Π Ρ Ο Ο Δ Ο Ι

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α΄ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος,** αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$$

$\nu^{ος}$ όρος : $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

Αριθμητικός μέσος:

Τρεις αριθμοί α , β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνον αν ισχύει $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Άθροισμα ν πρώτων όρων : $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ ή $S_\nu=\dfrac{\nu}{2}\left[2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right]$

Παρατήρηση: Για να συμβολίσουμε διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α. Αν το πλήθος των όρων είναι περιττό τότε υπάρχει ένας μεσαίος όρος που τον συμβολίζουμε με x και έστω ω η διαφορά της προόδου τότε οι όροι θα είναι : …, x-3ω , x-2ω , x-ω , x, x+ω , x+2ω, x+3ω ,…

Β. Αν το πλήθος των όρων είναι άρτιο τότε υπάρχουν δυο μεσαίοι ο x-λ και ο x+λ και η διαφορά ω=2λ, τότε οι όροι είναι : … , x-5ω , x-3ω , x-ω, x+ω , x+3ω , x+5ω , …

Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda \Leftrightarrow \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\lambda$$

$\nu^{ος}$ όρος : $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$

Γεωμετρικός μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α , β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνον αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

Άθροισμα ν πρώτων όρων : $S_\nu=\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$

Παρατήρηση: Για να συμβολίσουμε διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α. Αν το πλήθος των όρων είναι περιττό τότε υπάρχει ένας μεσαίος όρος που τον συμβολίζουμε με x και έστω λ ο λόγος της προόδου τότε οι όροι θα είναι :

$\ldots,\dfrac{x}{\lambda^3},\dfrac{x}{\lambda^2},\dfrac{x}{\lambda}$, x, xλ , $x\lambda^2$, $x\lambda^3$,…

Β. Αν το πλήθος των όρων είναι άρτιο τότε υπάρχουν δυο μεσαίοι ο $\dfrac{x}{\lambda}$ και ο xλ και ο λόγος είναι λ^2, τότε οι όροι είναι : … , $\dfrac{x}{\lambda^3},\dfrac{x}{\lambda}$, xλ , $x\lambda^3$,…

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. Ο νιοστός όρος α_ν μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$. **Σ** **Λ**

2. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι $S_\nu = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot\nu}{2}$. **Σ** **Λ**

3. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι
$S_\nu = \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2}$. **Σ** **Λ**

4. Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε β - α = γ - β. **Σ** **Λ**

5. Ισχύει ότι $1 + 2 + ... + \nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο
Α. Q **Β.** Z* **Γ.** N **Δ.** N* **Ε.** R

2. Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε

Α. $\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ **Β.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha+\gamma}$ **Γ.** $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$

Δ. $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ **Ε.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\gamma}$

3. Μια ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος αν και μόνο αν
- **Α.** η διαφορά δυο οποιωνδήποτε όρων της είναι σταθερός πραγματικός αριθμός
- **Β.** η διαφορά μεταξύ πρώτου και τελευταίου όρου της είναι σταθερός αριθμός
- **Γ.** οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί
- **Δ.** οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί
- **Ε.** το άθροισμα των όρων της είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

4. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω, το άθροισμα δυο όρων της που ισαπέχουν από τα άκρα της είναι
- **Α.** Πολλαπλάσιο της διαφοράς ω.
- **Β.** Παίρνει τιμές που εξαρτώνται από την τάξη των όρων αυτών.
- **Γ.** Ίσο με το πλήθος ν.
- **Δ.** Ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων της προόδου.
- **Ε.** Ίσο με τον αριθμητικό μέσο της.

5. Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα S_ν των **ν** πρώτων όρων της είναι

Α. $(\alpha_\nu - \alpha_1)\frac{\nu}{2}$ **Β.** $(\alpha_\nu + \alpha_1)\frac{\omega}{2}$ **Γ.** $(\alpha_\nu + \alpha_1)\frac{\nu}{2}$

Δ. $(\alpha_\nu - \alpha_1)\frac{\omega}{2}$ **Ε.** $(\alpha_\nu + \nu\omega)\frac{\nu}{2}$

6. Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα S_ν των **ν** πρώτων όρων της είναι

Α. $[2\alpha_1 + (\nu - 1)]\frac{\nu}{2}$ **Β.** $[2\alpha_1 + \nu\omega]\frac{\nu}{2}$ **Γ.** $[\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\frac{\nu}{2}$

Δ. $[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\frac{\nu}{2}$ **Ε.** $(\alpha_\nu + \nu\omega)\frac{\nu}{2}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$. Να βρείτε
α) τη διαφορά ω και
β) τον 10^{o} όρο της προόδου.

2. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 7$.
α) Να βρείτε το πλήθος ν των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.
β) Ποιος θα είναι ο τελευταίος όρος α_ν σ' αυτή την περίπτωση;

3. Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της είναι $S_{20} = 610$ και το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της $S_{12} = 222$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον 1^{o} όρο της .

4. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία
α) το άθροισμα του $1^{ου}$ και του $5^{ου}$ όρου είναι -2, ενώ το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $6^{ου}$ είναι 2
β) το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $4^{ου}$ όρου είναι 7, ενώ το γινόμενο των ίδιων όρων είναι 10.

5. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των 3 πρώτων της όρων είναι ίσο με -3 και άθροισμα των 5 πρώτων όρων ίσο με 10.

6. Να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_6 = 8, \alpha_4 = 4$.

7. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν ο $2^{ος}$ και ο $7^{ος}$ όρος έχουν γινόμενο 100 και οι μεταξύ τους όροι έχουν άθροισμα 50

8. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_9 = 15$ και $S_{12} = 165$.
α) Να βρείτε τον 5^{o} όρο της προόδου και
β) το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

9. α) Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $\alpha_3 = 11$ και $\alpha_6 = 23$
β) Πόσοι πρώτοι όροι της έχουν άθροισμα που **δεν** υπερβαίνει το 210;

10. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία ο $4^{ος}$ και ο $8^{ος}$ όρος της έχουν άθροισμα 18, ενώ το άθροισμα των κύβων των όρων αυτών είναι 3.402.

11. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2$, $\alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

12. Αν οι αριθμοί $\frac{2}{\beta+\gamma}, \frac{2}{\gamma+\alpha}, \frac{2}{\alpha+\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

13. α) Αν οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$.
β) Αν οι αριθμοί $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha}, \frac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta}, \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, δείξτε ότι οι $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

14. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 33 και *γινόμενο* 440.

15. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 16 και *γινόμενο άκρων* όρων 7.

16. Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 7 περιέχονται μεταξύ του 15 και του 300.

17. Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα
α) των διψήφιων περιττών αριθμών
β) των διψήφιων αρτίων αριθμών
γ) των διψήφιων φυσικών αριθμών
δ) των διψήφιων πολλαπλασίων του 4.

18. α) Ποιο είναι το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου: 3, 5, 7, 9, ... ;
β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους της προόδου αυτής πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 99;

19. Μεταξύ των αριθμών 4 και 34 να παρεμβάλετε άλλους αριθμούς, ώστε να δημιουργηθεί μια αριθμητική πρόοδος με 11 όρους.

20. Πόσους αριθμούς πρέπει να παρεμβάλουμε μεταξύ του 5 και του 50 ώστε ο τελευταίος από τους αριθμούς αυτούς να είναι 3πλάσιος από τον δεύτερο και όλοι οι αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

21. Να βρείτε τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

22. Σε μια ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε ώστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ΑΓ = 16 cm και ΓΕ = 24 cm να βρείτε τα μήκη των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ .

23. Στις προόδους (α_ν):17, **21**, 25, ... και (β_ν):16 , **21** , 26,... εμφανίζονται κοινοί όροι (όπως ο **21**).

α) Να βρείτε τον επόμενο κοινό τους όρο.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων κοινών όρων τους.

24. Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $2+5+8+11+\cdots+(2+3\nu)$ και β) $3+5+7+\cdots+(3+2\nu)$.

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2)+(x+5)+(x+8)+\cdots+(x+29)=165$.

β) $1+7+13+\cdots+x=280$ με $x>0$

26. Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu=3\nu+2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62

27. Μιας ακολουθίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $S_\nu=3\nu^2+\nu$.

α) Να βρείτε το άθροισμα των (ν-1) πρώτων όρων της

β) Να βρείτε τον νιοστό της όρο

γ) Να βρείτε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

ε) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 100

28. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων, για κάθε φυσικό αριθμό ν, είναι $S_\nu=\dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$.

29. Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων, για κάθε φυσικό αριθμό ν, είναι $S_\nu=2\nu^2$.

30. Ένας αγρότης, για μια γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: το σκάψιμο του πρώτου μέτρου θα στοιχίσει 2.000 δρχ. και για κάθε επί πλέον μέτρο το κόστος σκαψίματος θα είναι κατά 500 δρχ. μεγαλύτερο από το κόστος σκαψίματος του προηγουμένου μέτρου.

Συμπληρώστε τον πίνακα:

Ι. i)

Βάθος	1ο m	2ο m	4ο m	…
Κόστος μέτρου	2.000 δρχ.	2.500 δρχ.	…	7.500 δρχ.
Κόστος γεώτρησης	2.000 δρχ.	4.500 δρχ.	…	…

ii) Το βάθος στο οποίο το κόστος του μέτρου υπερβαίνει τις 5.000 δρχ. είναι

Α. 3 m **Β.** 5 m **Γ.** 6 m **Δ.** 7 m **Ε.** 8 m

iii) Το βάθος στο οποίο το κόστος της γεώτρησης δεν υπερβαίνει τις 20.000 δρχ. είναι

Α. 12 m **Β.** 10 m **Γ.** 8 m **Δ.** 7 m **Ε.** 6 m

iv) Με 30.000 δρχ. η γεώτρηση θα φθάσει σε βάθος

Α. 4 m **Β.** 5 m **Γ.** 6 m **Δ.** 8 m **Ε.** 10 m

ΙΙ. i) Πόσο κοστίζει το $25^{ο}$ μέτρο της γεώτρησης αυτής;

ii) Πόσο κοστίζει συνολικά η γεώτρηση αν φθάσει τα 60 m βάθος;

iii) Ένας δεύτερος αγρότης κάνει μια γεώτρηση του ίδιου βάθους και πληρώνει 18.000 δρχ. για κάθε μέτρο της. Πόσα μέτρα είναι το βάθος των γεωτρήσεων αν ξέρουμε ότι ο πρώτος έδωσε λιγότερα χρήματα;

31. Ένα κερί καίγεται με σταθερό ρυθμό. Στο τέλος της $1^{ης}$ ώρας είχε ύψος 36 cm, στο τέλος της $2^{ης}$ 33 cm, στο τέλος της $3^{ης}$ 30 cm κ.λπ.

Ι. i) Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$ **Σ** **Λ**

ii) Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 36$ **Σ** **Λ**

iii) Το ύψος του κεριού στο τέλος κάθε ώρας θα είναι πολλαπλάσιο του 3 **Σ** **Λ**

iv) Στο τέλος της $5^{ης}$ ώρας το ύψος του κεριού θα είναι μικρότερο από 20 μέτρα **Σ** **Λ**

v) Μετά από 15 ώρες το κερί δεν θα έχει λειώσει τελείως **Σ** **Λ**

ΙΙ. i) Ποια από τις παρακάτω τριάδες είναι ύψη του κεριού στο τέλος τριών διαδοχικών ωρών:

Α. 21 , 23 , 25 **Β.** 18 , 20, 22 **Γ.** 24 , 25 , 26

Δ. 15 , 21, 27 **Ε.** 15 , 18 , 21

ii) Στο τέλος της $6^{ης}$ ώρας το ύψος του κεριού θα είναι

Α. 25 cm **Β.** 20 cm **Γ.** 18 cm **Δ.** 21 cm **Ε.** 24 cm

iii) Το ύψος του κεριού θα γίνει μικρότερο από 18 cm στο τέλος της

Α. $4^{ης}$ ώρας **Β.** $6^{ης}$ ώρας **Γ.** $8^{ης}$ ώρας **Δ.** $10^{ης}$ ώρας **Ε.** $12^{ης}$ ώρας

iv) Το κερί **δεν** θα έχει λειώσει τελείως μετά από

Α. 25 ώρες **Β.** 20 ώρες **Γ.** 18 ώρες **Δ.** 15 ώρες **Ε.** 12 ώρες

v) Το ύψος που θα έπρεπε να έχει το κερί, για να λειώσει τελείως μετά από 24 ώρες είναι

Α. 59 cm **Β.** 66 cm **Γ.** 68 cm **Δ.** 69 cm **Ε.** 72 cm

ΙΙΙ. α) Πόσο θα είναι το ύψος του στο τέλος της $8^{ης}$ ώρας;

β) Στο τέλος ποιας ώρας θα έχει ύψος 9 cm;

γ) Πόσο ήταν το ύψος την στιγμή που το ανάψαμε;

δ) Πόσες ώρες θα μείνει αναμμένο;

32. Σ’ έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων, τα γραφεία του ιδίου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 55.000 δρχ. το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 3.500 δρχ. το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγουμένου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του $15^{ου}$ ορόφου από ένα του $7^{ου}$ ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τις 100.000 δρχ. το μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγουμένου ορόφου και ο $17^{ος}$ όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;

33.Α. Οι μαθητές ενός σχολείου θέλησαν να γραφτούν στο βιβλίο Γκίνες κάνοντας ρεκόρ στο σχηματισμό της υψηλότερης ανθρώπινης πυραμίδας που θα ισορροπούσε για ένα λεπτό. Μπήκαν λοιπόν σε σειρές ως εξής: στην κορυφή ένα άτομο, στην επόμενη σειρά δύο, στην αμέσως πιο κάτω σειρά τρεις κ.λ.π. Έτσι κατάφεραν συνολικά 45 μαθητές να κάνουν το ρεκόρ.

α) Πόσες σειρές είχε η πυραμίδα που σχημάτισαν;

β) Πόσοι τουλάχιστον μαθητές θα χρειαστούν ώστε να σπάσει το ρεκόρ αυτό, αν σχηματίσουν με παρόμοιο τρόπο μια νέα πυραμίδα;

Β. Ένα μήνα μετά οι μαθητές ενός γειτονικού σχολείου σχημάτισαν με όμοιο τρόπο μια πυραμίδα υψηλότερη κατά 3 σειρές και έσπασαν το ρεκόρ.

α) Πόσοι συνολικά ήταν μαθητές αυτοί;

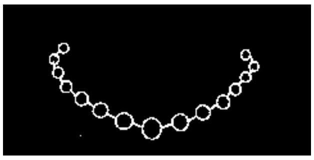
β) Αν οι μαθητές που παίρνουν μέρος στο σχηματισμό της πυραμίδας δεν ξεπερνούν τους 210, πόσες σειρές μπορούν να σχηματίσουν;

34. Μια ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας στην δεύτερη τρεις , στην τρίτη πέντε κ.λ.π.

α) Πόσοι θα είναι στην $12^η$ σειρά;

β) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

35.Ένα κολιέ αξίας 650.000 δρχ. αποτελείται από 33 διαμάντια Το μεσαίο διαμάντι είναι και το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε δια-



μάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 1.000 δρχ. λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 1.500 δρχ. λιγότερο από το προηγούμενό του.

Α. α) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;

β) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

Β. Πόσες δρχ. είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

36. Α. Σε μια αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η 28 καθίσματα.

α) Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά;

β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 4η έως την και την 10η σειρά;

Β. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κ.λ.π.

α) από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

37.Κατά τη διάρκεια έργων συντήρησης του οδοστρώματος ενός τμήματος της εθνικής οδού, είχαν τοποθετηθεί ειδικοί φωτεινοί σηματοδότες (σχήματος βέλους) που εμπόδιζαν την κυκλοφορία σε εκείνο το τμήμα του δρόμου. Οι σηματοδότες αυτοί ήταν τοποθετημένοι ανά 10 m. Μόλις τελείωσαν τα έργα, ένας εργάτης που βρισκόταν στον πρώτο σηματοδότη, πήρε εντολή να μεταφέρει όλους τους σηματοδότες δίπλα στον τελευταίο. Όμως, λόγω του μεγάλου βάρους του σηματοδότη, ο εργάτης μπορούσε να μεταφέρει μόνο ένα κάθε φορά. Όταν τελείωσε την μεταφορά, είχε καλύψει συνολικά 1,44 km.

α) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον πρώτο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

β) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον δεύτερο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

γ) Πόσοι ήταν οι σηματοδότες;

38 Ένας αθλητής μετά την αποθεραπεία του από ένα ατύχημα, άρχισε την Δευτέρα 19 Φεβρουαρίου 1996 νέες προπονήσεις. Ανάμεσα στις άλλες ασκήσεις έπρεπε να κάνει και κάμψεις (push ups) καθημερινά (ακόμα και τα Σάββατα και τις Κυριακές), σύμφωνα με το παρακάτω πρόγραμμα:

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	...
Αριθμός Κάμψεων	9	13	17	21	...

μέχρι να φθάσει τον αριθμό των 101 κάμψεων. Έπειτα θα συνέχιζε με 100 κάμψεις κάθε ημέρα εκτός Κυριακής.

α) Πόσες κάμψεις θα έκανε την Τετάρτη της επόμενης εβδομάδας;

β) Μετά από πόσες μέρες έφθασε τις 101 κάμψεις;

γ) Ποια ήταν η ημερομηνία της πρώτης Κυριακής που σταμάτησε τις κάμψεις;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. Ο νιοστός όρος $α_ν$ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ είναι $α_ν = α_1 \cdot λ^{ν-1}$. **Σ** **Λ**

2. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $λ \neq 1$ είναι $S_ν = α_1 \cdot \frac{λ^ν - 1}{λ - 1}$. **Σ** **Λ**

3. Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\frac{β}{α} = \frac{γ}{β}$. **Σ** **Λ**

4. Η ακολουθία $(α_ν)$ με $α_{ν+1} = 3α_ν$ είναι γεωμετρική πρόοδος. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $α_4 = x$ και $α_6 = y$ (όπου x, y ομόσημοι), τότε έχουμε

Α. $λ = \frac{x \cdot y}{2}$ **Β.** $λ = \frac{x}{y}$ **Γ.** $λ = \frac{y^2}{x^2}$ **Δ.** $λ^2 = \frac{y}{x}$ **Ε.** $λ = \frac{x^2 \cdot y^2}{2}$

2. Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου α·β, α,... είναι

Α. $\frac{1}{α}$ **Β.** $\frac{1}{β}$ **Γ.** $\frac{β}{α}$ **Δ.** $\frac{α}{β}$ **Ε.** $α^2 \frac{β}{2}$

3. Για να είναι μία ακολουθία $α_1$, $α_2$, ... $α_ν$ γεωμετρική πρόοδος πρέπει

Α. η διαφορά δύο διαδοχικών όρων να είναι σταθερή
Β. το πηλίκο δύο οποιονδήποτε όρων να είναι σταθερό $\neq 0$
Γ. το πηλίκο των διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό $\neq 0$
Δ. η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο διαδοχικών όρων της να είναι σταθερή
Ε. το γινόμενο των διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό

4. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο ισχύει

Α. $α_4 = α_1 + α_3$ **Β.** $α_4 = α_1 \cdot 4λ$ **Γ.** $α_4 = α_3 + λ$
Δ. $α_4 = α_3 \cdot λ$ **Ε.** $α_4 = α_1 \cdot α_3$

5. Σε μια γεωμετρική πρόοδο με $λ \neq 1$ το άθροισμα $S_ν$ των ν πρώτων όρων της είναι

Α. $α_1 \cdot \frac{λ^{ν-1} - 1}{λ - 1}$ **Β.** $α_1 \cdot \frac{λ^ν - 1}{λ - 1}$ **Γ.** $α_ν \cdot \frac{α_1 - 1}{λ - 1}$

Δ. $α_1 \cdot \frac{α_ν - 1}{λ - 1}$ **Ε.** $\frac{α_1 \cdot α_ν}{λ - 1}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

2. α) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = \frac{1}{3}$ να βρείτε τον α_6

β) Αν $\alpha_6 = 448$ και $\lambda = 2$ να βρείτε τον α_1

γ) Αν $\alpha_1 = 9$ και $\alpha_5 = 144$ να βρείτε το λ

δ) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$ και $\alpha_\nu = 162$ να βρείτε το ν

3. Να βρείτε μία γεωμετρική πρόοδο, αν $\alpha_4 = -6$ και $\alpha_8 = -\frac{2}{27}$.

4. Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_8 = 384$, να βρείτε τον αριθμό λ.

5. Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

α) να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της S_4 και

β) το άθροισμα των άπειρων όρων της.

6. Στη γεωμετρική πρόοδο

α) με $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_\nu = \frac{1}{64}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ να βρείτε το πλήθος ν

β) με $\alpha_1 = -\frac{81}{4}$, $\alpha_5 = -\frac{1}{4}$ να βρείτε τον λόγο λ

7. α) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_4 = 13$ $\alpha_6 = 117$ και $\alpha_\nu = 9477$, να βρείτε το ν.

β) Να βρεθεί το πλήθος ν των όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), αν έχουμε: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_\nu = 972$ και $S_\nu = 1456$

8. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 14 και γινόμενο 64.

9. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

10. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 625 και το τετράγωνο του τρίτου είναι τετραπλάσιο του γινομένου των δύο άκρων όρων.

11. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι 10 και το άθροισμα των δύο τελευταίων είναι 15.

12. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδος αν ο έκτος όρος είναι τετραπλάσιος του τέταρτου όρου της και το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 216.

13. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν ξέρετε ότι ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο κατά 3 και ο τρίτος μικρότερος από τον τέταρτο κατά 12.

14. α) Ποιο είναι το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της: - 1, 2, - 4, 8, ...;

β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 85;

14. Να βρείτε το S_4 στη γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_{10} = 48\sqrt{2}$, $\alpha_7 = 24$.

15. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο με $S_4 = 30$ και $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 480$.

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^x = 2046$

17. Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο, αν α_μ και α_k είναι οι όροι της τάξεως μ και κ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει: $\alpha_\mu = \lambda^{\mu-k}\alpha_k$, $\mu, k \in N$

18. α) Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

β) Αν α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$\Pi = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 - (\alpha - \delta)^2$

19. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$.

α) Να βρείτε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$.

β) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το λόγο λ και τον πρώτο της όρο α_1.

γ) Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072;

20. Δίνεται η ακολουθία με $S_ν = 2\,(3^ν - 1)$
α) Να βρείτε το $S_{ν-1}$
β) Να βρείτε το $α_ν$
γ) Να βρείτε το $α_{ν+1}$
δ) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον λ και τον $α_1$.
ε) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

21. Ένας ασθενής παίρνει δόση των 10 mg ενός φαρμάκου κάθε 4ωρο. Στο χρονικό αυτό διάστημα διασπάται το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας του φαρμάκου που βρίσκεται στην αρχή του 4ώρου στο αίμα του ασθενούς ενώ το υπόλοιπο παραμένει στο αίμα του ασθενούς.
α) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής μόλις πάρει την $2^η$ δόση του φαρμάκου.
β) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής στο τέλος του πρώτου 12ώρου.
γ) Αν είναι γνωστό ότι, όταν η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς υπερβεί τα 50 mg, παρουσιάζονται επικίνδυνες παρενέργειες, δείξτε ότι ο ασθενής δεν κινδυνεύει ακόμη και με ισόβια λήψη του φαρμάκου.
δ) Ποια είναι η ποσότητα της επικίνδυνης δόσης.

22. Ένα αυτοκίνητο κοστίζει σήμερα 10.000.000 δρχ. Είναι γνωστό ότι στο τέλος κάθε χρόνου χάνει το $\frac{1}{10}$ της αξίας που έχει στην αρχή του χρόνου.

I. Τότε
i) Η αξία του αυτοκινήτου στο τέλος του πρώτου χρόνου είναι 9.500.000 δρχ. **Σ** **Λ**
ii) Οι αξίες στο τέλος κάθε χρόνου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{10}$ **Σ** **Λ**
iii) Μετά την συμπλήρωση 2 χρόνων από την αγορά του η αξία του αυτοκινήτου μειώθηκε κατά 2.000.000 δρχ. **Σ** **Λ**
iv) Η αξία του είναι μεγαλύτερη από 5.000.000 δρχ. στο τέλος του $5^{ου}$ χρόνου από την αγορά του **Σ** **Λ**
v) Η αξία του είναι μικρότερη από 4.000.000 δρχ. στο τέλος του $8^{ου}$ χρόνου από την αγορά του **Σ** **Λ**

II. i) Η αξία του αυτοκινήτου στην αρχή του $3^{ου}$ χρόνου από την αγορά του είναι:
Α. 7.000.000 δρχ. **Β.** 7.200.000 δρχ. **Γ.** 7.290.000 δρχ.
Δ. 8.000.000 δρχ. **Ε.** 8.100.000 δρχ.
ii) Με την συμπλήρωση 3 χρόνων από την αγορά του η αξία του μειώθηκε κατά
Α. 4.000.000 δρχ. **Β.** 3.200.000 δρχ. **Γ.** 2.710.000 δρχ.
Δ. 1.900.000 δρχ. **Ε.** 1.710.000 δρχ.
iii) Η αξία του αυτοκινήτου γίνεται μικρότερη από 6.000.000 δρχ. στο τέλος του
Α. $3^{ου}$ χρόνου **Β.** $4^{ου}$ χρόνου **Γ.** $5^{ου}$ χρόνου
Δ. $6^{ου}$ χρόνου **Ε.** $7^{ου}$ χρόνου

23. α) Να συγκρίνετε τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών: 2, 8.
β) Δείξτε ότι η σχέση που θα βρείτε ισχύει γενικά για κάθε ζεύγος θετικών x, y.

24. Αν α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε να αποδείξετε ότι οι $\frac{1}{α-β}$, $\frac{1}{α-γ}$, $\frac{1}{α+β}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

25. Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς, για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
ii) αν αυξηθεί ο δεύτερος κατά 8, η πρόοδος γίνεται αριθμητική
iii) αν αυξηθεί και ο τρίτος κατά 64, γίνεται πάλι γεωμετρική.

26. Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
i) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
ii) έχουν άθροισμα 15

iii) αν σ' αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 4, 19 αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

27. Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
ii) ελαττώνοντας τον τρίτο κατά 4 γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
iii) ελαττώνοντας τον δεύτερο και τον τρίτο της αριθμητικής προόδου κατά 1 σχηματίζεται πάλι γεωμετρική πρόοδος.

28. Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
ii) οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
iii) το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων 12.

29. Ο Πέτρος γιορτάζοντας τα 12^{α} γενέθλιά του, ζήτησε από τους γονείς του για δώρο 15.000 και κάθε επόμενα γενέθλια να του αυξάνουν το ποσό κατά 3.000 μέχρι να γιορτάσει τα 21 χρόνια του.
Ο πατέρας του αντιπρότεινε τα εξής: "Θα σου δώσω τώρα 500 δρχ. και κάθε επόμενα γενέθλιά σου θα σου διπλασιάζω το προηγούμενο ποσό". Ο Πέτρος σκέφτηκε λίγο και απέρριψε τη πρόταση του πατέρα του πιστεύοντας ότι όταν θα γιορτάζει τα 18^{α} γενέθλιά του με τη δική του πρόταση θα πάρει περισσότερα χρήματα.

α) Δικαιολογήσετε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του Πέτρου.
β) Πόσα χρήματα θα πάρει με τη δική του πρόταση έως και τα 21^{α} γενέθλιά του και πόσα θα έπαιρνε με την πρόταση του πατέρα του;

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΘΕΜΑ 2ο(ΙΟΥΝΙΟΣ 1999)

Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος όρος είναι ίσος με 2.

α) Ο πρώτος όρος $α_1$ και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι:

Α. $α_1 = 64$ και $λ = -1/2$

Β. $α_1 = -64$ και $λ = -1/2$

Γ. $α_1 = 64$ και $λ = ½$

Δ. $α_1 = 32$ και $λ = ½$ **Μονάδες 9**

β) Να βρείτε τον $10^{ο}$ όρο της γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 9**

γ) Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 7**

2.ΘΕΜΑ 4ο(ΙΟΥΝΙΟΣ 1999)

Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δραχμές και μικρότερη από 640 χιλιάδες δραχμές. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Να δοθεί προκαταβολή 120 χιλιάδες δραχμές.
- Η εξόφληση του υπολοίπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.
- Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω χιλιάδες δραχμές, όπου ω θετικός ακέραιος.
- Η τέταρτη δόση να είναι 48 χιλιάδες δραχμές.

α) Να εκφράσετε το ποσόν της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω. **Μονάδες 5**

β) Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω. **Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε την τιμή του ω. **Μονάδες 5**

δ) Να βρείτε το ποσόν της τελευταίας δόσης. **Μονάδες 5**

ε) Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή. **Μονάδες 5**

3.ΘΕΜΑ 3(ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 1999)

Ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι $α_1=27$ και ο λόγος της είναι $λ=-\frac{1}{3}$.

α. Να βρείτε τον τέταρτο όρο της προόδου. Μονάδες 7

β. Το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με :

Α. $-\frac{61}{3}$ Β. 61 Γ. -61 Δ. $\frac{61}{3}$ **Μονάδες 8**

γ. Το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου είναι ίσο με :

Α. $-\frac{81}{4}$ Β. $\frac{81}{4}$ Γ. $\frac{81}{2}$ Δ. $-\frac{81}{2}$ **Μονάδες 10**

4.ΘΕΜΑ 4(ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 1999)

Διαθέτουμε 9999 όμοια αντικείμενα τα οποία θέλουμε να συσκευάσουμε σε δέματα έτσι, ώστε το πρώτο δέμα να περιέχει 3 αντικείμενα, το δεύτερο δέμα να περιέχει 5 αντικείμενα, το τρίτο δέμα να περιέχει 7 αντικείμενα και γενικά κάθε δέμα να περιέχει δύο αντικείμενα περισσότερα από το προηγούμενό του :

α) Να βρείτε πόσα δέματα θα δημιουργηθούν. **Μονάδες 10**

β) Αν η συσκευασία του πρώτου δέματος κοστίζει 100 δραχμές, του δεύτερου 120 δραχμές, του τρίτου δέματος 140 δραχμές και γενικά, αν η συσκευασία κάθε δέματος κοστίζει 20 δραχμές περισσότερο από το κόστος της συσκευασίας του προηγούμενου δέματος, τότε να βρείτε πόσο θα κοστίσει η συσκευασία του δέματος που περιέχει τα περισσότερα αντικείμενα. **Μονάδες 15**

5.ΘΕΜΑ 1ο(ΙΟΥΝΙΟΣ 2000)

Α.1.Να γράψετε τον τύπο που δίνει το νιοστό όρο $α_ν$ μιας αριθμητικής προόδου $(α_ν)$, που έχει πρώτο όρο $α_1$ και διαφορά ω. **Μονάδες 3**

Α.2.Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α,β,γ έτσι, ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 3**

Α.3.Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_ν$ των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$, που έχει πρώτο όρο $α_1$ και λόγο $λ \neq 1$, είναι: $S_ν=α_1 \cdot \frac{λ^ν - 1}{λ - 1}$ **Μονάδες 6,5**

Β.1.*Στη Στήλη Α δίνεται ο πρώτος όρος $α_1$ και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη Στήλη Β ο νιοστός όρος $α_ν$ τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στο σωστό νιοστό όρο.*

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $α_1=1$, ω=-2	1. $α_ν=-ν$
β. $α_1=0$, ω=3	2. $α_ν=4ν-3$
γ. $α_1=-1$,ω=-1	3. $α_ν=3-2ν$
	4. $α_ν=3ν-3$

Μονάδες 6

Β.2.*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Οι αριθμοί -5,5,15, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου 10, 7, 4, . . . είναι ίσος με 20.

γ. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ για τους όρους της $α_2,α_4,α_6$ ισχύει η σχέση $2α_4=α_2+α_6$. **Μονάδες 4,5**

Β.3.*Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων ν όρων της είναι ίσο με:

Α. $\frac{2^ν - 1}{2}$, Β. $2^ν-1$, Γ. $2^{ν-1}$, Δ. $1-2^ν$, Ε. Κανένα από τα προηγούμενα. **Μονάδες 2**

6.ΘΕΜΑ 4ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2000)

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα.

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες. **Μονάδες 9**

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

Β.1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό. **Μονάδες 8**

Β.2.Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια; **Μονάδες 8**

7.ΘΕΜΑ 2ο (ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000)

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες οι αριθμοί x - 4, x + 4 και 3x - 4 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 10**

β. Αν ο αριθμός x + 4 είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του **α.** ερωτήματος, να βρείτε τον πρώτο όρο της. **Μονάδες 7**

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου του **α.** ερωτήματος. **Μονάδες 8**

8.ΘΕΜΑ 4ο (ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2000)

Στους δίσκους Α και Β μιας ζυγαριάς υπάρχουν βάρη 40 και 20 γραμμαρίων αντίστοιχα.

Α. Στο δίσκο Α τοποθετούμε διαδοχικά βάρη των 20 γραμμαρίων το καθένα. Στο δίσκο Β τοποθετούμε τριπλάσιο βάρος του αρχικού και συνεχίζουμε προσθέτοντας βάρη, καθένα από τα οποία είναι τριπλάσιο του βάρους που είχε τοποθετηθεί την αμέσως προηγούμενη φορά.

α. Αν το συνολικό βάρος στο δίσκο Β είναι 2420 γραμμάρια, να βρείτε πόσες φορές χρειάστηκε να τοποθετήσουμε βάρη στο δίσκο αυτό. **Μονάδες 10**

β. Πόσα βάρη των 20 γραμμαρίων πρέπει να τοποθετήσουμε στο δίσκο Α ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά; **Μονάδες 5**

Β. Θεωρούμε την αρχική κατάσταση με τα βάρη των 40 και 20 γραμμαρίων που υπήρχαν στους δίσκους Α και Β αντίστοιχα. Στο δίσκο Β τοποθετούμε βάρος ίσο με το μισό του αρχικού βάρους και συνεχίζουμε τη διαδικασία προσθέτοντας βάρη καθένα από τα οποία είναι ίσο με το μισό του βάρους που είχε τοποθετηθεί την αμέσως προηγούμενη φορά. Αν η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον, να δείξετε ότι το συνολικό βάρος στο δίσκο Β δεν υπερβαίνει το αρχικό βάρος στο δίσκο Α. **Μονάδες 10**

9.ΘΕΜΑ 3ο(ΙΟΥΝΙΟΣ 2001)

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log 5$.

α. Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω. **Μονάδες 8**

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + ... + \alpha_{29}$. **Μονάδες 8**

γ. Έστω (β_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + ... + \beta_{1999} + \beta_{2001}$. **Μονάδες 9**

10.ΘΕΜΑ 3ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΙΟΥΝΙΟΣ 2001)

Δίνονται οι αριθμοί 1, ημx+1, ημx+3, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με την σειρά που δίνονται, δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 8**

β) Αν $0 \le x \le \pi$ και οι αριθμοί 1, ημx+1, ημx+3, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $x = \dfrac{\pi}{2}$. **Μονάδες 12**

ii) Να βρείτε το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 5**

11.ΘΕΜΑ 4ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΙΟΥΝΙΟΣ 2001)

Ο κατασκευαστής μιας πολυκατοικίας 12 ορόφων με πυλωτή, καθόρισε ως τιμή πώλησης του πρώτου ορόφου 400.000 δρχ. το τετραγωνικό μέτρο και για κάθε επόμενο όροφο 10.000 δρχ. το τετραγωνικό μέτρο ακριβότερα από τον προηγούμενό του όροφο.

α) Πόσο πωλείται το διαμέρισμα ανά τετραγωνικό μέτρο στο δέκατο όροφο; **Μονάδες 7**

β) Πόσο πωλείται ένα διαμέρισμα 82 τετραγωνικών μέτρων στο δωδέκατο όροφο; **Μονάδες 8**

γ) Αν ο κάθε όροφος έχει 200 τετραγωνικά μέτρα, πόσα χρήματα θα εισπράξει ο κατασκευαστής από την πώληση όλων των διαμερισμάτων; **Μονάδες 10**

12.ΘΕΜΑ 2ο(ΕΠΑΝΑΛ. ΙΟΥΛΙΟΣ 2001)

Αν α_2=συνθ, $\alpha_3 = \sqrt{2}$ ημθ, $\alpha_4 = \sqrt{3}$ εφθ με $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι ο δεύτερος τρίτος και τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) :

α. να δείξετε ότι $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ **Μονάδες 8**

β. να βρείτε το λόγο λ και τον πρώτο όρο α_1 της γεωμετρικής προόδου (α_ν) **Μονάδες 10**

γ. να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 7**

13.ΘΕΜΑ 4ο(ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2001)

Σε ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα. Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά.

α. Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά. **Μονάδες 10**

β. Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου. **Μονάδες 7**

γ.Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο; **Μονάδες 8**

14.ΘΕΜΑ 2ο(ΙΟΥΝΙΟΣ 2002)

Δίνονται οι αριθμοί $α_1$ = συν2α , $α_2$ = συν^{2}α , $α_3$ = 1, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση

$$0 < α < \frac{π}{2}.$$

α. Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 7**

β. Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. **Μονάδες 8**

γ.Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου. **Μονάδες 10**

15.ΘΕΜΑ 3ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΙΟΥΝΙΟΣ 2002)

Οι αριθμοί $α_1 = 2x+2$, $α_2 = 6x-2$ και $α_3 = 5x+4$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι x = 2. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε τη διαφορά **ω** της προόδου. **Μονάδες 5**

γ) Να υπολογίσετε τον πεντακοσιοστό όρο $\boldsymbol{α_{500}}$ της προόδου. **Μονάδες 7**

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\mathbf{S_{500}}$ των πεντακοσίων πρώτων όρων της προόδου. **Μονάδες 8**

16.ΘΕΜΑ 4ο (ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2002)

Έστω δύο κοινωνίες βακτηριδίων Α και Β. Αν συμβολίσουμε με A_o τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Α και με B_o τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Β, τότε $9A_o=10^{11}B_o$. Αν πληθυσμός της κοινωνίας Α μειώνεται κάθε ώρα κατά το $\frac{1}{100}$ του αρχικού πληθυσμού της, ενώ ο πληθυσμός της κοινωνίας Β αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ. Οι δύο πληθυσμοί γίνονται ίσοι 10 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου που αναφέρεται στον πληθυσμό Β είναι λ=10. **Μονάδες 10**

β. Πέντε ώρες μετά την αρχική στιγμή ο πληθυσμός της κοινωνίας Β είναι 10^{10} βακτηρίδια. Να δείξετε ότι ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας Β ήταν 10^5 βακτηρίδια. **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε τον πληθυσμό της κοινωνίας Α, 99 ώρες μετά την αρχική στιγμή. **Μονάδες 7**

17.ΘΕΜΑ 3ο (ΜΑΪΟΣ 2003)

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $α_ν = -11+2ν$ με πρώτο όρο $α_1$ καθώς και το πολυώνυμο

$P(x) = x^3-3x^2-x+3$.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $α_ν$ είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $α_1 = -9$ και διαφορά ω = 2. **Μονάδες 9**

β. Να βρείτε το άθροισμα $S = α_{12}+α_{13}+...+α_{21}$, όπου $α_{12}, α_{13}, ..., α_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου $α_ν$. **Μονάδες 7**

γ. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης P(x)=0 είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου $α_ν$. **Μονάδες 9**

18.ΘΕΜΑ 2ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΑΪΟΣ 2003)

Ο τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 810 και ο πέμπτος όρος της είναι 2430. Να βρείτε:

α) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου, ***Μονάδες 7***

β) τον πρώτο όρο της και ***Μονάδες 8***

γ) το άθροισμα S_6 των έξι πρώτων όρων της προόδου. ***Μονάδες10***

19.ΘΕΜΑ 2ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ ΜΑΙΟΣ 2004)

Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου ($α_ν$) είναι 12 και ο 3ος όρος της προόδου είναι τριπλάσιος του 1ου όρου.

α) Να αποδείξετε ότι η πρόοδος έχει πρώτο όρο $α_1 = 2$ και διαφορά $ω = 2$

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τον $α_{1002}$. ***Μονάδες 7***

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα S_{60} των πρώτων εξήντα όρων της προόδου

Μονάδες 8

20.ΘΕΜΑ 3ο (ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2004)

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος ($α_ν$) με $α_4=4$ και $α_7=32$ και το πολυώνυμο $P(x)=2x^4+k^3x^3-6k^2x^2-2(k+2)x-4k,\ k\in\mathbb{R}$

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ και το λόγο λ της προόδου. **Μονάδες 12**

β. Αν ο τρίτος όρος $α_3$ της γεωμετρικής προόδου είναι μία ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$, να βρείτε τις τιμές του k. **Μονάδες 13**