. (α) Υπολογίστε τη δύναμη τριβής που ασκεί ο ιμάντας στο υλικό που επικάθεται πάνω του, (β) Υπολογίστε τη δύναμη $F_{\varepsilon\xi\omega\tau}$ που ασκεί ο κινητήρας στον ιμάντα. (γ) Υπολογίστε την ισχύ που πρέπει να προσφέρει ο κινητήρας στον ιμάντα. (δ) Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του υλικού που εναποτίθεται πάνω στον ιμάντα, λόγω της οριζόντιας κίνησής του. (ε) Συγκρίνεται τις απαντήσεις των ερωτημάτων (γ) και (δ) και σχολιάστε.

21. Δυο πίθηκοι Α και Β είναι κρεμασμένοι από τα δυο άκρα ενός σχοινιού, που περνάει από μια τροχαλία ακτίνας R. Οι πίθηκοι βρίσκονται σε ίση απόσατση L από την τροχαλία. Οι μάζες του σχοινιού και της τροχαλίας είναι αμελητέες. Οι πίθηκοι έχουν την ίδια μάζα, είναι αρχικά ακίνητοι και αρχίζουν ταυτόχρονα να αναρριχώνται με ταχύτητες **v** και **3v,** αντίστοιχα, ως προς το σχοινί. Εξετάζοντας την ολική στροφορμή των δυο πιθήκων ως προς το κέντρο της τροχαλίας βρείτε τις ταχύτητές τους ως προς αυτήν. Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται ο καθένας για να φτάσει στην τροχαλία.

22. Η γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) μιας λεπτής ράβδου *AB* μήκους *L*, δίνεται από τη σχέση $\lambda(x) = \frac{2m}{L}\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{L}\right)$, όπου x η απόσταση από το κέντρο *O* της ράβδου.

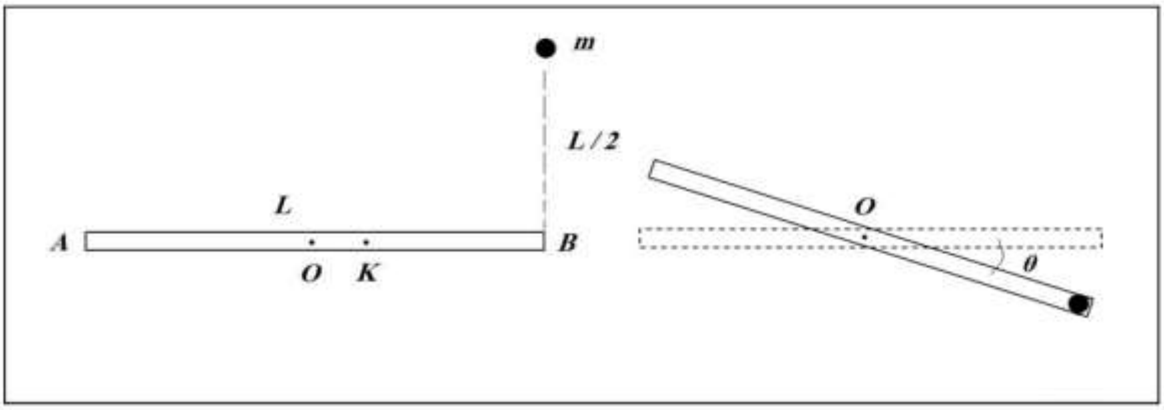
(α) Να υπολογίσετε τη μάζα *M* της ράβδου, την απόσταση του κέντρου μάζας *K* της ράβδου από το *O*, καθώς και τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το *O*.

Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της *O* και είναι κάθετος σε αυτήν. Μια σημειακή μάζα *m* βρίσκεται αρχικά ακίνητη σε ύψος *L/2* πάνω από το άκρο B της ράβδου και αφήνεται ελεύθερη να πέσει με μηδενική αρχική ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή $t=0$, η ράβδος είναι στιγμιαία ακίνητη σε οριζόντια θέση και η μάζα συγκρούεται πλαστικά με το άκρο *B* της ράβδου στο οποίο και σφηνώνεται.

(β) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα ω_0 του συστήματος ράβδου και σημειακής μάζας αμέσως μετά την κρούση.

(γ) Δείξτε ότι κατά την κρούση η μισή κινητική ενέργεια της *m* μετατρέπεται σε θερμότητα.

(δ) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου και σημειακής μάζας κατά την κίνηση που θα επακολουθήσει, ως συνάρτηση της γωνίας θ περιστροφής του συστήματος.



23. Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακόρυφα στο πεδίο βαρύτητας. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σταγόνας, η ακτίνα της r αυξάνει με ρυθμό $dr/dt = \lambda r$, όπου λ είναι μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι α και η αρχική της μάζα m_o.

α) Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής της μάζας *dm/dt* καθώς και τη μάζα *m* της σταγόνας ως συνάρτηση του χρόνου *t*.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου και δείξετε ότι τείνει προς μια οριακή τιμή ίση με $g/3\lambda$.

24. Μια μπάλα μπιλιάρδου έχει μάζα Μ και ακτίνα R. O συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ μπάλας και τσόχας είναι η. Η στέκα κτυπά τη μπάλα ώστε το Κ.Μ. της να αποκτήσει ταχύτητα v_0 (η διεύθυνση της δύναμης που προκαλεί την κίνηση περνά από το Κ.Μ της μπάλας). Τριβή κύλισης δεν υπάρχει. Να βρεθούν α) η γωνιακή και η γραμμική επιτάχυνση της μπάλας αμέσως μετά το κτύπημα και β) ο χρόνος και το διάστημα μέχρι η μπάλα να σταματήσει να ολισθαίνει, δηλαδή να αποκτήσει καθαρή κύλιση (ροπή αδρανείας σφαίρας ως προς το κέντρο της $I=(2/5)MR^2$.

25. Αλυσίδα μάζας *m* και μήκους *l* βρίσκεται σωριασμένη στο χείλος ενός τραπεζιού. Με μία μικρή ώθηση το ένα άκρο της αλυσίδας αρχίζει να πέφτει. Το κάθε τμήμα εγκαταλείπει το τραπέζι με ταχύτητα μηδέν αλλά μόλις βρεθεί στο κενό αποκτά την ταχύτητα της αλυσίδας που είναι ήδη σε κίνηση. (α) Πόση είναι η ταχύτητα της αλυσίδας όταν είναι στο κενό μήκος της ίσο με *x*; (β) Όταν βρεθεί στο κενό ολόκληρη η αλυσίδα τι ποσοστό από την αρχική δυναμική ενέργεια έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια;

26. Δίνεται κυκλικός δίσκος ακτίνας R και μάζας M ομοιόμορφα κατανεμημένης. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 περί άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή t=0 η μάζα του δίσκου αρχίζει να αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο με ρυθμό $a = dM/dt$, π.χ. λόγω βροχής που πέφτει ομοιόμορφα και κάθετα στο επίπεδο του δίσκου με αμελητέα ταχύτητα. Να διατυπωθεί και να λυθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου και να βρεθεί έτσι η γωνιακή του ταχύτητα ω(t).

27. Θεωρήστε ότι στο διάστημα, μακριά από κάθε βαρυτική επίδραση ηρεμεί ένα σύστημα από δύο ρουκέτες με μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$ συνδεδεμένες με μία αβαρή ράβδο μήκους L. Τη χρονική στιγμή t = 0 οι ρουκέτες μπαίνουν σε λειτουργία και δημιουργούν δύναμη ώθησης F ίσου μέτρου, κάθετα στη ράβδο, αλλά αντίθετης φοράς για χρονικό διάστημα T.
(α) Βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας (ΚΜ) του συστήματος και τη ροπή αδράνειας γύρω από αυτό. (β) Βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας. (γ) Περιγράψτε την κίνηση που θα εκτελέσει το σύστημα. (δ) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τη χρονική στιγμή T.