ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2016-17
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, $1^{ΟΥ}$ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Ι. Ράπτης

Δ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ιανουάριος 2017

Αυτή η σειρά ασκήσεων δεν είναι προς παράδοση.

1. Συμπαγής πλωτήρας, μάζας M, με σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων $\left(a \times b \times c\right)$, τοποθετείται σε δεξαμενή με υγρό το οποίο έχει πυκνότητα μάζας ρ_υ. (α) Γράψτε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει μεταξύ των $\left(a, b, c, \rho_\upsilon, M\right)$ ώστε ο πλωτήρας να επιπλέει βυθισμένος στο υγρό κατά τα δύο τρίτα του. (β) Δείξτε ότι, για μικρές κατακόρυφες διαταραχές, ο πλωτήρας εκτελεί αρμονική ταλάντωση. (γ) Υπολογίστε την κυκλική συχνότητα ταλάντωσης

2. Οριζόντια πλάκα μάζας $\mathrm{M} = 5\,\mathrm{kg}$, στηρίζεται από τις τέσσερις κορυφές της σε ακλόνητο έδαφος με τέσσερα όμοια ελαττήρια σταθεράς s το καθένα. Στο κέντρο μάζας της πλάκας πέφτει και συσσωματώνεται μαζί της δεύτερη μάζα $\mathrm{M} = 2\,\mathrm{kg}$, οπότε το σύστημα αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα $\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. (α) Σε ποια απόσταση από την αρχική θέση ισορροπίας θα ηρεμήσει το συστήμα αν η απόσβεση είναι εξαιρετικά ασθενής αλλά παρέλθει τόσο χρονικό διάστημα ώστε η ταλάντωση να είναι αμελητέα. (β) Με πόσο συντελεστή ιξώδους τριβής r θα έπρεπε να έχει εφοδιάσει κάποιος το σύστημα, ώστε, μετά τη συσσωμάτωση, η ταλάντωση να εξασθενίσει με τον συντομότερο δυνατό τρόπο;

3. Ένα μηχανικό σύστημα μάζας (m) – ελατηρίου (s) υφίσταται την επίδραση δύναμης τριβής $\left(\vec{F}_{\tau\rho} = -r\vec{\upsilon}\right)$ και τίθεται σε κίνηση με συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης. Αν,για $t = 0$, είναι: $\left(x(0) = 0, \upsilon(0) = \upsilon_0 \neq 0\right)$, (α) δείξτε ότι η μετατόπιση, ως συνάρτηση του χρόνου, περιγράφεται από μία σχέση της μορφής $x\left(t\right) = Ate^{-Bt}$ και προσδιορίστε τα A και B, (β) υπολογίστε τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η μέγιστη μετατόπιση και βρείτε πόση είναι η μέγιστη μετατόπιση

4. Οι αποσβενόμενες ταλαντώσεις ενός μηχανικού συστήματος έχουν συχνότητα ω_1. Το ίδιο σύστημα, όταν διεγείρεται από εξωτερική δύναμη της μορφής $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, (όπου F_0=σταθερά, και ω που μπορεί να επιλέγεται), παρουσιάζει μία καμπύλη συντονισμού ισχύος, με εύρος στο μισό του ύψους της $\Delta\omega=\omega_1/5$.

i) Σε ποιά γωνιακή συχνότητα παρατηρείται η μέγιστη μεταφορά ισχύος από τη δύναμη προς το σύστημα;

ii) Ποιός είναι ο παράγοντας ποιότητας Q του συστήματος;

iii) Αν το σύστημα έχει στοιχεία (m, s) ποιά είναι η τιμή του συντελεστή τριβής r_1 στην έκφραση $F_{\tau\rho}=-r\upsilon$;

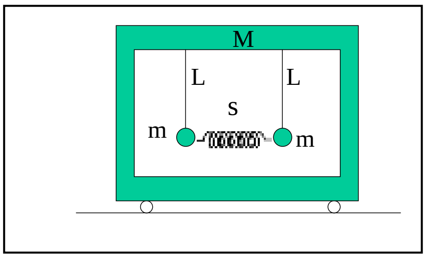
iv) Σχεδιάστε την καμπύλη συντονισμού μέσης ισχύος για $r=r_1$, $r=r_1/10$.

5. Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ακλόνητο στήριγμα με ελατήριο σταθεράς s και μηχανισμό που ασκεί τριβή της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho} = -r\vec{\upsilon}$, με r τέτοιο ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, οπότε η συνάρτηση της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας είναι της μορφής $x\left(t\right) = \left(A + Bt\right)e^{-\gamma t}, \left(\gamma = r/2m\right)$, $\left(\gamma^2 = \omega_0^2 \equiv \dfrac{s}{m} \Rightarrow r = 2\sqrt{sm}\right)$.

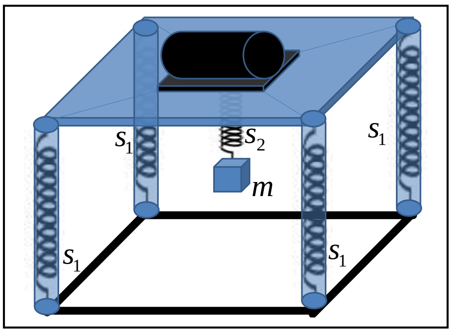
(α) Αν το σύστημα ξεκινά την κίνησή του την χρονική στιγμή $t=0$, με αρχική απομάκρυνση x_0 και αρχική ταχύτητα υ_0, υπολογίστε τις σταθερές *A* και *B*.

(β) Αν $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, δείξτε ότι το σύστημα <u>διέρχεται</u> από την θέση ισορροπίας μία μόνο φορά, υπολογίστε την αντίστοιχη χρονική στιγμή t_0, και την αντίστοιχη ταχύτητα διέλευσης.

(γ) Αν μεταβάλουμε τον συντελεστή τριβής σε νέα τιμή $r=\sqrt{sm}/2$, δείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με ασθενή απόσβεση και υπολογίστε τη συχνότητα αυτής της ταλάντωσης και τον συντελεστή ποιότητας *Q*.



6. Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας *m* και μήκους *L*, το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας *M*, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας *g*, και τα δύο εκκρεμή συνδέονται με ελατήριο σταθεράς s. Τα δύο εκκρεμή εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν μικρές ταλαντώσεις, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (*m, m, M*). (β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ: κοινή συχνότητα και φάση, διαφορετικά πλάτη) και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. (γ) Επιλύστε τη χαρακτηριστική εξίσωση, για την περίπτωση *m*=*M*, $(g/L)=(s/m)=\omega_0^2$, και προσδιορίστε τις συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0.

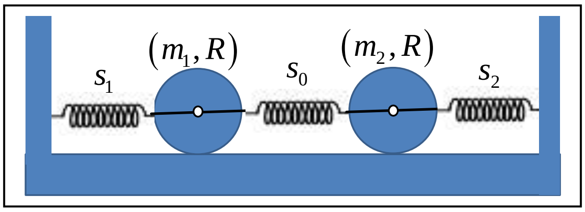


7. Ομοιογενής τετραγωνική τράπεζα στηρίζεται στα τέσσερα άκρα της με όμοια κατακόρυφα στηρίγματα, καθένα από τα οποία μπορεί να προσομοιωθεί με ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου s_1. Πάνω στην τράπεζα είναι προσαρμοσμένος ηλεκτρικός κινητήρας, έτσι ώστε τα κέντρα μάζας της τράπεζας και του κινητήρα να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο, το δε σύστημα Τράπεζα-Κινητήρας να έχει συνολική μάζα *M*. Από το κέντρο μάζας της τράπεζας είναι αναρτημένη, μέσω ελατηρίου σταθεράς s_2, μάζα *m*. Όταν ο κινητήρας βρίσκεται σε λειτουργία, με μία συχνότητα περιστροφής ω, τότε το σύστημα υφίσταται <u>περιοδική διέγερση που ισοδυναμεί με την εφαρμογή κατακόρυφης περιοδικής «εξωτερικής» δύναμης</u> $F(t)=F_0\cos(\omega t)$ στο κέντρο μάζας του συστήματος Τράπεζα-Κινητήρας.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των μαζών *M* (μετατόπιση: x_1) και *m* (μετατόπιση: x_2), δεχόμενοι ότι τα ελατήρια είναι ιδανικά και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

(β) Δεχθείτε ότι, στη μόνιμη κατάσταση κίνησης του συστήματος, οι δύο μάζες *M* και *m* κινούνται με τη συχνότητα ω, της «εξωτερικής» διέγερσης και με διαφορετικά πλάτη, έτσι ώστε οι απομακρύνσεις τους από τις θέσεις ισορροπίας να είναι $x_1(t)=A\cos(\omega t)$ και $x_2(t)=B\cos(\omega t)$, αντίστοιχα, και υπολογίστε τα πλάτη $A=A(\omega)$ και $B=B(\omega)$, συναρτήσει της εξωτερικής συχνότητας ω, και των υπολοίπων χαρακτηριστικών του συστήματος, με τη μορφή πηλίκου οριζουσών.

(γ) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β), εξηγήστε, για ποιά συχνότητα $\omega = \omega_{\kappa\rho} = ?$ του κινητήρα, ελαχιστοποιούνται οι κραδασμοί της τράπεζας M, λόγω της λειτουργίας του κινητήρα, και σχολιάστε («αντι-συντονισμός»).
(δ) Αν $s_1 = a s_2$ και $M = bm$, υπολογίστε, (συναρτήσει του $\omega_0^2 = s_2 / m$, και των *a, b*), τις τιμές της συχνότητας ω του κινητήρα για τις οποίες το πλάτος ταλάντωσης και των δύο μαζών *M* και *m* του συστήματος τείνει στο άπειρο και σχολιάστε.



8. Δίνεται η διάταξη του σχήματος με δύο ελατήρια σταθεράς $s_1 = s_2 = k$ και ένα ενδιάμεσο ελατήριο σταθεράς $s_0 = 2k$. Τα άκρα του ελατηρίου s_0 είναι συνδεδεμένα στα κέντρα C_1 και C_2 δύο πολύ λεπτών δίσκων μάζας *m* και ακτίνας *R*. Επίσης στα κέντρα C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένα, αντίστοιχα, το δεξιό και αριστερό ελατήριο *k*. Θεωρούμε ότι ανά πάσα χρονική στιγμή η όλη διάταξη παραμένει στο επίπεδο *xz* του σχήματος, τα ελατήρια είναι οριζόντια, οι δίσκοι εκτελούν κύλιση χωρίς ολίσθηση και οι συνδέσεις μεταφέρουν τις δυνάμεις των ελατηρίων στα κέντρα χωρίς να ακουμπούν τους δίσκους σε άλλα σημεία.
(α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος θεωρώντας ως μεταβλητές τις μετατοπίσεις x_1 και x_2 των C_1 και C_2 από την θέση ισορροπίας της διάταξης.
(β) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της διάταξης.
(γ) Περιγράψτε (είτε μετά από τον προσδιορισμό των $x_1(t)$ και $x_2(t)$, είτε πιο απλά σε αναλογία με άλλο γνωστό σύστημα) το είδος της κίνησης στους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

9. Ιδανική ελαστική χορδή, με γραμμική πυκνότητα $dm/dx = \rho$, εκτείνεται από $x \to -\infty$ μέχρι *x*=0, τείνεται με τάση T, και διαδίδεται πάνω της ένα δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα με μιγαδική αναπαράσταση $y_1(x,t) = Ae^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$. Το άκρο της χορδής που βρίσκεται στο *x*=0 είναι συνδεδεμένο σε μία διάταξη απορρόφησης των ταλαντώσεων, από την οποία υφίσταται εγκάρσια δύναμη $F_y = -b\upsilon_y$, όπου *b* μία θετική σταθερά απόσβεσης και υ_y η εγκάρσια ταχύτητα της χορδής στο *x*=0.
(α) Προσδιορίστε το κυματάνυσμα k_1 και το αντίστοιχο μήκος κύματος λ_1, συναρτήσει των (ρ, T, ω_1)
(β) Δείξτε ότι η οριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση απομάκρυνσης της χορδής από την κατάσταση ισορροπίας $y(x,t)$ στο σημείο *x*=0, είναι :
$$\left(-b\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x=0,t)}\right) - \left(T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x=0,t)}\right) = 0.$$
(β) Αν το ανακλώμενο κύμα, στο *x*=0, έχει τη μορφή $y_2(x,t) = Be^{i(\pm k_2 x - \omega_2 t)}$, να επιλεγεί το ορθό πρόσημο $(\pm)$ στον εκθέτη, να βρεθούν οι τιμές των ω_2, k_2, συναρτήσει των μέχρι στιγμής δεδομένων, και να υπολογιστεί ο συντελεστής ανάκλασης *r=B/A*.
(γ) Να υπολογιστεί μία κατάλληλη σταθερά απόσβεσης *b* (συναρτήσει των *T* και *ρ*) ώστε να μην υπάρχει καθόλου ανακλώμενο κύμα. Σχολιάστε το αποτέλεσμά σας σε σχέση με τη σύνθετη κυματική αντίσταση της χορδής (προσαρμογή αντιστάσεων για απόλυτη απορρόφηση).