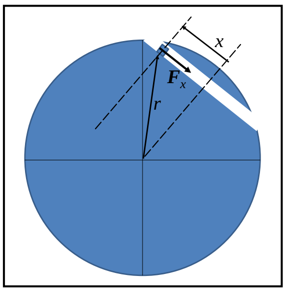
ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2022-23
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Κ. Φαράκος, Ι. Ράπτης
Β΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2/11/20222
Να επιστραφούν λυμένες μέχρι και την Πέμπτη 24/11/22, οι 1, 2, 3, 4, 5.
[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και να αναρτηθούν, ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF στις Εργασίες του Helios]

1. Θεωρήστε γνωστό ότι ένα σφαιρικός φλοιός με μάζα Δm, στα μεν σώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό του δεν ασκεί καμία βαρυτική δύναμη, στα δε σώματα που βρίσκονται στο εξωτερικό του ασκεί την ίδια βαρυτική δύναμη που θα ασκούσε μία σημειακή μάζα Δm, συγκεντρωμένη στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους. Θεωρήστε επίσης γνωστό ότι δύο σημειακές μάζες m_1, m_2 που απέχουν απόσταση r, έλκονται αμοιβαία με μία βαρυτική δύναμη μέτρου $|F_{12}| = |F_{21}| = Gm_1m_2/r^2$ (Νόμος της βαρυτικής έλξης, του Νεύτωνα). Με βάση τα παραπάνω, και θεωρώντας ότι η Γη είναι μία μη-περιστρεφόμενη στερεά σφαίρα, μάζας Μ και ακτίνας R, με ομοιόμορφη πυκνότητα σε όλο τον όγκο της:
(α) Υπολογίστε την βαρυτική δύναμη σε μάζα m συναρτήσει της απόστασής της r από το κέντρο της Γης, όταν $r < R$ και , όταν $r \geq R$.
(β) Δείξτε ότι, δορυφόρος που περιφέρεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω περί την Γη, σε τροχιά ακτίνας περίπου ίσης με την ακτίνα της Γης, πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\omega^2 = GM/R^3$.

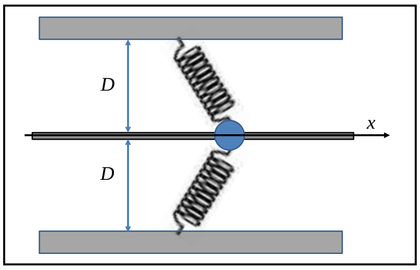


(β) Δείξτε ότι, αν αφεθεί ένα σώμα m, με μηδενική αρχική ταχύτητα, στην αρχή μίας ευθύγραμμης σήραγγας, που διαπερνά τη Γη, διερχόμενη από το κέντρο της, θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση, και να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα ω αυτής της ταλάντωσης.
(γ) Να επαναλάβετε το ερώτημα (β), για την περίπτωση που η ευθύγραμμη σήραγγα συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία της επιφάνειας της Γης, και το σώμα m κινείται μέσα σε αυτήν χωρίς τριβές.

2. Ευθύγραμμη δοκός μήκους l με γραμμική πυκνότητα $\rho \equiv \dfrac{dm}{dr} = kr, \quad (0 \leq r \leq l)$, (όπου k θετική σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις και το r είναι η απόσταση από το αριστερό άκρο της δοκού), μπορεί να μετακινείται μέσα σε οριζόντιο ευθύγραμμο κανάλι που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα-*x*. Η κάτω επιφάνεια της δοκού έχει ίδια τραχύτητα σε όλο το μήκος της, ενώ η τραχύτητα της επιφάνειας του καναλιού μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο συντελεστής τριβής να εξαρτάται από τη θέση x στο κανάλι, και παίρνει τιμές $\mu_{στ}(x) = \mu_{κιν}(x) = \mu(x) = 1/(2 + bx^2)$ στο διάστημα $(-\infty < x < +\infty)$, και $b > 0$.
(α) Υπολογίστε τη συνολική μάζα $m_{ολ}$ της δοκού και βρείτε τη σχέση που συνδέει τα k, l, $m_{ολ}$.
(β) Αν η δοκός είναι τοποθετημένη στο κανάλι έτσι ώστε το μέσον της να βρίσκεται στο σημείο $x_M = 0$, και αρχίζουμε να δημιουργούμε μία κλίση του καναλιού, γωνίας θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, υπολογίστε την κρίσιμη γωνία κλίσης $\theta_{ορ}$ του καναλού, πέραν της οποίας η δοκός αρχίζει να ολισθαίνει στο κανάλι.

[Υπόδειξη: Υπολογίστε, ή χρησιμοποιείστε έτοιμο το: $\displaystyle\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}} \right)$]

Εφαρμογή: Αν $b = 8/l^2$ υπολογίστε το $\theta_{ορ}$, για: $x_M = 0$, [ΕΚΤΟΣ (Μόνο για φανατικούς): υπολογίστε γενικά το $\theta_{o\rho}=\theta_{o\rho}\left(x_{\rm M}\right)$, και ειδικότερα τα: $\theta_{o\rho}\left(x_{\rm M}=-l/2\right)$ και $\theta_{o\rho}\left(x_{\rm M}=+l/2\right)$, αν εξακολουθεί να ισχύει $b=8/l^2$]



3. Μάζα *m* είναι περιορισμένη να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε ράβδο που συμπίπτει με τον άξονα-*x*, ενώ είναι συνδεδεμένη με τα ακλόνητα σημεία $\left(x=0, y=\pm D\right)$ μέσω δύο όμοιων ελατηρίων με φυσικό μήκος L_0 και με σταθερά σκληρότητας s. (α) Αν $L_0>D$, να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια $U\left(x\right)$ του συστήματος συναρτήσει της θέσης *x* και να σχεδιασθεί κατ' εκτίμηση, να ευρεθούν τα σημεία και το είδος ισορροπίας, καθώς και η συχνότητα ταλάντωσης για μικρές απομακρύνσεις από τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας. (β) Αν $L_0\le D$, να υπολογισθεί η δυναμική ενέργεια $U\left(x\right)$ του συστήματος συναρτήσει της θέσης *x* και να σχεδιασθεί κατ' εκτίμηση, να ευρεθούν τα σημεία και το είδος ισορροπίας, καθώς και η συχνότητα ταλάντωσης για μικρές απομακρύνσεις από τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας.

[Υπενθυμίζεται ότι η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι $U=\dfrac{1}{2}s\left(\Delta l\right)^2$, όπου Δl : η μεταβολή μήκους, ως προς το φυσικό του μήκος]

4. Πύραυλος μάζας *m*, που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0=\upsilon_0\hat{x}$ μακριά από πεδία βαρύτητας, εισέρχεται κάποια στιγμή (*t*=0, *x*=0) σε περιοχή μεσοαστρικής σκόνης από την οποία υφίσταται αντίσταση ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, $\vec{F}_{\alpha\nu\tau}=-c\upsilon^2\hat{\upsilon}$, όπου ο συντελεστής *c*, λόγω μειούμενης πυκνότητας της μεσοαστρικής σκόνης, εξαρτάται από τη θέση x με τη μορφή $c\left(x\right)=\dfrac{c_0}{1+ax}$, $\quad x\ge 0$. Τα c_0 και *a* είναι θετικές σταθερές.

(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του πύραυλος και επιλύστε την προκειμένου να υπολογίσετε την εξάρτηση της ταχύτητας από τη θέση, $\upsilon=\upsilon\left(x\right)$.

(β) Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), υπολογίστε το $x=x\left(t\right)$

(γ) Υπολογίσετε το $x\left(t\to\infty\right)$.

5. Ένα μικρό σώμα μάζας *m* αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία *φ* με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης *μ* μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση *x* από το σημείο εκκίνησης, *μ*=*λx* (όπου *λ*>0), κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του σώματος κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

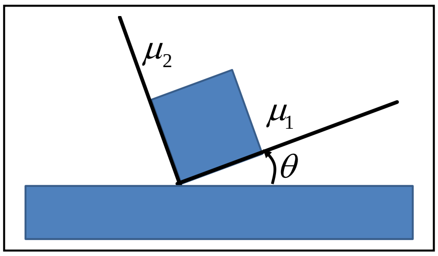
(β) Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ και ολοκληρώστε τη διαφορική εξίσωση, ώστε να υπολογίσετε την ταχύτητα *v=v(x)* κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

(γ) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει.

(δ) Βρείτε τη θέση όπου μεγιστοποιείται η ταχύτητα καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα.

6. Πλοιάριο μάζας m ξεκινάει με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \hat{x}$ στην επιφάνεια λίμνης. Το πλοιάριο υφίσταται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας, $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -c\vec{\upsilon}$, όπου ο συντελεστής c, λόγω μεταβλητής σύστασης του υγρού κατά μήκος της πορείας του πλοιαρίου, εξαρτάται από τη θέση x με τη μορφή $c(x) = \dfrac{c_0}{(1+ax)^2}$. Τα c_0 και a είναι θετικές σταθερές, ενώ το $x = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο εκκίνησης του πλοιαρίου.
(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του πλοιαρίου και επιλύστε την προκειμένου να υπολογίσετε την εξάρτηση της ταχύτητας από τη θέση, $\upsilon = \upsilon(x)$.
(β) Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), διερευνήστε υπό ποια προϋπόθεση (για τα m, υ_0, c_0, a) η ταχύτητα του πλοιαρίου μηδενίζεται σε πεπερασμένη απόσταση από την αφετηρία και βρείτε πόση είναι αυτή η απόσταση.
(γ) Αν τα m, υ_0, c_0, a είναι τέτοια ώστε η ταχύτητα να μην μηδενίζεται ποτέ, να υπολογίσετε την οριακή τιμή της ταχύτητας για πολύ μεγάλες αποστάσεις από το αρχικό σημείο.
(δ) Υπολογίστε, με μορφή ολοκληρώματος, το χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει μία απόσταση μήκους L_0.

7. Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο (x, y), με σταθερή επιτάχυνση $\ddot{\vec{r}} = -\hat{y}a$, και η εξίσωση της τροχιάς του είναι $y = Ax - Bx^2$, όπου a, A, B θετικές σταθερές, ανεξάρτητες του χρόνου και τις θέσης.
(α) Δείξτε ότι το πηλίκο των δύο συνιστωσών της ταχύτητας υ_y/υ_x είναι γραμμική συνάρτηση της συντεταγμένης-x και υπολογίστε τη μορφή της.
(β) Δείξτε οτι η x-συνιστώσα της ταχύτητας είναι σταθερή και υπολογίστε την τιμή της
(γ) Δείξτε ότι το σωματίδιο διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων (x, y), και υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητάς του κατά την διέλευσή του από το $(0,0)$
(δ) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο, και σχολιάστε ποιά γνωστή κίνηση περιγράφει το πρόβλημα.

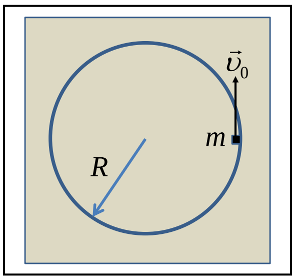


8. Οριζόντιο ορθογώνιο κανάλι χρησιμοποιείται για μεταφορά ορθογώνιων κυβωτίων κατά μήκος της ακμής του (δηλ., κάθετα στη σελίδα). Η μία επιφάνεια του καναλιού, που έχει κλίση θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, έχει συντελεστή τριβής μ_1, και η άλλη επιφάνεια έχει συντελεστή τριβής μ_2. (α) Να υπολογιστεί [για δεδομένα $(m, g, \theta, \mu_1, \mu_2)$] η ελάχιστη οριζόντια δύναμη η οποία πρέπει να εφαρμοστή παράλληλα στην ακμή του καναλιού, προκειμένου να αρχίσει να μετατοπίζεται ένα κιβώτιο μάζας m. (β) Δείξτε ότι υπάρχει τιμή της γωνίας θ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ για την οποία η δύναμη του ερωτήματος-α μεγιστοποιείται, και υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της.

9. Σώμα μάζας M ξεκινάει τη χρονική στιγμή t=0 και κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση συνολικής δύναμης τέτοιας ώστε η ταχύτητά του να εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\upsilon(t) = AT/(T+t)$, όπου (A, T) θετικές σταθερές. **(α)** Προσδιορίστε τις διαστάσεις (μονάδες) των σταθερών (A, T). **(β)** Προσδιορίστε τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία υποδιπλασιάζεται η ταχύτητα του σώματος και το διάστημα s που διανύεται μέχρι τότε. (γ) Για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le t_0$, βρείτε την δύναμη F που ασκείται στο σώμα ως συνάρτηση της ταχύτητας υ του σώματος, $F = F_1(\upsilon)$, και (ανεξάρτητα) ως συνάρτηση του χρόνου, $F = F_2(t)$. **(δ)** Να υπολογίσετε τον ρυθμό απορρόφησης ισχύος από τη δύναμη, συναρτήσει του χρόνου, $P = P(t) = \dfrac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$, τη συνολική ενέργεια που απορροφά μέχρι τη χρονική στιγμή t_0, και να την συγκρίνεται με την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας, (ε) Για $t > t_0$, η δύναμη υπό την οποία κινείται το σώμα γίνεται $F = F_3(\upsilon) = -m\upsilon/T$. Να υπολογίσετε την $\upsilon = \upsilon(t)$ για $t > t_0$, και τη συνολική διάρκεια της κίνησης.

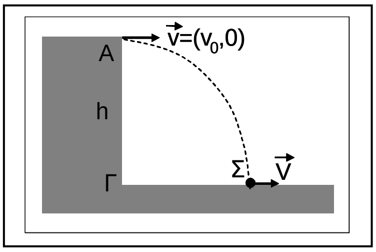
10. Ένας ποδοσφαιριστής εκτελεί κτύπημα πέναλντι και η μπάλα περνάει εφαπτομενικά πάνω από το οριζόντιο δοκάρι με την ταχύτητά της οριζόντια. Το δοκάρι βρίσκετε σε ύψος h από το έδαφος. Αν η μπάλα φεύγει με αρχική ταχύτητα V_0, να βρεθεί: **(α)** η γωνία θ που σχηματίζει η V_0 με το οριζόντιο επίπεδο. **(β)** η ταχύτητα της μπάλας ακριβώς πάνω από οριζόντιο δοκάρι. **(γ)** πόσο χρόνο θα χρειαστεί η μπάλα για να πέσει στο έδαφος. **(δ)** ποια η απόσταση του σημείου του πέναλντι από το τέρμα.

11. Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται στο επίπεδο (x,y) υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F} = -k\vec{r}$ όπου k μια θετική σταθερά και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. **(α)** Να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου ως προς τους άξονες x, y. **(β)** Ποια είναι η συνθήκη ώστε το σωματίδιο να εκτελεί κυκλική κίνηση και ποια είναι η περίοδος της κίνησης; **(γ)** Ποια είναι η συνθήκη ώστε η κίνηση να είναι ευθύγραμμη με κλίση 30^0 ως προς τον άξονα των x.



12. Οριζόντιο μεταλλικό δακτυλίδι ακτίνας R είναι στερεωμένο ακλόνητα πάνω σε οριζόντιο λείο τραπέζι. Στο εσωτερικό του δακτυλιδιού υπάρχει σημειακή μάζα m, ο συντελεστής τριβής της οποίας με το δακτυλίδι είναι μ. Η μάζα εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα υ_0, εφαπτομενικά στην εσωτερική επιφάνεια του δακτυλιδιού. **(α)** Υπολογίστε την ταχύτητα της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου. **(β)** Υπολογίστε τη γωνιακή απόσταση της μάζας, από το σημείο εκτόξευσης, συναρτήσει του χρόνου. **(γ)** Επαναλάβετε τα ίδια ερωτήματα αν το εσωτερικό του δακτυλιδιού είναι λείο και ο συντελεστής τριβής της μάζας με το οριζόντιο τραπέζι είναι μ.

13. Ηλεκτροκίνητο ρομποτικό όχημα μπορεί να κινηθεί σε ευθύγραμμη τροχιά έχοντας τη δυνατότητα να αναπτύξει μέγιστη επιτάχυνση μέτρου a_1 και μέγιστη επιβράδυνση μέτρου a_2. (α) Να υπολογίστε ***τον ελάχιστο χρόνο*** με τον οποίο μπορεί να διανύσει μία ευθύγραμμη απόσταση μήκους L, ***ξεκινώντας και τερματίζοντας με μηδενική ταχύτητα***.
(β) Αν η μάζα του οχήματος είναι m, να υπολογίσετε το ρυθμό παροχής ενέργειας $P_{επιτ}(t)$ (ισχύς) από τον κινητήρα στο όχημα, κατά τη φάση της επιτάχυνσης και τη μέγιστη κινητική ενέργειά του, αν η τριβή θεωρηθεί αμελητέα.
(γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό απώλειας ενέργειας $P_{επιβρ}(t)$, από τον μηχανισμό πέδησης, κατά τη φάση της επιβράδυνσης.
[Όλα τα ζητούμενα μεγέθη να υπολογιστούν συναρτήσει των a_1, a_2, L, m]



14. Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια, με ταχύτητα $\bar{v} = (v_0, 0)$, με σκοπό να πετύχει τον στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\bar{V} = (v_1, 0)$, οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα ($t = 0$) από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα, που θεωρούμε ότι επενεργεί μόνο στη σφαίρα, είναι ανάλογη με την ταχύτητα: $-k\vec{v}$ ($k > 0$). **(α)** Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης για τη σφαίρα. **(β)** Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου. **(γ)** Βρείτε τα $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας (θεωρώντας το σημείο Α ως αρχή των αξόνων). **(δ)** Γράψτε τις σχέσεις που υπακούουν τα $x(t)$ και $y(t)$ υποθέτοντας ότι η σφαίρα συναντά τον στόχο κάποια χρονική στιγμή t_0. **(ε)** Στην περίπτωση που ισχύει το (δ), δείξτε, απαλείφοντας όρους με εκθετικά, ότι η σφαίρα πετυχαίνει τον στόχο σε χρόνο: $t_0 = \dfrac{kh}{mg(1 - v_1/v_0)}$

15. Σωμάτιο μάζας *m* κινείται στην εσωτερική επιφάνεια κατακόρυφου κώνου και κάνει κυκλική κίνηση ακτίνας *R*. Η επιφάνεια του κώνου σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. (α) Εάν η επιφάνεια του κώνου είναι λεία να βρείτε την ταχύτητα του σωματίου. (β) Εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σωμάτιου και του κώνου είναι μ να βρείτε την ταχύτητα του σωμάτιου.

16. Πλοίο κινείται με ταχύτητα *u* και βάλλει βλήμα με ταχύτητα V_0 ως προς αυτό σε γωνία φ με τον ορίζοντα. (α) Βρείτε το βεληνεκές της βολής ως προς ακίνητο παρατηρητή. (β) Για ποια τιμή της φ έχουμε μέγιστο βεληνεκές; (γ) Να προσδιορίσετε την κίνηση του βλήματος ως προς ακίνητο παρατηρητή εάν η ταχύτητα του βλήματος είναι κάθετη αρχικά στην διεύθυνση κίνησης του πλοίου.

17. Ένα σώμα ολισθαίνει προς τα κάτω, χωρίς αρχική ταχύτητα και χωρίς τριβές, από την κορυφή Α μιας σφαίρας ακτίνας R. Σε ποια κατακόρυφη απόσταση από την κορυφή της σφαίρας θα ξεφύγει από την επιφάνειά της; Πόση θα είναι η ταχύτητα του σώματος στο σημείο αυτό;

18. Χάντρα μάζας *m* κινείται κατά μήκος της περιφέρειας ενός κατακόρυφου λείου δακτυλιδιού ακτίνας *R*. Η χάντρα βάλλεται από την κατώτερη θέση του δακτυλιδιού με τόση ενέργεια ώστε μόλις να μπορεί να φτάσει στην κορυφή του. Βρείτε μια έκφραση για την δύναμη που ασκεί το δακτυλίδι στην χάντρα και προσδιορίστε το σημείο όπου αυτή αλλάζει πρόσημο.

19. Στεφάνη μάζας Μ και ακτίνας R, κρέμεται με αβαρές νήμα από ακλόνητο σημείο, μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας g. Στη στεφάνη είναι περασμένα δύο τρύπια σφαιρίδια, μάζας m το καθένα, που μπορούν να ολισθαίνουν ως προς τη στεφάνη χωρίς τριβή. Δείξτε ότι, αν αφεθούν τα δύο σφαιρίδα, με μηδενική ταχύτητα, από την κορυφή της στεφάνης, έτσι ώστε να ολισθήσουν σε αντίθετες κατευθύνσεις, τότε η τάση στο νήμα ανάρτησης θα μπορούσε να μηδενιστεί, όταν τα σφαιρίδια βρίσκονται σε κατάλληλη γωνία, υπό την προϋπόθεση ότι το πηλίκο των μαζών, M/m, ικανοποιεί μία ορισμένη σχέση.