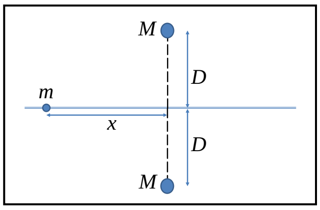
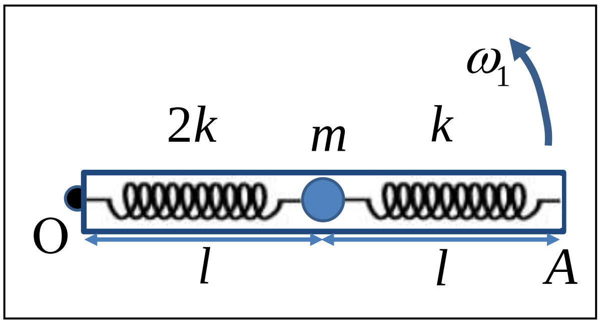
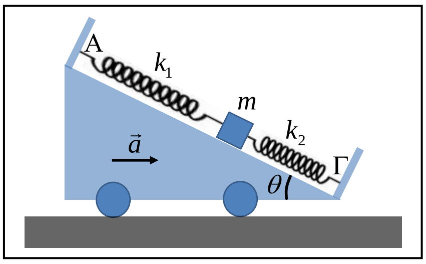
ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2022-23
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Κ. Φαράκος, Ι. Ράπτης
Γ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5 Δεκεμβρίου 2022
Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 21/12/22, οι 1, 2, 3, 4, 5, 6.
[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και να αναρτηθούν, ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF στις Εργασίες του Helios]



1. Μάζα m είναι περιορισμένη να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε ράβδο που συμπίπτει με τον άξονα-x. Δύο ίσες σημειακές μάζες M βρίσκονται στα σημεία $\left(x=0, y=\pm D\right)$ και κρατούνται ακλόνητες. Οι τρείς μάζες αλληλεπιδρούν βαρυτικά, και το σύστημα βρίσκεται μακριά από την επίδραση άλλων μαζών. Δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(r)=-\dfrac{GMm}{r}$ για το σύστημα δύο μαζών, M και m, σε απόσταση r.
(α) Υπολογίστε, ως συνάρτηση του x, τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U=U(x)$ της μάζας m, υπό την βαρυτική επίδραση των δύο άλλων μαζών M και σχεδιάστε προσεγγιστικά την $U=U(x)$.
(β) Δείξτε ότι το μέσον μεταξύ των δύο ακλόνητων μαζών M είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας για τη μάζα m και, για μικρές απομακρύνσεις από αυτό το σημείο, η μάζα m εκτελεί, με καλή προσέγγιση, αρμονική ταλάντωση της οποίας να υπολογισθεί η συχνότητα.
(γ) Αν η μάζα m αφεθεί σε πεπερασμένη απόσταση $x_0 = D\sqrt{3}$ από το μέσο των των δύο μαζών M, με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{4GM}{6D}}$, να δείξετε ότι θα εκτελέσει περιοδική κίνηση, να υπολογίσετε το εύρος $2x_{\max}$ αυτής της κίνησης, την ταχύτητα $\upsilon=\upsilon\left(x\right)$, ως συνάρτηση της θέσης, και να γράψετε το ολοκλήρωμα από το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η περίοδος αυτής της κίνησης.

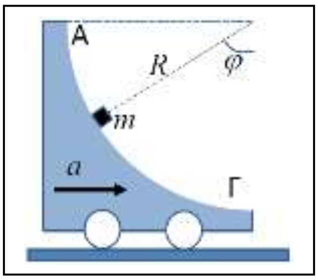


2. Οριζόντιος σωλήνας ΟΑ, μήκους $2l$, και εσωτερικά λείος, περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1, περί κατακόρυφο άξονα-z που διέρχεται από το άκρο του Ο. Στο εσωτερικό του σωλήνα είναι στερεωμένα σταθερά στα δύο άκρα του (Ο, Α) δύο ελατήρια με σταθερές $k_1=2k$ και $k_2=k$, και φυσικό μήκος l το καθένα. Στα ελεύθερα άκρα των δύο ελατηρίων είναι δεμένο σώμα μάζας m που ακινητεί ως προς τον σωλήνα, (το σχήμα αντιστοιχεί σε ακίνητο σωλήνα). Την χρονική στιγμή $t=0$ η γωνιακή ταχύτητα του σωλήνα γίνεται $\omega_2=\omega_1/2$. (α) Να γράψετε την διαφορική εξίσωση κίνησης της μάζας m, για $t>0$, ως προς παρατηρητή που περιστρέφεται μαζί με τον σωλήνα. (β) Να δείξετε ότι η μάζα m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ως προς το σωλήνα, και να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης (ως κλάσμα του l), την θέση ισορροπίας και την περίοδο της ταλάντωσης (συναρτήσει του ω_1), για $k = m\omega_1^2$ (γ) Να γράψετε την συνάρτηση που δίνει την θέση της μάζας m, συναρτήσει του χρόνου t, ως προς το σωλήνα. Δίδεται: $F_{Coriolis} = -2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R$, $F_{\varphi\upsilon\gamma} = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)$.



3. Σώμα μάζας m είναι τοποθετημένο πάνω στην λεία επικλινή πλευρά αμαξιδίου σχήματος τριγωνικής σφήνας, με γνωστή γωνία βάσης θ, όπως στο σχήμα. Η m είναι συνδεδεμένη με δύο ελατήρια με σταθερές $k_1=k$ και $k_2=2k$, τα άλλα άκρα των οποίων είναι στερεωμένα στα σταθερά σημεία Α και Γ. Τα δύο ελατήρια έχουν φυσικό μήκος L και η απόσταση ΑΓ είναι ίση με $2L$. Το αμαξίδιο αρχικά είναι ακίνητο και το σύστημα των δύο ελατηρίων είναι σε ισορροπία. Την χρονική στιγμή $t=0$ το αμαξίδιο επιταχύνεται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση a, όπου $a=g/2$. (α) Να γράψετε την διαφορική εξίσωση κίνησης της μάζας m ως προς παρατηρητή που βρίσκεται επάνω στο αμαξίδιο. (β) Να δείξετε ότι η μάζα m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την θέση ισορροπίας και την περίοδο της ταλάντωσης. (γ) Να γράψετε την συνάρτηση που δίνει την θέση της μάζας *m* επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ως συνάρτηση του χρόνου *t* και να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης εφαρμόζοντας κατάλληλα τις αρχικές συνθήκες.

4. Σώμα μάζας m μπορεί να κινείται κατά μήκος του θετικού άξονα-x, $\left(x>0\right)$, σε περιοχή στην οποία η συνάρτηση δυναμικής ενέργεια δίνεται από την έκφραση $U\left(x\right)=-\dfrac{Ax}{b^2+x^2}$ όπου (A,b) θετικές σταθερές. (α) Υπολογίστε τα σημεία ισορροπίας του σώματος και το είδος της ισορροπίας, και σχεδιάστε ένα ποιοτικό σκαρίφημα της $U\left(x\right)$ (β) Θεωρήστε ότι, ενώ το σώμα βρίσκεται στο σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, του προσδίδεται μία μικρή κινητική ενέργεια, σε σχέση με την απόλυτη τιμή της δυναμικής του ενέργειας, και δείξτε ότι το σώμα θα εκτελέσει, με καλή προσέγγιση, αρμονική ταλάντωση, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα ω_0 αυτής της ταλάντωσης. (γ) Όταν το σώμαν βρίσκεται στο σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, να υπολογίστε την κρίσιμη ταχύτητα $\upsilon_{0\kappa\rho}$ του σώματος, κάτω από την οποία το σώμα εκτελεί κίνηση πεπερασμένου πλάτους (είναι δέσμιο) και πάνω από την οποία το σώμα εκτελεί κίνηση άπειρου πλάτους (είναι ελεύθερο). (δ) Υπολογίστε τα σημεία αναστροφής της πορείας του σώματος, $\left(x_1,x_2\right)$ όταν αυτό αφεθεί στη θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας με ταχύτητα $\upsilon_0=\upsilon_{0\kappa\rho}/2$.



5. Το αμαξίδιο του σχήματος κινείται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση a. Μικρό σώμα μάζας m είναι πάνω στην τεταρτοκυκλική επιφάνεια ΑΓ του αμαξιδίου, ακτίνας R. (α) Βρείτε τη γωνία $\varphi=\varphi_0$,ώστε η μάζα m να είναι ακίνητη ως προς το αμαξίδιο, όταν η επιφάνεια είναι λεία. (β) Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ της μάζας και της επιφάνειας του αμαξιδίου είναι μ, βρείτε την μέγιστη επιτάχυνση a_{max} του αμαξιδίου ώστε η μάζα m να παραμένει ακίνητη πάνω στο αμαξίδιο, στη γωνία $\varphi=\varphi_0$ (που προκύπτει από το ερώτημα-α). (γ) Εάν το αμαξίδιο κινηθεί με επιτάχυνση $a_0=2a$, και η επιφάνεια είναι λεία, να βρείτε την επιτάχυνση που αποκτά η μάζα m ως προς το αμαξίδιο συναρτήσει της γωνίας φ και την δύναμη N που δέχεται η μάζα m από την επιφάνεια ΑΓ του αμαξιδίου.

6. Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r)=-U_0+U_0\left(1-e^{-a(r-r_0)}\right)^2$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και U_0 και a είναι θετικές σταθερές. Έστω ότι το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r=0$. **(α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$. **(β)** Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε για ποια r είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική. **(γ)** Το ελεύθερο άτομο βρίσκεται αρχικά στη θέση $r=3r_0/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει. **(δ)** Αν μπορούσαμε να συμπιέσουμε τα δύο άτομα, έτσι ώστε να πλησιάσουν σε απόσταση μικρότερη από την απόσταση ευσταθούς ισορροπίας τους, πόση πρέπει να γίνει η μεταξύ τους απόσταση ώστε, όταν αφεθούν ελεύθερα, να απομακρυνθούν με τρόπο ώστε να διασπασθεί το μόριο; $a>\ln 2/r_0$.

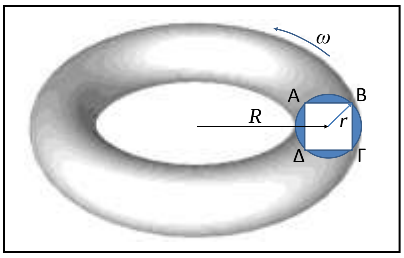
7. Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ακλόνητο στήριγμα με ελατήριο σταθεράς s και μηχανισμό που ασκεί τριβή της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho}=-r\vec{\upsilon}$, με r τέτοιο ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, οπότε η συνάρτηση της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας είναι της μορφής $x(t)=(A+Bt)e^{-\gamma t},(\gamma=r/2m)$, $\left(\gamma^2=\omega_0^2\equiv\dfrac{s}{m}\Rightarrow r=2\sqrt{sm}\right)$.

(α) Αν το σύστημα ξεκινά την κίνησή του την χρονική στιγμή $t=0$, με αρχική απομάκρυνση x_0 και αρχική ταχύτητα υ_0, υπολογίστε τις σταθερές *A* και *B*.

(β) Αν $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, δείξτε ότι το σύστημα <u>διέρχεται</u> από την θέση ισορροπίας μία μόνο φορά, υπολογίστε την αντίστοιχη χρονική στιγμή t_0, και την αντίστοιχη ταχύτητα διέλευσης.

(γ) Αν μεταβάλουμε τον συντελεστή τριβής σε νέα τιμή $r=\sqrt{sm}/2$, δείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με ασθενή απόσβεση και υπολογίστε τη συχνότητα αυτής της ταλάντωσης και τον συντελεστή ποιότητας *Q*.

8. Υπολογίστε τη Φυγόκεντρο «δύναμη» και τη «δύναμη» Coriolis, τις οποίες οφείλει να παραδεχτεί ένας παρατηρητής που βρίσκεται στη Γη, προκειμένου να εξηγήσει την δυναμική συμπεριφορά ενός αεροπλάνου το οποίο κινείται παράλληλα στην επιφάνεια της Γης, με ταχύτητα σταθερού μέτρου V, ως προς την επιφάνεια της Γης, στις παρακάτω περιπτώσεις: (α) κατά μήκος του Ισημερινού κύκλου, (β) κατά μήκος ενός μεσημβρινού κύκλου, ενώ διέρχεται πάνω από τον Ισημερινό κύκλο, (γ) κατά μήκος ενός μεσημβρινού κύκλου, ενώ βρίσκεται σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος 45^o, (δ) κατά μήκος ενός μεσημβρινού κύκλου, ενώ διέρχεται από το Βόρειο Πόλο, (ε) κατά μήκος ενός παραλλήλου που βρίσκεται σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος 45^o.



9. Διαστημικός Σταθμός (ΔΣ) έχει τη μορφή τόρου (κυλινδρικού δακτυλίου) μέσης ακτίνας *R*, ο ωφέλιμος χώρος του οποίου έχει τετραγωνική διατομή ΑΒΓΔ εγγεγραμμένη στην κυκλική διατομή του δακτυλίου ακτίνας *r*, όπως στο σχήμα. Ο Σταθμός περιστρέφεται αντι-ωρολογιακά, μακριά από άλλα σώματα, με γωνιακή ταχύτητα ω περί τον άξονα συμμετρίας του για την δημιουργία τεχνητού βαρυτικού πεδίου. **(α)** Προσδιορίστε ποιά πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι το «δάπεδο» και ποιά είναι η «οροφή» του διαδρόμου του Σταθμού, σε σχέση με το τεχνητό βαρυτικό πεδίο. **(β)** Βρείτε τη σχέση του *ω* με την επιτάχυνση της τεχνητής βαρύτητας, g_τ, στο κέντρο συμμετρίας του ΑΒΓΔ. **(γ)** Υπολογίστε το πηλίκο της τεχνητής βαρύτητας μεταξύ «οροφής» και «δαπέδου», στο μέσον του διαδρόμου. **(δ)** Υπολογίστε, διανυσματικά $\left(\hat{R},\hat{\varphi},\hat{z}\right)$, τις δυνάμεις που αισθάνεται ένας αστροναύτης, μάζας *m*, όταν «ανεβαίνει» κατά μήκος μίας «κατακόρυφης» σκάλας, από το «δάπεδο» προς την «οροφή», την ώρα που διέρχεται από το κέντρο του ΑΒΓΔ, με σχετική ταχύτητα (ως προς τον ΔΣ) ίση με υ_0. Ποιές δυνάμεις μεταβάλλονται όταν ο ΔΣ αλλάζει φορά περιστροφής; [Δεδομένα: R = 90 m, r = 10 m, $g_\tau = g_\Gamma/10 \approx 1$ m/s^2, υ_0 = 2m/s, m = 75 kg]

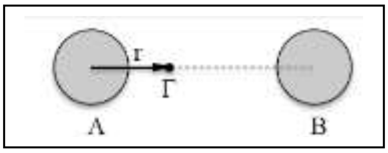
10. Σωματίδιο μάζας *m* μπορεί να κινηθεί σε 1-διάσταση (*x*) μέσα σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του οποίου είναι μηδέν παντού πλήν της περιοχής $-x_0\le x\le x_0$, εντός της οποίας έχει τη μορφή $U(x)=c\left(x_0^2-x^2\right),\quad c>0$.

(α) Σχεδιάστε την $U(x)$. Προσδιορίστε τα σημεία και το είδος ισορροπίας του πεδίου.

(β) Το σωματίδιο αφήνεται στη σημείο $x_1=-2x_0$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0=+\hat{x}\left(x_0\sqrt{2.2c/m}\right)$. Δείξτε ότι το σωματίδιο θα περάσει από το *x*=0, υπολογίστε την ταχύτητα διέλευσης, και μελετήστε την κίνηση του σωματιδίου στη συνέχεια.

(γ) Αν $U(x)=c\left(x^2-x_0^2\right),\quad c>0$, και τη στιγμή $t=0$ αφήσουμε το σωματίδιο στο σημείο $x_1=-2x_0$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0=+\hat{x}\left(x_0\sqrt{2c/m}\right)$, δείξτε ότι το σωματίδιο θα περάσει από το σημείο $x_2=+2x_0$ και υπολογίστε τη χρονική στιγμή και την ταχύτητα διέλευσης από αυτό το σημείο. $\left[\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arctan\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}\right]$.

11 Απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα *m* και σταθερά ελατηρίου *s*, διεγείρεται από μία δύναμη $F=F_0\sin(\omega t)$. α) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση $x=x(t)$, στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t=0)=0$ και $\dot{x}(t=0)=\upsilon_0$. β) Για συχνότητες διέγερσης κοντά στη συχνότητα $\omega_0=\sqrt{s/m}$, θεωρείστε ότι $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ (όπου $\Delta\omega$ μικρό και τέτοιο ώστε $\Delta\omega\ t<<1$). Αναπτύσσοντας τη λύση του ερωτήματος (α) γύρω από το ω_0, να δείξετε ότι το πλάτος της μετατόπιση αυξάνει γραμμικά με το χρόνο.



12. Δύο αφαιρικά σώματα Α και Β με μάζες M_A, $M_B=4M_A$ και ακτίνες $R_A=R_B$, βρίσκονται σε σταθερή απόσταση $R=9R_A$. Ένα σώμα Γ, μάζας m, και αμελητέων διαστάσεων, τοποθετείται σε απόσταση *r* από το κέντρο του σώματος Α, πάνω στην ευθεία που ορίζεται από τα κέντρα των δύο σωμάτων Α, Β.

(α) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια του σώματος Γ λόγω της βαρύτητας των δύο σωμάτων Α, Β, συναρτήσει του r. [Υπόδειξη: η βαρυτική δυναμική ενέργεια δύο σφαιρικών μαζών είναι $U_{12}=-G\frac{m_1m_2}{r_{12}}$, όπου r_{12} είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους].

(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας του ερωτήματος (α), για $R_A\le r\le R-R_B$. Υπάρχει σημείο ισορροπίας για το σώμα Γ; Αν ναι, εξετάστε την ευστάθειά του.

(γ) Πόση κινητική ενέργεια πρέπει να δοθεί στο σώμα Γ, αν βρεθεί στην επιφάνεια του σώματος Α ώστε να καταφέρει να φτάσει στην επιφάνεια του σώματος Β;

(d) Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του σώματος Γ, αν βρίσκεται στην επιφάνεια του σώματος Α και του δοθεί η μισή κινητική ενέργεια από αυτή που απαιτείται στο ερώτημα (γ).

13. Σωματίδιο μάζας *m* κινείται στο επίπεδο (x,y), υπό την επίδραση ενός δυναμικού πεδίου, για το οποίο η δύναμη έχει τη μορφή $\vec{F}(x,y)=-\hat{x}(Ax+By)-\hat{y}(Cx+Dy)$.

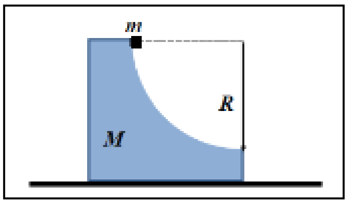
(α) Βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι (θετικές) σταθερές (A,B,C,D), (ή όσες εξ αυτών είναι απαραίτητο), προκειμένου η δύναμη $\vec{F}(x,y)$ να είναι διατηρητική.

Αν η δύναμη είναι διατηρητική:

(β) Να βρείτε το έργο που παράγεται από το δυναμικό αυτό πεδίο επί του σωματιδίου κατά την μετακίνησή του από το σημείο (-1,-1) ώς το σημείο (1,1) ακολουθώντας: **(β1)**. Την (ευθύγραμμη) διαδρομή (-1,-1)→(0,0)→(1,1), και **(β2)**. Την (ευθύγραμμη) διαδρομή (-1,-1)→(1,-1) ακολουθούμενη από την (ευθύγραμμη) διαδρομή (1,-1)→(1,1). Εξηγήστε!

(γ) Να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x,y)$, με δεδομένο ότι $U(0,0)=0$.

14. Σημειακή μάζα m αφήνεται στο ανώτατο σημείο μίας άλλης μάζας Μ η οποία φέρει μία κοίλη κυλινδρική επιφάνεια (τεταρτοκύκλιο ακτίνας R, όπως στο σχήμα) και μπορεί να



κινείται χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ και μεταξύ των μαζών m και M δεν υπάρχει τριβή. Το σύστημα βρίσκεται σε σταθερό κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση βαρύτητας g.
Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει η μάζα m στο κατώτατο σημείο του τεταρτοκυκλίου και να μελετηθούν οι οριακές περιπτώσεις, $M \to \infty$, $M \to 0$, $M = m$.

15. Σε περιοχή του διαστήματος υπάρχει ακίνητο ομογενές αέριο διαπλανητικής σκόνης. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μπαίνει μέσα στην περιοχή αυτή ένας μετεωρίτης. Εκείνη τη στιγμή ο μετεωρίτης έχει μάζα M_0 και κινείται με ταχύτητα υ_0. Ο μετεωρίτης αρχίζει να παρασύρει διαπλανητική σκόνη και να αυξάνει έτσι τη μάζα του με σταθερό ρυθμό $\frac{dm}{dt} = \lambda$ (υποτίθεται ότι η σκόνη που παρασύρεται από τον μετεωρίτη κινείται ανά πάσα χρονική στιγμή με την ταχύτητα υ που έχει αυτός εκείνη τη στιγμή). Επιπλέον, ο μετωρίτης υφίσταται δύναμη τριβής που είναι ίση κατά μέτρο με $k\upsilon$, όπου $k = \lambda$ είναι θετική σταθερά. **(α)** Βρείτε την ταχύτητα υ_1 που έχει ο μετεωρίτης όταν η μάζα του είναι ίση με $M_1 = 2M_0$ και τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία συμβαίνει αυτό. **(β)** Βρείτε το έργο της τριβής από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή t_1. Είναι αυτό το έργο ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετεωρίτης-σκόνη στο χρονικό διάστημα μεταξύ των στιγμών $t_0 = 0$ και t_1; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

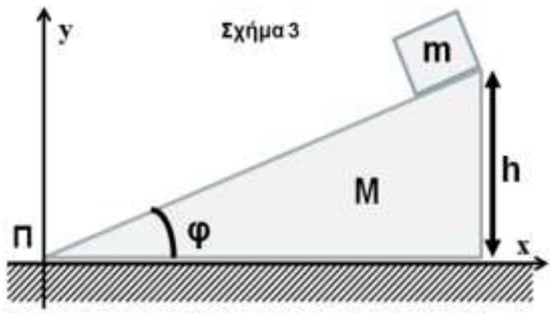
16. Οι συντεταγμένες ενός σώματος με μάζα *m*, που κινείται στο επίπεδο (x,y), είναι: $x = a \sin\omega t$, $y = b \cos\omega t$.
(α) Δείξτε ότι το σώμα διαγράφει ελλειπτική τροχιά και υπολογίστε τους ημιάξονες αυτής της έλλειψης
(β) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα και δείξτε ότι είναι κεντρική:
$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$
(γ) Προσθέστε την κινητική και τη δυναμική ενέργειά του σώματος σε κάθε θέση (*x*, *y*), δείξτε ότι αυτή είναι σταθερή και υπολογίστε αυτή την σταθερή τιμή E_0 συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος (a, b, m, ω).
(δ) Δείξετ ότι σε ένα σύστημα αξόνων (r,υ), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$, (χώρος των φάσεων), τα διαδοχικά στιγμιότυπα του συστήματος σχηματίζουν επίσης μία έλλειψη, και υπολογίστε τους ημιάξονες αυτής της έλλειχης.
(ε) Δείξτε ότι η ποσότητα $m(x\dot{y} - y\dot{x})$ είναι σταθερή. Τι αντιπροσωπεύει αυτή η ποσότητα και ποιός είναι ο φυσικός λόγος που έχει σταθερή τιμή

17. Σωματίδιο μάζας *m* κινείται σε περιοχή που χαρακτηρίζεται από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας εξαρτώμενη μόνο από μία διάσταση, σύμφωνα με τη σχέση $U(x) = U_0 a^2 \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}$. (α) Υπολογίστε την δύναμη $\vec{F} = \vec{F}(x)$. (β) Βρείτε τα σημεία μηδενισμού της δυναμικής ενέργειας και τα σημεία μηδενισμού της δύναμης και σχεδιάστε ποιοτικά το μέγεθος $U(x)/U_0$ συναρτήσεις του *x*. (γ) Βρείτε τα σημεία ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας, καθώς και τη συχνότητα ταλαντώσεων μικρού πλάτους γύρω από τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας. (δ) Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να δοθεί στο σωματίδιο όταν έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια, πέραν της οποίας το σωματίδιο μπορεί να διαφύγει προς το $x \to \infty$. Σε αυτή την περίπτωση, ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου καθώς $x \to \infty$. (ε) Βρείτε τα όρια της περιοχής μέσα στην οποία κινείται το σωματίδιο όταν η συνολική του ενέργεια είναι μηδενική, καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα και το σημείο στο οποίο αυτή λαμβάνει χώρα, σε αυτή την περίπτωση.

18. Θεωρείστε γνωστό ότι ένα ομογενές σφαιρικό κέλυφος με μάζα Δm, στα μεν σώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό του δεν ασκεί καμία βαρυτική δύναμη, στα δε σώματα που βρίσκονται στο εξωτερικό του ασκεί την ίδια βαρυτική δύναμη που θα ασκούσε μία σημειακή μάζα Δm, συγκεντρωμένη στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους. (α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται σε σημειακή μάζα, m_0, που βρίσκεται σε απόσταση *r*, από το κέντρο ομογενούς σφαίρας ακτίνας *R* και μάζας *M*, είτε $F_1(r)$για $r \geq R$, είτε $F_2(r)$για $0 < r \leq R$. (β) Ιδανικό εκκρεμές, μήκους *L* μάζας *m*, μεταφέρεται σε ύψος $H = xR,\ \ (x \geq 0)$, πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου η κυκλική συχνότητα ταλάντωσής του μετράται ίση με ω_H, και στη συνέχεια σε βάθος $D = yR,\ \ (0 \leq y < 1)$, κάτω από την επιφάνεια της Γης, όπου η κυκλική συχνότητα ταλάντωσής του μετράται ίση με ω_D. Η Γη θεωρείται ως ιδανική ομοιογενής σφαίρα ακτίνας *R*. Υπολογίστε το λόγο ω_D/ω_H συναρτήσει των {*x*, *y*}. [Δίνεται ο όγκος σφαίρας, ακτίνας *r*: $V(r) = 4\pi r^3/3$]

19. Άνθρωπος βρίσκεται πάνω σε οριζόντια κυκλική πλατφόρμα η οποία περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονά της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$. Ο άνθρωπος βαδίζει κατά μήκος μιας ακτίνας η οποία έχει χαραχτεί στην πλατφόρμα, από τον άξονα περιστροφής στην περιφέρειά της, κινούμενος με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{v_\pi}$ ως προς την πλατφόρμα. Μελετήστε το ρόλο της δύναμης τριβής (α) σύμφωνα με αδρανειακό παρατηρητή, (β) σύμφωνα με μη αδρανειακό παρατηρητή, (γ) υπολογίστε μέχρι ποιά χρονική στιγμή ή (ισοδύναμα) μέχρι ποιά απόσταση από το κέντρο, μπορεί να συνεχιστεί η κίνηση χωρίς τον κίνδυνο ολίσθησης, αν ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στον άνθρωπο και την πλατφόρμα, είναι $\boldsymbol{\mu}$.

20. Σώμα μάζας m συγκρατείται (όπως φαίνεται στο Σχήμα 3) αρχικά ακίνητο σε ύψος h στην κορυφή μίας ομογενούς τριγωνικής σφήνας μάζας Μ (θεωρήστε ότι το μέγεθος του σώματος είναι αμελητέο σε σχέση με αυτό της σφήνας). Η σφήνα συγκρατείται επίσης αρχικά ακίνητη σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ οι τριβές όλων των επιφανειών του συστήματος είναι μηδενικές. Η επιφάνεια της σφήνας, πάνω στην οποία βρίσκεται το σώμα σχηματίζει γωνία φ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Στο κάτω άκρο της σφήνας βρίσκεται ακίνητος παρατηρητής Π, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Κάποια στιγμή t = t_0 το σύστημα αφήνεται ελεύθερο. (α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφήνας ως προς τον ακίνητο παρατηρητή Π την στιγμή t = t_1 που το σώμα m φτάνει στο κατώτερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου. (β) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση της σφήνας ως προς τον Π όσο το σώμα m παραμένει πάνω της.



21. Ένα ασανσέρ κατεβαίνει με επιτάχυνση $-2\hat{y}\,m/\sec^2$ ως προς το έδαφος ξεκινώντας από ύψος y_0. Κάποια στιγμή t=0, ξεκολλάει και πέφτει το κάλυμμα της λάμπας που βρίσκεται 2.5m πάνω από το πάτωμα του θαλάμου. Εκείνη ακριβώς τη στιγμή ένας επιβάτης το βλέπει και συνειδητοποιεί ότι θα του χτυπήσει το πόδι. **α)** Να γράψετε την εξίσωση κίνησης του καλύμματος στο σύστημα αναφοράς του ασανσέρ. **β)** Να βρείτε πόσο χρόνο έχει ο επιβάτης να τραβήξει το πόδι του για να μην τον χτυπήσει το κάλυμμα. **γ)** Με πόση ταχύτητα θα φτάσει το κάλυμμα στο πάτωμα στο σύστημα αναφοράς του ασανσέρ. **δ)** Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης του καλύμματος και του επιβάτη και να περιγράψετε τις κινήσεις τους ως προς ένα παρατηρητή ακίνητο στο έδαφος.

22. Ένα σώμα μάζας m κινείται σε μία διάσταση (πάνω στον άξονα x) υπό την επίδραση της δύναμης $F(x)=-kx+kx^2/a$, όπου k και a είναι θετικές σταθερές.
(α) Ποιά είναι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ του σώματος, αν $U(0)=0$;
(β) Να σχεδιασθεί πρόχειρα η $U(x)$ και να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του σώματος καθώς και το είδος ισορροπίας στο καθένα.
(γ) Αν το σώμα ξεκινήσει από τη θέση $x=-a$ με μηδενική αρχική ταχύτητα, υπολογίστε με πόση ταχύτητα θα περάσει από τη θέση όπου η δυναμική του ενέργεια είναι μέγιστη.
(δ) Ποιά είναι η ενέργεια διαφυγής του σώματος από τη θέση x=0;

23. Υπολογίστε το έργο της δύναμης $\vec{F}=(x^2-2yz)\hat{x}+(2y^3-xz)\hat{y}+(2-3yz^3)\hat{z}$ από το σημείο A=(0,0,0) στο σημείο B=(1,1,1) κατά μήκος της διαδρομής $x=t^3, y=t^2, z=t$, όπου $0\le t\le 1$.

24. Σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}=b\cos(\omega t)\hat{x}+b\sin(\omega t)\hat{y}+b\hat{z}$ όπου b,ω σταθερές. Βρείτε το έργο της δύναμης σε χρόνο t εάν το σώμα ξεκινάει από την ηρεμία.

25. Δίδονται τα διανυσματικά πεδία: $\boldsymbol{F}_1=(x-y,\ y-x,\ 0)$, και $\boldsymbol{F}_2=(x^2y,\ y^2x,\ 0)$. **α)** Να βρείτε ποιό από τα δύο πεδία μπορεί να παριστάνει διατηρητική δύναμη και ποιό όχι. **β)** Για εκείνο από τα δύο πεδία, που μπορεί να παριστάνει διατηρητική δύναμη, να υπολογιστεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, $U=U(x,y,z)$, από την οποία αυτό προέρχεται, θεωρώντας ως σημείο αναφοράς (μηδενικής δυναμικής ενέργειας) το σημείο (x=0, y=0, z=0).