ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ &
ΛΥΜΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Καθηγητής:

Κωνσταντίνος Κρικώνης

Μαθηματικός

Περιεχόμενα

1 Γραμμικά συστήματα

1.1 Θεωρία

1.1.1 Ορισμός

Ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων είναι ένα σύνολο από δύο ή περισσότερες γραμμικές εξισώσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές.

Παράδειγμα:

$a1x + b1y = c1$

$a2x + b2y = c2$

Τρόποι Παράστασης

- Αναλυτικά
- Πίνακας συντελεστών
- Πίνακας επαυξημένος

Τύποι Συστημάτων

- Συμβατό ορισμένο: μία λύση
- Συμβατό αόριστο: άπειρες λύσεις
- Ασύμβατο: καμία λύση

Γεωμετρική Ερμηνεία

Κάθε εξίσωση παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο. Οι σχετικές θέσεις τους δείχνουν το είδος του συστήματος.

Κριτήρια Συμβατότητας

Για σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

- Αν $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ → μία λύση (ορισμένο)
- Αν $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$ → καμία λύση (ασύμβατο)
- Αν $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ → άπειρες λύσεις (αόριστο)

1.2 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Σύστημα:

$x + y = 3$

$2x + 2y = 6$

Δεύτερη εξίσωση = $2\cdot(x + y)$ → ίδιες ευθείες → άπειρες λύσεις (αόριστο).

Άσκηση 2

$x + y = 5$

$2x + y = 7$

Αφαιρούμε (2) – (1):

$(2x + y) - (x + y) = 7 - 5$

$x = 2$

Βάζουμε στην (1):

$2 + y = 5 \rightarrow y = 3$

Λύση: $(x, y) = (2, 3) \rightarrow$ μία λύση.

Άσκηση 3

$2x + 3y = 4$

$4x + 6y = 8$

Η δεύτερη είναι 2·(πρώτη) → ίδιες ευθείες.

Άπειρες λύσεις.

Άσκηση 4

$x + 2y = 3$

$2x + 4y = 5$

Η δεύτερη θα ήταν 2·(πρώτη) = $2x + 4y = 6$, όμως δίνεται 5.

Άρα:

Παράλληλες και διαφορετικές ευθείες → Καμία λύση (ασύμβατο).

Άσκηση 5

$x - y = 1$

$2x - 2y = 2$

(2) = 2·(1) → ίδιες εξισώσεις.

Άπειρες λύσεις.

Άσκηση 6

$3x + y = 7$

$x - y = 1$

Λύνουμε με πρόσθεση:

$(3x + y) + (x - y) = 7 + 1$

$4x = 8 \rightarrow x = 2$

Στην (2):

$2 - y = 1 \rightarrow y = 1$

Λύση: $(x, y) = (2, 1) \rightarrow$ μία λύση.

Άσκηση 7

$x + 2y = 6$

$2x + 4y = 12$

Η δεύτερη = 2·(πρώτη) → ίδια ευθεία.

Άπειρες λύσεις.

Άσκηση 8

$x + 2y = 4$

$2x + 4y = 8$

Η δεύτερη = 2·(πρώτη) → ίδια ευθεία.

Άπειρες λύσεις.

Άσκηση 9

$x - 2y = 3$

$2x - 4y = 7$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη με 2:

$2x - 4y = 6$, όμως στη δεύτερη είναι 7.

Διαφορετικές παράλληλες ευθείες → καμία λύση.

Ασύμβατο.

Άσκηση 10

$x + y = 4$

$x - y = 2$

Πρόσθεση:

$(x + y) + (x - y) = 4 + 2$

$2x = 6 \rightarrow x = 3$

Βάζουμε στην πρώτη:

$3 + y = 4 \rightarrow y = 1$

Λύση: $(x, y) = (3, 1)$ → μία λύση.

2 Ιδιότητες Συναρτήσεων

2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- Αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ, αν για κάθε $x1, x2 \in \Delta$ με $x1 < x2$ ισχύει $f(x1) \leq f(x2)$.
- Φθίνουσα σ’ ένα διάστημα Δ, αν για κάθε $x1, x2 \in \Delta$ με $x1 < x2$ ισχύει $f(x1) \geq f(x2)$.
- Σταθερή σ’ ένα διάστημα, αν $f(x1) = f(x2)$ για κάθε $x1, x2 \in \Delta$.

Η μονοτονία εκφράζει το πώς μεταβάλλεται η συνάρτηση (αν «ανεβαίνει» ή «κατεβαίνει»).

2. Ακρότατα Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f παρουσιάζει:

- Μέγιστο στο $x0$ αν $f(x0) \geq f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού.
- Ελάχιστο στο $x0$ αν $f(x0) \leq f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού.

Τα σημεία αυτά λέγονται «ακρότατα» και οι αντίστοιχες τιμές «ακραίες τιμές».

3. Συμμετρίες Συνάρτησης

Η συνάρτηση f λέγεται:

- Άρτια αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (συμμετρία ως προς τον άξονα y’y).
- Περιττή αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων).
- Αν δεν ισχύει καμία από τις δύο σχέσεις, η συνάρτηση δεν έχει συμμετρία.

4. Σημειώσεις

- Η συμμετρία και η μονοτονία δεν εξαρτώνται μόνο από τη μορφή του τύπου αλλά και από το πεδίο ορισμού.
- Οι γραφικές παραστάσεις βοηθούν οπτικά στον εντοπισμό της μονοτονίας και των ακροτάτων.

2.2 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

$f(x) = 2x + 3$

Πρόκειται για **γραμμική συνάρτηση** της μορφής $f(x) = ax + b$με $a = 2 > 0$.

Για $x_1 < x_2$έχουμε:

$$f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 + 3) - (2x_1 + 3) = 2(x_2 - x_1)$$

και επειδή $x_2 - x_1 > 0$, παίρνουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Συμπέρασμα:

Η f είναι **αύξουσα** σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δεν παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο (ευθεία).

Άσκηση 2

f(x) = -x + 1

Πάλι γραμμική συνάρτηση, με κλίση $a = -1 < 0$.

Για $x_1 < x_2$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (-x_2 + 1) - (-x_1 + 1) = -(x_2 - x_1)$$

και επειδή $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Συμπέρασμα:

Η f είναι **φθίνουσα** σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δεν έχει ακρότατα.

Άσκηση 3

f(x) = x^2

Γνωρίζουμε ότι η παράβολη $y = x^2$«ανοίγει προς τα πάνω» και έχει κορυφή στο $x = 0$.

Γράφουμε:

$$f(x) = x^2$$

Για $x < 0$, αν πάρουμε $x_1 < x_2 < 0$, τότε σε απόλυτες τιμές $|x_1| > |x_2|$, άρα:

$$f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$$

⇒ όσο πλησιάζουμε το 0 από αριστερά, οι τιμές της f **μειώνονται** ⇒ η f είναι **φθίνουσα** στο $(-\infty, 0]$.

Για $x > 0$, αν $0 < x_1 < x_2$, τότε:

$$x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

⇒ η f είναι **αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

Στο $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 = 0$$

και για κάθε άλλο x, $x^2 \geq 0$, με ισότητα μόνο στο 0.

Συμπέρασμα:

Η f **φθίνει** στο $(-\infty, 0]$.

Η f **αυξάνει** στο $[0, +\infty)$.

Παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x = 0$με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$.

Άσκηση 4

f(x) = -x²

Εδώ η παράβολη «ανοίγει προς τα κάτω» και η κορυφή είναι πάλι στο $x = 0$.

$$f(x) = -x^2$$

Για $x < 0$: αν $x_1 < x_2 < 0$, όπως πριν ισχύει | x_1 |>| x_2 |⇒ $x_1^2 > x_2^2$, άρα:

$$f(x_1) = -x_1^2 < -x_2^2 = f(x_2)$$

⇒ καθώς πάμε προς τα δεξιά (προς το 0), οι τιμές **μεγαλώνουν** ⇒ η f είναι **αύξουσα** στο $(-\infty, 0]$.

Για $x > 0$: αν $0 < x_1 < x_2$, τότε $x_1^2 < x_2^2$⇒

$$f(x_1) = -x_1^2 > -x_2^2 = f(x_2)$$

⇒ καθώς πάμε προς τα δεξιά, οι τιμές **μειώνονται** ⇒ η f είναι **φθίνουσα** στο $[0, +\infty)$.

Στο $x = 0$:

$$f(0) = 0$$

και για κάθε άλλο x, $-x^2 \leq 0$.

Συμπέρασμα:

Η f **αυξάνει** στο $(-\infty, 0]$.

Η f **φθίνει** στο $[0, +\infty)$.

Παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x = 0$με μέγιστη τιμή $f(0) = 0$.

Άσκηση 5

f(x) = x³

Για πολυώνυμο τρίτου βαθμού της μορφής x^3, γνωρίζουμε ότι η γραφική είναι «S» και περνά από την αρχή.

Μπορούμε να δούμε τη διαφορά:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)$$

Αν $x_1 < x_2$, τότε:

$$x_2 - x_1 > 0$$

$x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$(άθροισμα τετραγώνων και γινομένου)

Άρα συνολικά $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Συμπέρασμα:

Η f είναι **αύξουσα σε όλο το** $\mathbb{R}$.

Δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο (ούτε τοπικό ούτε γενικό).

Άσκηση 6

f(x) = |x|

Ορίζουμε:

$$f(x) = |\, x \,| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Για $x \leq 0$: $f(x) = -x$, γραμμική με κλίση $a = -1 < 0$? Προσοχή: εδώ επειδή xείναι αρνητικός, κοιτάμε ως προς το x:

$$f(x) = -x \Rightarrow \text{ κλίση } -1 < 0 \Rightarrow f \text{ είναι φθίνουσα ως προς το x}$$

αλλά επειδή καθώς κινούμαστε προς τα **δεξιά** (προς το 0), το x αυξάνει (π.χ. -5,-4,-3,...,0), οι τιμές $-x$γίνονται **μεγαλύτερες**.
Άρα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, η f **φθίνει** όταν πηγαίνουμε προς τα **αριστερά** και **αυξάνει** προς τα δεξιά — ως συνάρτηση όμως με βάση τον ορισμό μονοτονίας,

για $x_1 < x_2 \leq 0$:

$$f(x_1) = -x_1 > -x_2 = f(x_2)$$

⇒ **φθίνουσα** στο $(-\infty, 0]$.

Για $x \geq 0$: $f(x) = x$, άρα για $0 \leq x_1 < x_2$:

$$f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$$

$\Rightarrow$ **αύξουσα** στο $[0, +\infty)$.

Στο $x = 0$:

$$f(0) = | 0 | = 0$$

και για κάθε άλλο x, $| x | \geq 0$.

Συμπέρασμα:

Η f **φθίνει** στο $(-\infty, 0]$.

Η f **αυξάνει** στο $[0, +\infty)$.

Έχει **ελάχιστο** στο $x = 0$με ελάχιστη τιμή 0.

Άσκηση 7

f(x) = sinx

Από τη γραφική της $\sin x$(στο $\mathbb{R}$) ξέρουμε:

Στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$η γραφική «ανεβαίνει» από -1σε $+1$. Άρα η f είναι **αύξουσα** εκεί.

Στο $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$η γραφική «κατεβαίνει» από 1σε -1. Άρα η f είναι **φθίνουσα** εκεί.

Ακρότατα:

Μέγιστη τιμή: 1, η οποία επιτυγχάνεται στο $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ελάχιστη τιμή: -1, η οποία επιτυγχάνεται στο $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Σύμφωνα με τη διατύπωση της άσκησης:

Αυξάνει στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Φθίνει στο $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

Μέγιστο $f = 1$, **Ελάχιστο** $f = -1$.

Άσκηση 8

f(x) = cosx

Από τη γραφική της $\cos x$:

Στο διάστημα $[0, \pi]$η cos ξεκινά από 1 (στο 0) και πηγαίνει στο -1 (στο π), άρα **φθίνει** εκεί.

Στο $[\pi, 2\pi]$πάει από -1 στο 1, άρα **αυξάνει** εκεί.

Ακρότατα:

Μέγιστο: 1όταν $x = 2k\pi$,

Ελάχιστο: -1όταν $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Συμπέρασμα:

Η f είναι **φθίνουσα** στο $[0, \pi]$.

Η f είναι **αύξουσα** στο $[\pi, 2\pi]$.

Άσκηση 9

f(x) = x^2 - 4x + 3

Πρόκειται για δευτεροβάθμια συνάρτηση. Ολοκληρώνουμε το τετράγωνο:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 1 = (x - 2)^2 - 1$$

Η παράβολη ανοίγει προς τα πάνω (συντελεστής $1 > 0$) και έχει κορυφή στο:

$$x = 2, f(2) = (2 - 2)^2 - 1 = -1$$

Άρα:

Για $x < 2$, καθώς πλησιάζουμε το 2, το $(x - 2)^2$μειώνεται ⇒ f **φθίνει** στο $(-\infty, 2]$.

Για $x > 2$, το $(x - 2)^2$αυξάνεται ⇒ f **αυξάνει** στο $[2, +\infty)$.

Συμπέρασμα:

Η f **φθίνει** στο $(-\infty, 2]$.

Η f **αυξάνει** στο $[2, +\infty)$.

Παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x = 2$με $f(2) = -1$.

Άσκηση 10

f(x) = x^3 - 3x

Εδώ χρησιμοποιείται η παράγωγος (όπως γράφει και το αρχείο σου).

Υπολογίζουμε:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

Μελετάμε το πρόσημο της f':

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) > 0$$

Το γινόμενο δύο παραγόντων είναι θετικό όταν είναι **ομόσημοι**:

Και οι δύο θετικοί: $x > 1$

Και οι δύο αρνητικοί: $x < -1$

Άρα:

Για $x < -1$: $f'(x) > 0$⇒ η f είναι **αύξουσα**.

Για $-1 < x < 1$: $f'(x) < 0$⇒ η f είναι **φθίνουσα**.

Για $x > 1$: $f'(x) > 0$⇒ η f είναι πάλι **αύξουσα**.

Ακρότατα:

Στο $x = -1$:
Πριν το -1 (π.χ. -2) η f αυξάνει, μετά το -1 (π.χ. 0) φθίνει ⇒ στο -1 έχουμε **τοπικό μέγιστο**.

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

Στο $x = 1$:
Πριν το 1 η f φθίνει, μετά το 1 αυξάνει ⇒ στο 1 έχουμε **τοπικό ελάχιστο**.

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$$

Συμπέρασμα:

Η f **αυξάνει** στα $(-\infty, -1)$και $(1, +\infty)$.

Η f **φθίνει** στο $(-1,1)$.

Έχει **τοπικό μέγιστο** στο $x = -1$με $f(-1) = 2$.

Έχει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 1$με $f(1) = -2$.

Κατακορυφή – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

1. Κατακορυφή Μετατόπιση

Αν η συνάρτηση f(x) έχει γραφική παράσταση C, τότε:
- Η συνάρτηση g(x) = f(x) + k προκύπτει από τη C με **κατακόρυφη μετατόπιση** κατά k μονάδες.
  - Αν k > 0 → προς τα πάνω
  - Αν k < 0 → προς τα κάτω

Παράδειγμα:
Η f(x) = x^2 έχει κορυφή (0,0).
Η g(x) = x^2 + 2 έχει κορυφή (0,2) → η γραφική παράσταση μετατοπίζεται **2 μονάδες πάνω**.

2. Οριζόντια Μετατόπιση
Η συνάρτηση g(x) = f(x – α) προκύπτει από τη f(x) με **οριζόντια μετατόπιση** κατά α μονάδες:

- Αν α > 0 → προς τα **δεξιά**
- Αν α < 0 → προς τα **αριστερά**

Παράδειγμα:
Η $f(x) = x^2$ έχει κορυφή (0,0).
Η $g(x) = (x - 3)^2$ έχει κορυφή (3,0) → μετατόπιση **3 μονάδες δεξιά**.

3. Συνδυασμός Μετατοπίσεων
Αν $g(x) = f(x - α) + k$, τότε η γραφική παράσταση της f:
- Μετατοπίζεται **οριζόντια** κατά α μονάδες (δεξιά ή αριστερά)
- Και **κατακόρυφα** κατά k μονάδες (πάνω ή κάτω)

4. Σημείωση
Οι μετατοπίσεις δεν αλλάζουν το «σχήμα» της καμπύλης, μόνο τη **θέση της στο επίπεδο**.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

$f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+1$ → Μετατόπιση 1 μονάδα πάνω.

Άσκηση 2

$f(x)=x^2$, $g(x)=x^2-2$ → Μετατόπιση 2 μονάδες κάτω.

Άσκηση 3

$f(x)=x^2$, $g(x)=(x-3)^2$ → Μετατόπιση 3 μονάδες δεξιά.

Άσκηση 4

$f(x)=x^2$, $g(x)=(x+4)^2$ → Μετατόπιση 4 μονάδες αριστερά.

Άσκηση 5

$f(x)=x^2$, $g(x)=(x-1)^2+2$ → Μετατόπιση 1 δεξιά και 2 πάνω.

Άσκηση 6

$f(x)=x^2$, $g(x)=(x+2)^2-3$ → Μετατόπιση 2 αριστερά και 3 κάτω.

Άσκηση 7

$f(x)=|x|$, $g(x)=|x-1|$ → Μετατόπιση 1 δεξιά.

Άσκηση 8

$f(x)=|x|$, $g(x)=|x|-2$ → Μετατόπιση 2 κάτω.

Άσκηση 9

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin(x-\pi/2)$ → Μετατόπιση κατά $\pi/2$ δεξιά.

Άσκηση 10

f(x)=cosx, g(x)=cosx+1 → Μετατόπιση 1 μονάδα πάνω.

3 Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

1. Ορισμός Τριγωνομετρικών Αριθμών

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία στο Β και οξεία γωνία Α = θ.

Ορίζουμε:

- ημίτονο: ημθ = απέναντι κάθετη / υποτείνουσα
- συνημίτονο: συνθ = προσκείμενη κάθετη / υποτείνουσα
- εφαπτομένη: εφθ = απέναντι κάθετη / προσκείμενη κάθετη
- συνεφαπτομένη: συνθ = 1 / εφθ = προσκείμενη κάθετη / απέναντι κάθετη

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί συνδέουν πλευρές και γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου.

2. Βασικές Σχέσεις

- $ημ^2θ + συν^2θ = 1$

- εφθ = ημθ / συνθ
- συνθ = 1 / εφθ

3. Σχέσεις Συμπληρωματικών Γωνιών

Αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές, δηλαδή α + β = 90°, τότε:
- ημ(90° – θ) = συνθ
- συν(90° – θ) = ημθ
- εφ(90° – θ) = συνθ
- συν(90° – θ) = εφθ

4. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί σε Άξονες

Για γωνίες που τοποθετούνται στο καρτεσιανό επίπεδο:
Αν M(x, y) σημείο του μοναδιαίου κύκλου, τότε:
- ημθ = y
- συνθ = x
- εφθ = y/x (όταν x ≠ 0)

5. Θετικές και Αρνητικές Τιμές

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί παίρνουν πρόσημο ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η γωνία θ:

Τεταρτημόριο	ημθ	συνθ	εφθ
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

6. Σημαντικές Γωνίες

Για γωνίες 0°, 30°, 45°, 60°, 90° ισχύουν:

θ	ημθ	συνθ	εφθ
0°	0	1	0
30°	1/2	√3/2	1/√3
45°	√2/2	√2/2	1

60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	–

3.2 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=30°, να υπολογιστούν οι λόγοι ημΑ, συνΑ, εφΑ.
Λύση: $ημ30° = 1/2$, $συν30° = \sqrt{3}/2$, $εφ30° = 1/\sqrt{3}$.

Άσκηση 2

Αν $ημθ = 3/5$, βρες συνθ.
Λύση: $συνθ = \sqrt{1-(3/5)^2} = 4/5$.

Άσκηση 3

Αν $συνθ = 4/5$ και θ στο 4ο τεταρτημόριο, να βρεθεί ημθ.
Λύση: $ημθ = -\sqrt{1-(4/5)^2} = -3/5$.

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι για κάθε θ, εφθ·συνθ=1.
Λύση: Από τους ορισμούς εφθ=1/συνθ ⇒ το γινόμενο είναι 1.

Άσκηση 5

Αν ημθ=0.6 και συνθ=0.8, υπολογίστε εφθ.
Λύση: εφθ=0.6/0.8=0.75.

Άσκηση 6

Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45°.
Λύση: ημ45°=√2/2, συν45°=√2/2, εφ45°=1.

Άσκηση 7

Αν θ στο 2ο τεταρτημόριο και ημθ=3/5, βρες συνθ.
Λύση: συνθ=$-\sqrt{(1-(3/5)^2)}=-4/5$.

Άσκηση 8

Αν εφθ=2, υπολόγισε ημθ και συνθ.
Λύση: εφθ=ημθ/συνθ⇒θέτουμε συνθ=1⇒ημθ=2⇒κανονικοποιούμε: διαιρούμε με $\sqrt{(1^2+2^2)}=\sqrt{5}$ ⇒ ημθ=$2/\sqrt{5}$, συνθ=$1/\sqrt{5}$.

Άσκηση 9

Αν ημθ=4/5, να υπολογιστεί η συν(90°−θ).
Λύση: συν(90°−θ)=ημθ=4/5.

Άσκηση 10

Αν συνθ=0.6, υπολόγισε ημ(90°−θ).
Λύση: ημ(90°−θ)=συνθ=0.6.

3.3 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1. Ορισμοί

Οι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι:

- y = ημx
- y = συνx
- y = εφx

Αποτελούν επεκτάσεις των τριγωνομετρικών αριθμών σε όλες τις πραγματικές τιμές του x (σε ακτίνια).

2. Πεδίο Ορισμού και Σύνολο Τιμών

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Σύνολο τιμών
ημx	R	[-1, 1]
συνx	R	[-1, 1]

εφx	R \ {π/2 + κπ, κ∈Z}	R

3. Περιοδικότητα
- Η ημx και συνx είναι **περιοδικές** με περίοδο 2π.
- Η εφx είναι **περιοδική** με περίοδο π.

4. Συμμετρίες
- ημ(−x) = −ημx ⇒ περιττή
- συν(−x) = συνx ⇒ άρτια
- εφ(−x) = −εφx ⇒ περιττή

5. Γραφικές Παραστάσεις
- y = ημx: κυματική μορφή που ξεκινά από (0,0), φτάνει στο 1 στο π/2, στο 0 στο π, στο −1 στο 3π/2, στο 0 στο 2π.
- y = συνx: όμοια μορφή με μέγιστο 1 στο x=0 και ελάχιστο −1 στο x=π.
- y = εφx: έχει ασύμπτωτες στις x = π/2 + κπ, διέρχεται από την αρχή (0,0) και είναι μονότονα αύξουσα σε κάθε διάστημα ορισμού.

6. Σχέσεις μεταξύ των Συναρτήσεων

- $ημ^2x + συν^2x = 1$
- εφx = ημx / συνx, όταν συνx ≠ 0

7. Παρατηρήσεις

- Όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι **περιοδικές**.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις επαναλαμβάνονται ανά περίοδο.
- Οι τιμές τους σχετίζονται με τις συντεταγμένες σημείων στον μοναδιαίο κύκλο.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x)=εφx.
Λύση: Ορίζεται όταν συνx≠0 ⇒ x ≠ π/2 + κπ, κ∈Z.

Άσκηση 2

Να βρεθεί η περίοδος της $f(x)=ημx$.

Λύση: Περίοδος $T=2π$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η περίοδος της $f(x)=εφx$.

Λύση: Περίοδος $T=π$.

Άσκηση 4

Να αποδειχθεί ότι η ημx είναι περιττή συνάρτηση.

Λύση: $ημ(-x)=-ημx \Rightarrow$ περιττή.

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι η συνx είναι άρτια συνάρτηση.

Λύση: $συν(-x)=συνx \Rightarrow$ άρτια.

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί η $f(\pi/6)=\eta\mu(\pi/6)=1/2$.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η $f(\pi/3)=\sigma\upsilon\nu(\pi/3)=1/2$.

Άσκηση 8

Να βρεθεί το $f(\pi)=\varepsilon\varphi(\pi)=0$.

Άσκηση 9

Να δείξετε ότι η $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ για κάθε x.
Λύση: Ισχύει από τον ορισμό στον μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 10

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)=εφx$.

Λύση: $f(x) \in R$, γιατί η εφx μπορεί να πάρει κάθε πραγματική τιμή.