ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2016-17
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Ι. Ράπτης

Δ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ Ιανουάριος 2017

3. Ένα μηχανικό σύστημα μάζας (m) – ελατηρίου (s) υφίσταται την επίδραση δύναμης τριβής $\left(\vec{F}_{\tau\rho} = -r\vec{\upsilon}\right)$ και τίθεται σε κίνηση με συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης. Αν,για $t=0$, είναι: $\left(x(0)=0, \upsilon(0)=\upsilon_0 \neq 0\right)$, (α) δείξτε ότι η μετατόπιση, ως συνάρτηση του χρόνου, περιγράφεται από μία σχέση της μορφής $x(t) = Ate^{-Bt}$ και προσδιορίστε τα A και B, (β) υπολογίστε τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η μέγιστη μετατόπιση και βρείτε πόση είναι η μέγιστη μετατόπιση

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\left.\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} \\ x(0) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow x(t) = C_2 t e^{-\gamma t} \Rightarrow \dot{x}(t) = C_2 e^{-\gamma t} - \gamma C_2 t e^{-\gamma t}$$

$$\left\{\dot{x}(t) = C_2 e^{-\gamma t} - \gamma C_2 t e^{-\gamma t}, \quad \dot{x}(0) = \upsilon_0\right\} \Rightarrow C_2 = \upsilon_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = \upsilon_0 t e^{-\gamma t}}$$

Μέγιστη μετατόπιση: υ=0, $\upsilon(t) = \dot{x}(t) = \upsilon_0 (1-\gamma t)e^{-\gamma t}$, $\upsilon = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1/\gamma}$

4. Οι αποσβηνόμενες ταλαντώσεις ενός μηχανικού συστήματος έχουν συχνότητα ω_1. Το ίδιο σύστημα, όταν διεγείρεται από εξωτερική δύναμη της μορφής $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, (όπου F_0=σταθερά, και ω=μεταβλητή), παρουσιάζει μία καμπύλη συντονισμού ισχύος, με εύρος στο μισό του ύψους της $\Delta\omega=\omega_1/5$.

i) Σε ποιά γωνιακή συχνότητα παρατηρείται η μέγιστη μεταφορά ισχύος από τη δύναμη προς το σύστημα;

ii) Ποιός είναι ο παράγοντας ποιότητας Q του συστήματος;

iii) Αν το σύστημα έχει στοιχεία (m, s) ποιά είναι η τιμή του συντελεστή τριβής r_1 στην έκφραση $F_{\tau\rho}=-r\upsilon$;

iv) Σχεδιάστε την καμπύλη συντονισμού μέσης ισχύος για $r=r_1$, $r=r_1/10$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Η Μέγιστη μεταφορά ισχύος παρουσιάζεται στη φυσική συχνότητα ταλάντωσης ω_0 του συστήματος, όταν δεν υπάρχει τριβή, και ισχύει

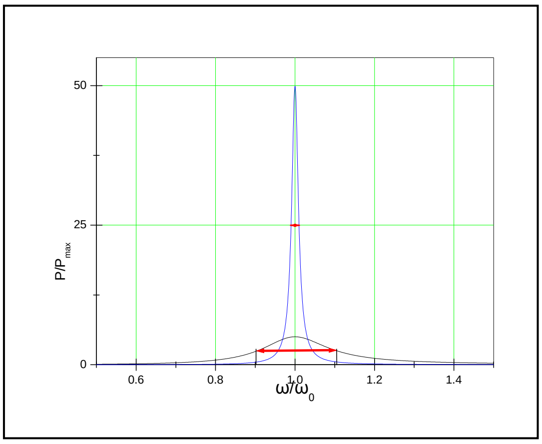
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - (r/2m)^2} \qquad (1)$$

Επίσης, ισχύει $\Delta\omega = r/m$ αλλά $\Delta\omega = \omega_1/5$, επομένως $r/2m = \omega_1/10$. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (1) παίρνουμε

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - (r/2m)^2 \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \omega_1^2/100$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_1^2/100 = \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \omega_1\sqrt{101}/10}$$

(β) Ο παράγοντας ποιότητας $Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{\omega_1\sqrt{101}/10}{\omega_1/5}=\frac{5\sqrt{101}}{10}\Rightarrow \boxed{Q=\frac{\sqrt{101}}{2}}$



(γ) Για τον υπολογισμό του r :

Τετραγωνίζουμε την $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-(r/2m)^2}$:

$$\omega_1^2=\omega_0^2-(r/2m)^2\Rightarrow 100\omega_0^2/101=\omega_0^2-(r/2m)^2$$

$$\Rightarrow (r/2m)^2=\omega_0^2/101=s/101m$$

Επιλύοντας ως προς r βρίσκουμε: $\boxed{r=2\sqrt{\frac{ms}{101}}}$

(δ) Οι δυο γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

5. Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ακλόνητο στήριγμα με ελατήριο σταθεράς s και μηχανισμό που ασκεί τριβή της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho}=-r\vec{\upsilon}$, με r τέτοιο ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, οπότε η συνάρτηση της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας είναι της μορφής $x(t)=(A+Bt)e^{-\gamma t},(\gamma=r/2m)$, $\left(\gamma^2=\omega_0^2\equiv\frac{s}{m}\Rightarrow r=2\sqrt{sm}\right)$.

(α) Αν το σύστημα ξεκινά την κίνησή του την χρονική στιγμή $t=0$, με αρχική απομάκρυνση x_0 και αρχική ταχύτητα υ_0, υπολογίστε τις σταθερές A και B.

(β) Αν $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, δείξτε ότι το σύστημα <u>διέρχεται</u> από την θέση ισορροπίας μία μόνο φορά, υπολογίστε την αντίστοιχη χρονική στιγμή t_0, και την αντίστοιχη ταχύτητα διέλευσης.

(γ) Αν μεταβάλουμε τον συντελεστή τριβής σε νέα τιμή $r=\sqrt{sm}/2$, δείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με ασθενή απόσβεση και υπολογίστε τη συχνότητα αυτής της ταλάντωσης και τον συντελεστή ποιότητας Q.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη σχέση κρίσιμης απόσβεσης: $x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{rt}{2m}}$

Για την αρχική θέση: $x(0)=x_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=x_0}$. Από την αρχική ταχύτητα:

$$\dot{x}=Be^{-\frac{rt}{2m}}-\frac{r}{2m}(x_0+Bt)e^{-\frac{rt}{2m}}\Rightarrow \dot{x}(0)=B-\frac{r}{2m}x_0=\upsilon_0\Rightarrow B=\frac{r}{2m}x_0+\upsilon_0\Rightarrow \boxed{B=\gamma x_0+\upsilon_0}$$

Οπότε, τελικά : $\quad x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$

(β) Λόγω της συνθήκης κρίσιμης απόσβεσης $\left(\gamma^2=\omega_0^2\Rightarrow\gamma=\omega_0\right)$, σχέσης, από (α), $x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$, και της σχέσης των αρχικών συνθηκών $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, έχουμε:

$$x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=\left(x_0+(\omega_0 x_0-2\omega_0 x_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=(x_0-\omega_0 x_0 t)e^{-\frac{rt}{2m}}$$

Συνθήκη διέλευσης από τη θέση ισορροπίας: $\quad x(t_0)=0\Rightarrow x_0(1-\omega_0 t_0)e^{-\frac{rt}{2m}}=0\Rightarrow \boxed{t_0=\frac{1}{\omega_0}}$

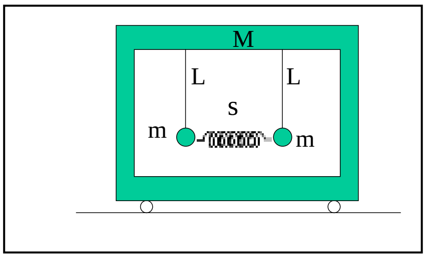
Η ταχύτητα είχε υπολογιστεί στο (α): $\dot{x} = \left(\gamma x_0 + \upsilon_0\right) e^{-\frac{rt}{2m}} - \gamma\left(x_0 + \left(\gamma x_0 + \upsilon_0\right)t\right) e^{-\frac{rt}{2m}}$

$$\dot{x} = \left(\omega_0 x_0 - 2\omega_0 x_0\right) e^{-\frac{rt}{2m}} - \omega_0\left(x_0 + \left(\omega_0 x_0 - 2\omega_0 x_0\right)t\right) e^{-\frac{rt}{2m}} = -\omega_0 x_0 e^{-\frac{rt}{2m}} - \omega_0\left(x_0 - \omega_0 x_0 t\right) e^{-\frac{rt}{2m}},$$

και για $t_0 = 1/\omega_0$: $\dot{x}(t_0) = -\omega_0 x_0 e^{-1} - \omega_0\left(x_0 - x_0\right) e^{-\frac{rt}{2m}} \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t_0) = -\omega_0 x_0 / e}$

(γ) Αφού η συνθήκη κρίσιμης απόσβεσης είναι $\left(\gamma^2 \equiv \left(\frac{r}{2m}\right)^2 = \omega_0^2 \equiv \frac{s}{m} \Rightarrow r = 2\sqrt{sm}\right)$, για οποιοδήποτε $r < 2\sqrt{sm}$, έχουμε ασθενή απόσβεση (άρα. και για το $r < \sqrt{sm}/2$), με συχνότητα $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(r/2m\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\sqrt{s/m}/4\right)^2} \Rightarrow \boxed{\omega' = \omega_0\sqrt{15}/4}$.

Ο συντελεστής ποιότητας $Q = \frac{\omega'}{r/m} = \frac{\omega'}{\sqrt{sm}/2m} = \frac{2\omega'}{\sqrt{s/m}} = \frac{2\omega_0\sqrt{15}}{\omega_0 4} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{15}}{2} \approx 2}$



6. Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας *m* και μήκους *L*, το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας *M*, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας *g*, και τα δύο εκκρεμή συνδέονται με ελατήριο σταθεράς s. Τα δύο εκκρεμή εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν μικρές ταλαντώσεις, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (*m*, *m*, *M*). (β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ: κοινή συχνότητα και φάση, διαφορετικά πλάτη) και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. (γ) Επιλύστε τη χαρακτηριστική εξίσωση, για την περίπτωση *m*=*M*, $\left(g/L\right) = \left(s/m\right) = \omega_0^2$, και προσδιορίστε τις συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ότι x_1, x_2, x_3, οι μετατοπίσεις των m_1, m_2, M, από τις θέσεις ισορροπίας, και θ_1, θ_2, οι γωνίες των αντίστοιχων νημάτων με την κατακόρυφο.

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 = -T_1\sin\theta_1 - s\left(x_1 - x_2\right) = -m_1 g\,\dfrac{(x_1 - x_3)}{L} - s\left(x_1 - x_2\right) \\ m_2\ddot{x}_2 = -T_2\sin\theta_2 - s\left(x_2 - x_1\right) = -m_2 g\,\dfrac{(x_2 - x_3)}{L} - s\left(x_2 - x_1\right) \\ m_3\ddot{x}_3 = T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 = m_1 g\,\dfrac{(x_1 - x_3)}{L} + m_2 g\,\dfrac{(x_2 - x_3)}{L} \end{array}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} m_1\ddot{x}_1 + m_1 g\dfrac{(x_1-x_3)}{L} + s\left(x_1-x_2\right) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)x_1 - \dfrac{s}{m_1}x_2 - \dfrac{g}{L}x_3 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + m_2 g\dfrac{(x_2-x_3)}{L} + s\left(x_2-x_1\right) = 0 \Rightarrow -\dfrac{s}{m_2}x_1 + \ddot{x}_2 + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)x_2 - \dfrac{g}{L}x_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - m_1 g\dfrac{(x_1-x_3)}{L} - m_2 g\dfrac{(x_2-x_3)}{L} = 0 \Rightarrow -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}x_1 - \dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_2 + \ddot{x}_3 + \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Υποθέτουμε: $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$, $x_2 = B\cos(\omega t+\varphi)$, $x_3 = C\cos(\omega t+\varphi)$, οπότε:

$$\left.\begin{matrix} -\omega^2 A + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)A - \dfrac{s}{m_1}B - \dfrac{g}{L}C = 0 \\ -\dfrac{s}{m_2}A + -\omega^2 B + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)B - \dfrac{g}{L}C = 0 \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}A - \dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}B + -\omega^2 C + \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}C = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)-\omega^2 & -\dfrac{s}{m_1} & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{s}{m_2} & \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)-\omega^2 & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L} & -\dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L} & \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right]-\omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right]+\omega_0^2\left[\omega_0^4-\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right]-2\omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right]\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)+\omega_0^2\right]-2\omega_0^4\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-2\omega_0^4\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-2\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4+2\omega_0^4-3\omega_0^2\omega^2-2\omega_0^4\right]=0 \Rightarrow \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4-3\omega_0^2\omega^2\right]=0,$$ άρα:

$$\Rightarrow \omega^2\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^2-3\omega_0^2\right]=0 \quad \Rightarrow \boxed{\left\{\omega_1=0, \quad \omega_2=\omega_3=\omega_0\sqrt{3}\right\}}$$

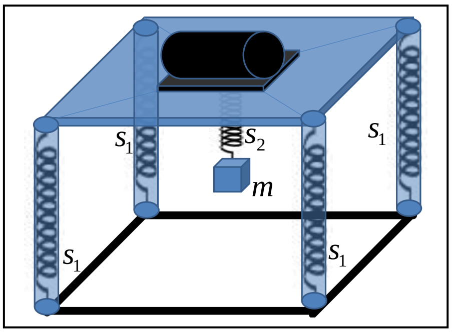
Ο μηδενισμός της μίας ιδιοσυχνότητας δηλώνει την ισοταχή κίνηση (ή, ακινησία) του Κέντρου Μάζας του συστήματος (επειδή το σύστημα είναι ελεύθερο, συνολικά)

Όσον αφορά την σύμπτωση των άλλων δύο ιδιοσυχνοτήτων, εδώ έχουμε την περίπτωση «εκφυλισμού» δύο Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, δηλαδή την σύμπτωση των ιδιοσυχνοτήτων τους, λόγω της ύπαρξης συμμετρίας (όχι μόνο γεωμετρικής, αλλά και ενός είδους «δυναμικής» συμμετρίας)

$$\begin{Bmatrix} \left(\omega^2-2\omega_0^2\right)A+\omega_0^2 B+\omega_0^2 C=0 \\ \omega_0^2 A+\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)B+\omega_0^2 C=0 \\ \omega_0^2 A+\omega_0^2 B+2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)C=0 \end{Bmatrix} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \begin{Bmatrix} \omega_1^2=0 \\ \omega_2^2=3\omega_0^2 \\ \omega_3^2=3\omega_0^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\omega_1^2=0 \qquad \Rightarrow 2A=B+C \qquad \acute{\eta} \qquad 2B=A+C \qquad \acute{\eta} \qquad A+B=2C$$

$$\omega_{2,3}^2=3\omega_0^2 \qquad \Rightarrow A+B+C=0$$



7. Ομοιογενής τετραγωνική τράπεζα στηρίζεται στα τέσσερα άκρα της με όμοια κατακόρυφα στηρίγματα, καθένα από τα οποία μπορεί να προσομοιωθεί με ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου s_1. Πάνω στην τράπεζα είναι προσαρμοσμένος ηλεκτρικός κινητήρας, έτσι ώστε τα κέντρα μάζας της τράπεζας και του κινητήρα να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο, το δε σύστημα Τράπεζα-Κινητήρας να έχει συνολική μάζα *M*. Από το κέντρο μάζας της τράπεζας είναι αναρτημένη, μέσω ελατηρίου σταθεράς s_2, μάζα *m*. Όταν ο κινητήρας βρίσκεται σε λειτουργία, με μία συχνότητα περιστροφής ω, τότε το σύστημα υφίσταται <u>περιοδική διέγερση που ισοδυναμεί με την εφαρμογή κατακόρυφης περιοδικής «εξωτερικής» δύναμης</u> $F(t)=F_0\cos(\omega t)$ στο κέντρο μάζας του συστήματος Τράπεζα-Κινητήρας.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των μαζών *M* (μετατόπιση: x_1) και *m* (μετατόπιση: x_2), δεχόμενοι ότι τα ελατήρια είναι ιδανικά και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

(β) Δεχθείτε ότι, στη μόνιμη κατάσταση κίνησης του συστήματος, οι δύο μάζες *M* και *m* κινούνται με τη συχνότητα ω, της «εξωτερικής» διέγερσης και με διαφορετικά πλάτη, έτσι ώστε οι απομακρύνσεις τους από τις θέσεις ισορροπίας να είναι $x_1(t)=A\cos(\omega t)$ και $x_2(t)=B\cos(\omega t)$, αντίστοιχα, και υπολογίστε τα πλάτη $A=A(\omega)$ και $B=B(\omega)$, συναρτήσει της εξωτερικής συχνότητας ω, και των υπολοίπων χαρακτηριστικών του συστήματος, με τη μορφή πηλίκου οριζουσών.

(γ) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β), εξηγήστε, για ποιά συχνότητα $\omega=\omega_{\kappa\rho}=?$ του κινητήρα, ελαχιστοποιούνται οι κραδασμοί της τράπεζας Μ, λόγω της λειτουργίας του κινητήρα, και σχολιάστε («<u>αντι-συντονισμός</u>»).

(δ) Αν $s_1=as_2$ και $M=bm$, υπολογίστε, (συναρτήσει του $\omega_0^2=s_2/m$, και των *a*, *b*), τις τιμές της συχνότητας ω του κινητήρα για τις οποίες το πλάτος ταλάντωσης και των δύο μαζών *M* και *m* του συστήματος τείνει στο άπειρο και σχολιάστε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εξισώσεις κίνησης (τα παράλληλα ελατήρια αθροίζονται, οι μετατοπίσεις κάθε μάζας υπολογίζονται από τις θέσεις ισορροπίας)

$$\begin{Bmatrix} M\ddot{x}_1=-4s_1x_1-s_2\left(x_1-x_2\right)+F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2=-s_2\left(x_2-x_1\right) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M\ddot{x}_1+\left(4s_1+s_2\right)x_1-s_2x_2=F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2+s_2x_2-s_2x_1=0 \end{Bmatrix}$$

(β) Αντικαθιστώντας τα $x_1(t)=A\cos(\omega t)$ και $x_2(t)=B\cos(\omega t)$, και τις παραγώγους των, στις εξισώσεις κίνησης, έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} -\omega^2 M\, A+\left(4s_1+s_2\right)A-s_2B=F_0 \\ -s_2A-\omega^2 m\,B+s_2B=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left[-\omega^2 M+\left(4s_1+s_2\right)\right]A-s_2B=F_0 \\ -s_2A+\left[-\omega^2 m+s_2\right]B=0 \end{matrix}\right\}$$

Τα πλάτη Α και Β υπολογίζονται με τη μέθοδο των οριζουσών

$$A=\begin{vmatrix} F_0 & -s_2 \\ 0 & \left[-\omega^2 m+s_2\right] \end{vmatrix} \Big/ \Delta, \quad B=\begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M+\left(4s_1+s_2\right)\right] & F_0 \\ -s_2 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \Delta,$$

όπου $\Delta=\begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M+\left(4s_1+s_2\right)\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m+s_2\right] \end{vmatrix}$

(γ) Αναπτύσσοντας τις ορίζουσες των αριθμητών: $A=\dfrac{F_0\left(s_2-\omega^2 m\right)}{\Delta}$, $B=\dfrac{F_0 s_2}{\Delta}$, από όπου βλέπουμε ότι για τη συχνότητα $\omega=\omega_0=s_2/m$ έχουμε: $A=0$, $B=\dfrac{F_0 s_2}{\Delta\left(\omega_0\right)}\neq 0$

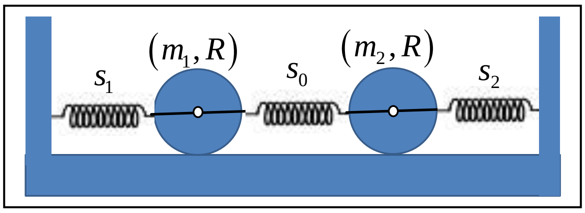
(δ) Τα πλάτη ταλάντωσης τείνουν στο άπειρο όταν ο κοινός παρονομαστής στους Δ=0, και, με βάση τις δεδομένες τιμές των s_1 και M, έχουμε

$$\Delta=\begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M+\left(4s_1+s_2\right)\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m+s_2\right] \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \left[-\omega^2 bm+\left(4a+1\right)s_2\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m+s_2\right] \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \left[-\omega^2 bm+\left(4a+1\right)s_2\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m+s_2\right] \end{vmatrix}=0 \Rightarrow bm^2\omega^4-bms_2\omega^2-\left(4a+1\right)ms_2\omega^2+\left(4a+1\right)s_2^2-s_2^2=0$$

$$bm^2\omega^4-\left(4a+1+b\right)ms_2\omega^2+4as_2^2=0 \Rightarrow b\omega^4-\left(4a+1+b\right)\omega_0^2\omega^2+4a\omega_0^4=0$$

$$b\omega^4-\left(4a+1+b\right)\omega_0^2\omega^2+4a\omega_0^4=0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2=\omega_0^2\,\frac{\left(4a+1+b\right)\pm\sqrt{\left(4a+1+b\right)^2-16ab}}{2b}$$

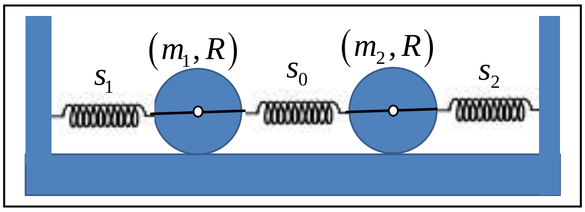


8. Δίνεται η διάταξη του σχήματος με δύο ελατήρια σταθεράς k και ένα ενδιάμεσο ελατήριο σταθεράς $K=2k$. Τα άκρα του ελατηρίου K είναι συνδεδεμένα στα κέντρα C_1 και C_2 δύο πολύ λεπτών δίσκων μάζας m και ακτίνας R. Επίσης στα κέντρα C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένα, αντίστοιχα, το δεξιό και αριστερό ελατήριο k. Θεωρούμε ότι ανά πάσα χρονική στιγμή η όλη διάταξη παραμένει στο επίπεδο xz του σχήματος, τα ελατήρια είναι οριζόντια, οι δίσκοι εκτελούν κύλιση χωρίς ολίσθηση και οι συνδέσεις μεταφέρουν τις δυνάμεις των ελατηρίων στα κέντρα χωρίς να ακουμπούν τους δίσκους σε άλλα σημεία.

(α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος θεωρώντας ως μεταβλητές τις μετατοπίσεις x_1 και x_2 των C_1 και C_2 από την θέση ισορροπίας της διάταξης.

(β) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της διάταξης.

(γ) Περιγράψτε (είτε μετά από τον προσδιορισμό των $x_1(t)$ και $x_2(t)$, είτε πιο απλά σε αναλογία με άλλο γνωστό σύστημα) το είδος της κίνησης στους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.



(α) $m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - s_0\left(x_1 - x_2\right) + T_1, \qquad I_1\ddot{\theta}_1 = -T_1R \Rightarrow T_1 = -\left(I_1/R^2\right)\ddot{x}_1$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - s_0\left(x_2 - x_1\right) + T_2, \qquad I_2\ddot{\theta}_2 = -T_2R \Rightarrow T_2 = -\left(I_2/R^2\right)\ddot{x}_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - s_0\left(x_1 - x_2\right) - \left(I_1/R^2\right)\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - s_0\left(x_2 - x_1\right) - \left(I_2/R^2\right)\ddot{x}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[m_1 + \left(I_1/R^2\right)\right]\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - s_0\left(x_1 - x_2\right) \\ \left[m_2 + \left(I_2/R^2\right)\right]\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - s_0\left(x_2 - x_1\right) \end{array}\right\}$$

$$s_1 = s_2 = k, \quad s_0 = 2k \qquad m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad I_1/R^2 = I_2/R^2 = m/2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[m_1 + \left(I_1/R^2\right)\right]\ddot{x}_1 + \left(s_1 + s_0\right)x_1 - s_0x_2 = 0 \\ \left[m_2 + \left(I_2/R^2\right)\right]\ddot{x}_2 + \left(s_2 + s_0\right)x_2 - s_0x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{3}m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 = 0 \\ -2kx_1 + \dfrac{2}{3}m\ddot{x}_2 + 3kx_2 = 0 \end{array}\right\}}$$

(β) $\left\{x_1 = A\cos\left(\omega t\right), \quad x_2 = B\cos\left(\omega t\right)\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\left(s_1 + s_0\right) - \omega^2\left[m_1 + \left(I_1/R^2\right)\right]\right)A - s_0B = 0 \\ -s_0A + \left(\left(s_1 + s_0\right) - \omega^2\left[m_2 + \left(I_2/R^2\right)\right]\right)B = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \left(2k - \dfrac{3}{2}m\omega^2\right)A - 2kB = 0 \\ -2kA + \left(2k - \dfrac{3}{2}m\omega^2\right)B = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} \left(2k - \dfrac{3}{2}m\omega^2\right) & -2k \\ -2k & \left(2k - \dfrac{3}{2}m\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)^2 - \left(-2k\right)^2 = 0$$

$$\left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)^2 = 4k^2 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{2}{3}\left(3 \mp 2\right)\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\left\{\omega_{1,2}^2 = \frac{2}{3}\omega_0^2\right\}, \left\{\omega_{1,2}^2 = \frac{10}{3}\omega_0^2\right\}}$$

(γ) $\left\{\omega_1 : \quad A = B\right\}, \quad \left\{\omega_2 : \quad A = -B\right\}$