ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟ 1988

ΘΕΜΑΤΑ 1988

1η ΔΕΣΜΗ

ΖΗΤΗΜΑ 3ον

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=x+1+$\frac{1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f , τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=2 , x=5 .

4η ΔΕΣΜΗ

ΖΗΤΗΜΑ 3ον

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^2 \frac{x^3-5x^2+1}{x}dx$.

………………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 1989

1η ΔΕΣΜΗ

3. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=ημ(2x+$\frac{\pi}{2}$) και πεδίο ορισμού το διάστημα [-$\frac{\pi}{4}$,$\frac{\pi}{4}$].

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_o=\frac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη , τη γραφική παράσταση της f και από τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy .

4η ΔΕΣΜΗ

4. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Να αποδειχθεί ότι :

α) Η συνάρτηση f με f(x)=$\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα .

β) Για κ$\geq$1 ισχύουν : $\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1}\sqrt{x}dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa}\sqrt{x}dx \leq \sqrt{\kappa}$.

………………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 1990

1η ΔΕΣΜΗ

5. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=3x+$\frac{1}{2x^2}$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της ευθείας με εξίσωση y=3x και των ευθειών με εξισώσεις x=1 και x=α με α>1 .

γ) Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού Ε(α) του ανωτέρου χωρίου όταν το α τείνει στο $+\infty$.

4η ΔΕΣΜΗ

6. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f με $f(x)=x^2e^x$, τον άξονα x΄x και των ευθειών με εξισώσεις x=1 και x=3.

………………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 1991

1η ΔΕΣΜΗ

7. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον**

Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi^\nu x dx$, $\nu \in N^*$, τότε

α) να αποδείξετε ότι για κάθε ν>2 , ισχύει $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$

β) να υπολογίσετε το I_5 .

8. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, x>0 .

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=4 .

4η ΔΕΣΜΗ

9. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον (4η ΔΕΣΜΗ-1991)**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^x - e, x<1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, x \geq 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου , το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=e .

………..

ΘΕΜΑΤΑ 1992

1η ΔΕΣΜΗ

10. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x \in \Re$.Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x , y) με $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq f(x)$.

4η ΔΕΣΜΗ

11. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον**

α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $E(t)=\int_1^t (x-2)\ln x dx$, για κάθε t>1 .

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{t\to+\infty} \frac{E'(t)}{t \cdot \ln t}$.

12. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Να βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^3+\beta x+\gamma$, $x \in \Re$ και α , β , γ πραγματικούς αριθμούς , η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :

(i) Η συνάρτηση f είναι περιττή .

(ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_o=1$.

(iii) $\int_0^2 f(x)dx = 2$.

13. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα [0 , π] και $g(\pi)=e^{-\pi}$.

Αν $\int_o^\pi [g(x)+g'(x)]e^x dx = 2$,να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g στο σημείο x=0.

………..

ΘΕΜΑΤΑ 1993

1η ΔΕΣΜΗ

14. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}+4$ με $x>0$.

α) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt$.

15. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει :

$$\int_\alpha^x e^{-t}f(t)dt = e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x) \quad \text{με } x, \alpha\in\Re .$$

4η ΔΕΣΜΗ

16. ΖΗΤΗΜΑ 2ον

Αν η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα [0 , 1] και ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^1 xg'(x)dx=1993-\int_0^1 g(x)dx$, να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g για x =1 .

17. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\nu x}$, $x\in\Re$,όπου ν μη μηδενικός φυσικός αριθμός .

Α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της .

Β) Να αποδείξετε ότι : $2\le e^2\nu^2\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx\le e$.

………

ΘΕΜΑΤΑ 1994

1η ΔΕΣΜΗ

18. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2$, $x\in\Re$.

Α) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha>0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C , την ευθεία ε και τον άξονα y΄y .

Β) Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία ΜΟ , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων . Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται (α >0) .

4η ΔΕΣΜΗ

19. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$, η οποία έχει συνεχή f'' στο $\Re$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_o=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0 , 1) .Αν ισχύει $\int_0^2[x\cdot f''(x)+3\cdot f'(x)]dx=-\dfrac{8}{3}$, να υπολογίσετε το f(2) .

y

………

ΘΕΜΑΤΑ 1995

$1^η$ ΔΕΣΜΗ

20. ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$

Η συνάρτηση $f: \Re \to \Re$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f\,'(x)>0$, για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dt$, $x \in \Re$ με α , β πραγματικούς αριθμούς , είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $x_o \in \Re$ με $F'(x_o)=0$, τότε $F(x)=0$ για κάθε $x \in \Re$.

21. ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α , β με $0<\alpha<\beta$, τη συνεχή συνάρτηση $f:(0, +\infty) \to \Re$ για την οποία $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=0$ και τη συνάρτηση $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_o, g(x_o))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x .

β) $g(x_o)=2+f(x_o)$.

22. ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν :

$f(0)=1995$, $f\,'(0)=1$, $1+\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt=\sigma\upsilon\nu^2 x+\int_0^x f'(t)\eta\mu t\,dt$

$4^η$ ΔΕΣΜΗ

23. ΖΗΤΗΜΑ $4^{ον}$

Αν $G(x)=\int_1^x f(t)dt$, όπου $f(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και $x>0$, $t>0$ να βρείτε :

α) την $G''(1)$

β) το $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$

……………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 1996

$1^η$ ΔΕΣΜΗ

24. ΖΗΤΗΜΑ $4^{ον}$

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση : $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx = f(x)+e^x$, για κάθε $x \in \Re$.

25. ΖΗΤΗΜΑ $4^{ον}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α , β] και ισχύει ότι $f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, όπου c πραγματικός αριθμός . Να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=(\beta-\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$.

26. ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$

Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο $\Re$ και $f(x)=\int_0^x (x-t)g(t)dt$.Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα όταν $g(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

$4^η$ ΔΕΣΜΗ

27. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\sqrt{x}$ και $f(x)=2x-1$ και την ευθεία $x=0$.

28. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\lambda x$, $\lambda\in\Re$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{f^2(x)}dx$.

………..

ΘΕΜΑΤΑ 1997

4η ΔΕΣΜΗ

29. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Οι συναρτήσεις f , g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\Re$ και ικανοποιούν τις σχέσεις $f''(x)-g''(x)=4$ για κάθε $x\in\Re$, $f'(1)=g'(1)$ και $f(2)=g(2)$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(x)=f(x)-g(x)$, $x\in\Re$.

β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

30. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Έστω α , $\beta\in\Re$ και $\alpha<\beta$. Να αποδειχθεί ότι :

α) $f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β) $2\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx\le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha)$.

31. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ο</u>

Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\Re$,τέτοια ώστε $f(x)\ge 2$ για κάθε $x\in\Re$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2-5x+1-\displaystyle\int_0^{x^2-5x}f(t)dt$, $x\in\Re$.

α) Να αποδείξετε ότι $g(-3)g(0)<0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3,0)$.

………..

ΘΕΜΑΤΑ 1998

1η ΔΕΣΜΗ

32. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύουν $f(x)>0$, $f'(x)+2xf(x)=0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f .

β) Να δείξετε ότι $\dfrac{x-1}{2x^2}f(x)<\displaystyle\int_1^x\frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{x-1}{2}$, $x>1$.

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(x)=\displaystyle\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt$, $x>1$.

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\cdot\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt<1$, για κάθε x μεγαλύτερο του ένα .

4η ΔΕΣΜΗ

33. __**ΖΗΤΗΜΑ 2ον**__

Δίνεται η συνάρτηση φ(t) = 2t + μ , t$\in \Re$, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός . Μια επιχείρηση έχει έσοδα E(t) που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές , με τον τύπο E(t) = (t-1)φ(t) , t$\geq$0 , όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη .Το κόστος λειτουργίας K(t) της επιχείρησης δίνεται , επίσης σε εκατομμύρια δραχμές , σύμφωνα με τον τύπο K(t) = φ(t+4) , t$\geq$0 .

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους P(t) , για t$\geq$0 , όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές .

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη ;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους ;

δ) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \frac{111}{2}\int_0^6 P(t)dt$.

34. __**ΖΗΤΗΜΑ 3ον**__

Δίνεται η συνάρτηση h(x) = $2^{12}(e^{-4x} - e^{-\alpha x})$, x$\geq$0 , όπου α πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4 .

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} h(x) = h(0) = 0$.

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση h(x) .

γ) Αν x_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της h(x) , να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x_1 , x_2 .

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $M = \frac{334}{75}\int_0^{\ln 2} h(x)dx$, όταν α = 8 .

………..

__ΘΕΜΑΤΑ 1999__

__1η ΔΕΣΜΗ__

35. __**ΖΗΤΗΜΑ 4ον**__

Δίνονται οι συναρτήσεις f(t)=$\frac{2t+3}{t+2}$, t$\in$[1 , 4] και g(x)= $\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$,x>0.

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t)dt$.

β) Να αποδείξετε ότι : $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε t$\in$[1 , 4] και x>0.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

36. __**ΖΗΤΗΜΑ 4ον**__

Έστω h : [1 , +∞) $\to \Re$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

h(x) = 1999(x-1) + $\int_1^x \frac{h(t)}{t}dt$, για κάθε x$\geq$1 . Να αποδείξετε ότι :

α) h(x) = 1999xlnx , x$\geq$1 .

β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο [1 , +∞) .

__4η ΔΕΣΜΗ__

37. __**ΖΗΤΗΜΑ 3ον (4η ΔΕΣΜΗ-1999)**__

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $x^3 - 6x^2+9x+1$, x$\in \Re$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι f(x) > 0 για κάθε x$\in$[1 , 3] .

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=3 .

………..

__ΘΕΜΑΤΑ 2000__

$1^η$ ΔΕΣΜΗ

38. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Έστω f : $\Re \to \Re$ συνάρτηση συνεχής στο $\Re$. Έστω Ι : $\Re \to \Re$ η συνάρτηση με

Ι(x) = $\int_0^1 [(f(t))^2 - 2xt^2 f(t) + x^2 t^4]dt$, για x$\in \Re$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Ι παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o = 5\int_0^1 t^2 f(t)dt$.

$4^η$ ΔΕΣΜΗ

39. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $\Re$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$.

β) Έστω ότι $4\int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx$ +2004 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ $\in$(1 , 7) τέτοιο , ώστε f(ξ) = 334 .

40. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση f : $\Re \to \Re$ που ικανοποιεί την ισότητα :

$\int_0^x (1+t^2)f(t)dt$ = x^2 + $\int_0^1 6x(t^2+t)dt$, x$\in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι f(x) = $\frac{2x+5}{x^2+1}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(0 , f(0)) .

……..

<u>ΘΕΜΑΤΑ 2001</u>

$1^η$ ΔΕΣΜΗ

41. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με f(x) = x^2 - 4x +3 , x$\in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) + f(y) = 0 με x , y $\in \Re$, παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x .

<u>ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ</u>

42. <u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον</u>

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο : f(x) = $f\;\; x\;\; = \begin{cases} ax^2 , & x \le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α) Αν η f είναι συνεχής , να αποδείξετε ότι α = - $\frac{1}{9}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4 , f(4)) .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 2 .

43. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u> Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Re$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)dt$, για κάθε $x \in \Re$. Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in \Re$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή .

γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty}$ (xf(x)ημ2x) .

1η ΔΕΣΜΗ

44. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = x_o$, όπου x_o είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f .

45. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει : $\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}$, για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0 , f(0)) .

4η ΔΕΣΜΗ

46. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$\int_\alpha^\beta f'(x)e^{f(x)}dx = 0$, όπου α , β $\in \Re$ με α < β . Να αποδείξετε ότι :

α) f(α) = f(β) .

β) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α , β) .

47. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = λ , x = λ+1 , όπου λ > 0 , είναι $E(\lambda) = 2\lambda+1+4\ln(1+\frac{1}{\lambda})$.

β) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν Ε(λ) γίνεται ελάχιστο.

48. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x x\sigma\upsilon\nu t\,dt$, $x \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι $g''(x) = 2$συνx – xημx , $x \in \Re$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(\frac{\pi}{2}, g(\frac{\pi}{2}))$.

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

49. <u>ΖΗΤΗΜΑ 1ον</u> Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα α) $\int_0^1 (e^x + x)dx$ β) $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$ γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx$

50. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο (0,+∞) για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{t f(t)}{x^2} dt, \quad x>0$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞).

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}, \quad x>0$

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=e.

……………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 2002

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

51. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

α) Έστω δύο συναρτήσεις h , g συνεχείς στο [α , β] . Να αποδείξετε ότι αν

h(x) > g(x) για κάθε x∈[α , β] , τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\Re$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις : $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in \Re$ και f(0) = 0 .

i) Να εκφραστεί η f ΄ ως συνάρτηση της f .

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf΄(x)$, για κάθε x > 0 .

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες x = 0 , x = 1 και τον άξονα x΄x , να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$.

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

52. ΖΗΤΗΜΑ 2ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

α).Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β).Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ).Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx$

53. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$f΄΄(x)f(x)+(f΄(x))^2=f(x)f΄(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=2f΄(0)=1$.

α).Να προσδιορίσετε την συνάρτηση f.

β).Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt = 1$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0,1)

……..

ΘΕΜΑΤΑ 2003

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

54. ΖΗΤΗΜΑ 3ον (Γ ΘΕΤΙΚΗ-ΙΟΥΝΙΟΣ 2003)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση .

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \Re$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0 , 0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x = 3 .

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

55. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **.**

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$ **.**

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ **.**

……..

ΘΕΜΑΤΑ 2004

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

56. **ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$**

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\Re$ και $f(0) = f(\frac{3}{2}) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0\ ,\ \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f\,'(\xi) = -f(\xi)$.

β) Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx$, $\alpha \in \Re$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$.

57. **ΖΗΤΗΜΑ $4^{ον}$**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$. Αν για κάθε $x \in \Re$, ισχύει

$g(x) = \int_{1}^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$, όπου $z = \alpha + \beta i \in C$, με $\alpha , \beta \in \Re^*$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και να βρείτε τη g'.

β) Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

γ) Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -\frac{1}{2}$.

δ) Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (2\ ,\ 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$.

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

58. **ΖΗΤΗΜΑ 2ον**

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: IR → IR με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ IR .

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

59. **ΖΗΤΗΜΑ 4ο**

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, +∞) → IR τέτοια, ώστε $f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞).

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο [0, +∞).

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

………..

ΘΕΜΑΤΑ 2005

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

60. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda\chi}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η y = λex. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$.

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$.

61. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in$ IR και f(0) = 0.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu\chi}$.

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$.Δείξτε ότι h(x)=g(x)για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt = \dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1).

<u>ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ</u>

62. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ο</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2} = 2005$.

α. Να δείξετε ότι:

i. f(0)=0

ii. f΄(0)=1.

β. Να βρείτε το $\lambda \in$ IR έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda\ f(x)^{\ 2}}{2x^2+\ f(x)^{\ 2}} = 3$.

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και f΄(x)>f(x) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. xf(x)>0 για κάθε $x\neq 0$.

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

…………………………………………………………………………………………………..

<u>ΘΕΜΑΤΑ 2006</u>

<u>ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ</u>

63. <u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ. **i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

64. ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x\in IR$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο IR.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{1}{f(x)}dx$.

γ. Για κάθε x<0 να αποδείξετε ότι: $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$.

65. ΘΕΜΑ 3ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΙΟΥΛΙΟΣ 2006)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$, $\alpha\in IR$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2.

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_0=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x = \dfrac{3}{5}$

………..

ΘΕΜΑΤΑ 2007

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

66. ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in z$

α)Δείξτε ότι η **f** παρουσιάζει ένα **τοπικό μέγιστο** , ένα **τοπικό ελάχιστο** και **ένα σημείο καμπής**.

β)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων και x_3 η θέση του σημείου καμπής δείξτε ότι τα $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

δ) Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **f** και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

67. ΘΕΜΑ 4ο

Έστω **f** μια **συνεχής** και **γνησίως αύξουσα** συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(0) > 0$

Δίνεται επίσης συνάρτηση g **συνεχής** στο $[0,1]$ ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

Ορίζουμε τις $F(x) = \int_0^x f(t)\,g(t)\,dt$, $x \in [0,1]$ και $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, $x \in [0,1]$

α) Να αποδείξετε ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο $(0,1]$

γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{F(x)}{G(x)} \le \dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο $(0,1]$

δ) Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) \cdot x^5}$

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

68. ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sigma\upsilon\nu x, & x \ge 0 \end{cases}$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$.

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

69. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \ge e$ για κάθε $x > 0$.

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)\,dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)\,dt + \int_2^4 f(t)\,dt$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

………..

ΘΕΜΑΤΑ 2008

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

70. ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1−1

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

71. ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x\in [0, +\infty), \qquad h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}, \quad x\in (0, +\infty).$$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ. Αν $h(1)=2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 t\, f(t)dt$

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{2}F(1)$

………………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 2009

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

72. ΘΕΜΑ 4ο (ΜΑΙΟΣ 2009)

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x)=\int_0^2 tf(t)dt$ $x\in[0,2]$,

$$G(x)=\begin{cases} \dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt+3, & x\in(0,2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2].

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει

$$G'(x)=-\frac{H(x)}{x^2},\quad 0<x<2$$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\alpha\in(0,2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$a\int_0^{\xi} tf(t)dt=\xi^2\int_o^{a} f(t)dt$$

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

73. ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f:[2,0]→ R η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}$, $0\le x\le 2$ $f'(0)=2f(0)$ $f'(2)=2f(2)+12e^4$, $f(1)=e^2$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=3x^2-\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},0\le x\le 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0,2].

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''\xi+4f(\xi)(=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$$

γ. Να αποδείξετε ότι k = 6 και ότι ισχύει g(x) = 0 για κάθε $x\in[0,2]$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$

………..

ΘΕΜΑΤΑ 2010

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. **Μονάδες 5**

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2-3x+2)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ **Μονάδες 7**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ. **Μονάδες 6**

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R—>R η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις

σχέσεις: $f(x)\neq x$ $\quad f(x)-x=3+\int_0^x \dfrac{t}{f(t)-t}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$ $x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 5**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή. **Μονάδες 7**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$ $x\in\mathbb{R}$, **Μονάδες 6**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)\,dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 7**

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f: $R\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R με f(0) = 1 και f΄(0) = 0

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in R$ **Μονάδες 4**

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt+x^3}{\eta\mu^3 x}=+\infty$ **Μονάδες 6**

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x)+2x=2x(f(x)+x^2)$, $x\in R$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2$, $x\in R$ **Μονάδες 8**

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$, $x\geq 0$

και να λύσετε στο R την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0$ **Μονάδες 7**