ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ. ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ! ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ(ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΘΕΜΑ 3ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2000)

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της ΄Ενωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

Α. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 8

Β. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 8

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μονάδες 9

2. ΘΕΜΑ (2000)

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$ ενός πειράματος τύχης με $P(\omega_2)=\frac{1}{4}$, $P(\omega_3)=P(\omega_4)=\frac{1}{24}$ και $P(\omega_5)=\frac{1}{2}$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι: $A : \frac{1}{2}$ $B : \frac{1}{6}$ $\Gamma : \frac{1}{3}$ $\Delta : \frac{1}{12}$ $E : \frac{1}{8}$

β) Δίνονται τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1, , \omega_3, , \omega_5\}$ και $B=\{\omega_1, \omega_2\}$ του δειγματικού χώρου Ω. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $P(A\cup B)$	1. 1/4
β) $P(A\cap B)$	2. 7/24
γ) $P(A')$	3. 23/24
	4. 1/6

3. ΘΕΜΑ 1ον(ΙΟΥΝΙΟΣ 2001)

Β.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν $A\subseteq B$, $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(B)=\frac{5}{12}$ τότε η $P(A\cup B)$ είναι ίση με:

α. $\frac{1}{4}$ **β.** $\frac{5}{12}$ **γ.** $\frac{2}{3}$ **δ.** $\frac{1}{6}$.

Β.3. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της* ***Στήλης Α*** *και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της* ***Στήλης Β****, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A-B)$	**1.** $\frac{1}{20}$
β. $P(B-A)'$	**2.** $\frac{2}{15}$
γ. $P(A\cap B)'$	**3.** $\frac{4}{5}$
	4. $\frac{1}{12}$
	5. $\frac{19}{20}$

4. ΘΕΜΑ 3ο(ΙΟΥΝΙΟΣ 2001)

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [−)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

Α. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση. Μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων. Μονάδες 9

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά. Μονάδες 4

β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών. Μονάδες 4

5. ΘΕΜΑ 4ο(ΕΠΑΝΑΛ.ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΣ 2001)

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 την γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί την γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα. Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $P(Γ-Α) \le \frac{3}{5}$ Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα. Μονάδες 8

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές. Μονάδες 7

6. ΘΕΜΑ (2001)

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A)=\frac{1}{4}$ και $P(B)=\frac{5}{12}$, τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με :

Α : $\frac{1}{4}$ Β : $\frac{5}{12}$ Γ : $\frac{2}{3}$ Δ : $\frac{1}{6}$

7. ΘΕΜΑ (2001)

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και Α' το αντίθετο του ενδεχομένου Α.

α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A)+P(B)<1$

β. Αν $P(A)=P(A')$ τότε $2P(A)=P(\Omega)$.

8. ΘΕΜΑ 4ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2002)

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $f(x) = (x - P(A\cup B))^3 - (x - P(A\cap B))^3$, $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$. **Μονάδες 5**

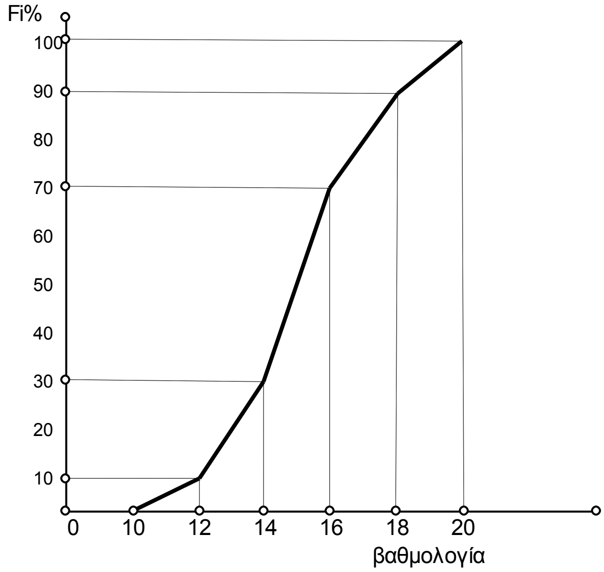
β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $X = \frac{P\ A\ + P\ B}{2}$. **Μονάδες 13**

γ. Εάν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$. **Μονάδες 7**

9. ΘΕΜΑ (2002)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων που παρουσιάζει την βαθμολογία μιας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.
β) Να βρείτε την διάμεσο
γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.
δ) Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 50 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.



10. ΘΕΜΑ 2ο (ΜΑΙΟΣ 2003)

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος **Μονάδες 5**
β. γυναίκα και όχι φιλόλογος **Μονάδες 5**
γ. άνδρας και φιλόλογος **Μονάδες 7**
δ. άνδρας ή φιλόλογος. **Μονάδες 8**

11. ΘΕΜΑ 3ο (ΕΠΑΝΑΛ. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΛΙΟΣ 2003)

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω Α το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και Β το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.
Αν Α΄, Β΄ είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α και Β αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α. P(A) , P (B) **Μονάδες 6**
β. $P(A\cup B)$ **Μονάδες 6**
γ. $P(A\cup B')$ **Μονάδες 6**
δ. P $A'\cap B \cup A\cap B'$ **Μονάδες 7**

12.ΘΕΜΑ 4ο(ΜΑΙΟΣ 2004)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2x^3-\frac{5}{2}x^2+x+10$ Οι πιθανότητες P(A) και P(B) δύο ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι P(A) = $\frac{1}{2}$ P(B) = $\frac{1}{3}$ **Μονάδες 9**

Β. Για τις παραπάνω τιμές των P(A), P(B) καθώς και για P(AUB) = $\frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A\cap B)$ **ii.** P(A-B) **iii.** $P[(A\cap B)']$ **iv.** P[(A-B) U (B-A)] . **Μονάδες 16**

13. ΘΕΜΑ 4ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2004)

Έστω Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση f:IR→IR με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2$, όπου $k \in \Omega$. Αν P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6), τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6). **Μονάδες 8**

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β, όπου
Α: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»
Β: «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός». **Μονάδες 8**

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ, όπου Γ: «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **»** . **Μονάδες 9**

14.ΘΕΜΑ 3ο(ΜΑΙΟΣ 2005)

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι $\frac{7}{8}$

(ii) Οι πιθανότητες P(B) , P(A∩B) δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\}$, όπου $k = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$

α. Να βρεθεί το k. **Μονάδες 5**

β. Να βρεθούν τα P(B), P(A∩B) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 8**

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. **Μονάδες 6**

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α. **Μονάδες 6**

15.ΘΕΜΑ 4ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2005)

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του Ω είναι $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{1,3,4\}$, Α-Β = {2,6} και

$$\Gamma = \left\{ x \,\varepsilon\, \Omega \,/\, \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$$

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ). **Μονάδες 9**

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Γ. **Μονάδες 3**

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ. **Μονάδες 3**

δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ,3λ,5λ, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta = \{\lambda \in \Omega \,/\, s^2 > 24\}$. **Μονάδες 10**

16.ΘΕΜΑ 2ο(ΜΑΙΟΣ 2006)

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών v_i
0	α+4
1	5α+8
2	4α
3	α-1
4	2α
Σύνολο	50

α. Να υπολογίσετε την τιμή του α. **Μονάδες 3**

Στη συνέχεια να βρείτε:

β. Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές. **Μονάδες 7**

γ. Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές. **Μονάδες 7**

δ. Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία. **Μονάδες 8**

17.ΘΕΜΑ 3ο(ΜΑΙΟΣ 2006)

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι. **Μονάδες 7**

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι. **Μονάδες 8**

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής; **Μονάδες 10**

18.ΘΕΜΑ 3ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2006)

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα. **Μονάδες 15**

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό». **Μονάδες 10**

19.ΘΕΜΑ 3ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2007)

Έστω ο δειγματικός χώρος $\mathbf{\Omega} = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$ για τον οποίο ισχύει

$\mathbf{P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)}$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{A = \{1,3,x^2-x-3\}}$, $\mathbf{B = \{2,x+1,2x^2+x-2,-2x+1\}}$

α) Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του $\mathbf{\Omega}$ δηλαδή οι $\mathbf{P(-1)}$, $\mathbf{P(0)}$, $\mathbf{P(1)}$, $\mathbf{P(2)}$, $\mathbf{P(3)}$, $\mathbf{P(4)}$, $\mathbf{P(5)}$ **Μονάδες 7**

β) Να βρεθεί η μοναδική τιμή του $\mathbf{x}$ για την οποία ισχύει $\mathbf{A \cap B = \{-1,3\}}$ **Μονάδες 8**

γ) Για $\mathbf{x=-1}$ να αποδείξετε ότι $\mathbf{P(A) = \frac{5}{11}}$, $\mathbf{P(B) = \frac{7}{11}}$, $\mathbf{P(A \cap B) = \frac{3}{11}}$ και μετά να υπολογίσετε τις πιθανότητες $\mathbf{P(A-B)}$ και $\mathbf{P(A \cup B')}$ **Μονάδες 10**

20.ΘΕΜΑ 3ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2007)

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = {1, 2, 3, 4, 5}. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$A = \{X \in \Omega / \ 0 \le \ell n(x-1) < \ell n3\}$,

$B = \{X \in \Omega / \ (X^2-5X)\cdot(X-1) = -6(X-1)$

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες Ρ(Α−Β) και $P(B \cup A')$. **Μονάδες 8**

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$. **Μονάδες 7**

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας Ρ(Χ), όπου Χ είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$. **Μονάδες 10**

21.ΘΕΜΑ 4° (ΙΟΥΝΙΟΣ 2008)

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β; **Μονάδες 7**

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο
Β: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία,διαβάζει την εφημερίδα β».Να αποδείξετε ότι

$\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}$. **Μονάδες 9**

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)\,x$

όπου x πραγματικός αριθμός και Β το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα. **Μονάδες 9**

22.ΘΕΜΑ 3ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2008)

Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p - 1, p, p + 1, p^2, p^3\}$.

α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$. **Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$. **Μονάδες 8**

γ. Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$. **Μονάδες 8**

23.ΘΕΜΑ 4ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2009)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2, x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός .

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα . ***(Μονάδες 6)***

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα . ***(Μονάδες 6)***

Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8), f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι $R = 3 + \ln\frac{1}{4}$ και $\delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,…,100} ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$.

22.ΘΕΜΑ 4ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2009)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \nu^3 x + \frac{4}{x^2}$, $x \in (0,1)$, όπου ν ακέραιος αριθμός με $\nu > 2$

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x) \ge 3\nu^2$ για κάθε $x \in (0,1)$

Β. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο **Ω** = {1, 2, ..., ν} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, Α για το οποίο ισχύει $\nu^3 P(A) + \frac{4}{(P(A))^2} = 3\nu^2$ και $N(A)=\nu^2-9\nu-8$

όπου P(A) είναι η πιθανότητα του Α και N(A) το πλήθος των στοιχείων του Α

α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{5}$

β. Αν επιπλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου **Ω** με $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$

23. ΘΕΜΑ 3ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2010)

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ xi	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ νi
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4 ***Μονάδες 6***

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση s. ***Μονάδες 8***

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. ***Μονάδες 5***

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

Α: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος $s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right]$

<u>24.ΘΕΜΑ 4ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2010)</u>

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες P(A), P(B) και η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-P(A))-\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(B),\ x>P(A)$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. ***Μονάδες 13***

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A)=\frac{2}{3}\ \text{και}\ P(B)=\frac{1}{2}$$ ***Μονάδες 2***

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α , Β. ***Μονάδες 5***

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α , Β. ***Μονάδες 5***

<u>25. ΘΕΜΑ Γ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2010)</u>

Έστω Ω = {ω_1, ω_2, ω_3, ω_4} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του Α= {ω_1, ω_3} και Β= { ω_2, ω_4}. Αν είναι P(A-B) = $\frac{\nu+1}{\nu+4}$ και P(B-A)= $\frac{\nu-1}{2\nu}$ όπου ν θετικός ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι P(A-B) = P(A) και P(B-A) = P(B) **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ν=4 **Μονάδες 10**

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β **Μονάδες 4**

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A'UB' **Μονάδες 5**