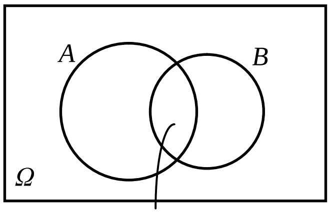
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΘΕΩΡΙΑ)

- **<u>Ποιο πείραμα λέγεται Αιτιοκρατικό Πείραμα;</u>**
  Αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα λέγεται το πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα
- **<u>Ποιο πείραμα λέγεται πείραμα τύχης;</u>**
  Πείραμα τύχης (random experiment) ονομάζεται το πείραμα του οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
- **<u>Τι λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις ενός πειράματος τύχης;</u>**
  Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος.
- **<u>Τι λέγεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;</u>**
  Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.
- **<u>Τι λέγεται ενδεχόμενο;</u>**
  Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. .
- **<u>Πότε ένα ενδεχόμενο λέγεται απλό και πότε σύνθετο;</u>**
  Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.
- **<u>Πότε λέμε ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται ή συμβαίνει</u>;**
  Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**.
- Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
- **<u>Τι ονομάζουμε βέβαιο ενδεχόμενο;</u>**
  Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.
- **<u>Τι ονομάζουμε αδύνατο ενδεχόμενο;</u>**
  Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.
- **Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$.**

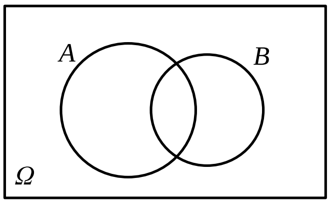
Πράξεις με Ενδεχόμενα

- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "A τομή B" ή "A και B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.



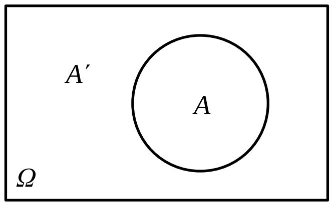
$A \cap B$

- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "A ένωση B" ή "A ή B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.

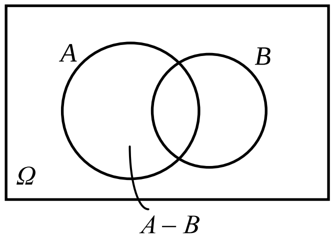


$A \cup B$

- Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι A" ή "συμπληρωματικό του A" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A' λέγεται και "αντίθετο του A".

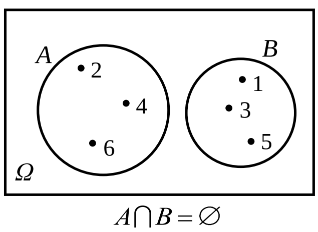


- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται "διαφορά του B από το A" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.



$A - B$

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.
Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**



$A \cap B = \varnothing$

Παρατηρήσεις

Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$
Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B.	$(A-B)\cup(B-A)$ ή ισοδύναμα το $(A\cap B')\cup(A'\cap B)$.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

- **Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α;**

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται *σχετική συχνότητα του A* και συμβολίζεται με f_A.

- **Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\lambda\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και σε ν εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\},...,\{\omega_\lambda\}$) πραγματοποιούνται $\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, με σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_λ τότε:**

1. $0 \le f_i \le 1, \quad i=1,2,...,\lambda$ **2.** $f_1+f_2+\ldots+f_\lambda=1$

Απόδειξη

Είναι : $f_1=\frac{\kappa_1}{\nu}, f_2=\frac{\kappa_2}{\nu},..., f_\lambda=\frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ θα έχουμε:

1. $0 \le f_i \le 1, \quad i=1,2,...,\lambda$ (αφού $0 \le \kappa_i \le \nu$)
2. $f_1+f_2+...+f_\lambda=\frac{\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_\lambda}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}=1$.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Γενικά, σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$. Γι'αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$
2. $P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}=0$
3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \le P(A) \le 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1$.

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}\neq\varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing)=0$.

Παρατηρήσεις

- Αν $P(\omega_i)=\frac{1}{\nu}$, $i=1,2,...,\nu$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου.
- Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω", εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i)=\frac{1}{\nu}$, $i=1,2,...,\nu$.

Τι ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών;

Στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών ονομάζεται το συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως "κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων". Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. **Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.**

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

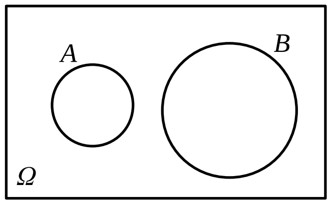
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, τότε το $A\cup B$ έχει $\kappa+\lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)$.

Επομένως:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}\\&=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}\\&=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}.\\&=P(A)+P(B).\end{aligned}$$



$A\cup B$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

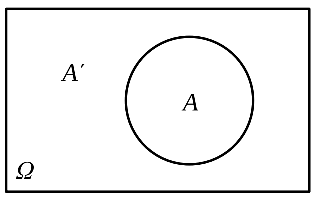
$$P(A')=1-P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A\cap A'=\varnothing$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$\begin{aligned}P(A\cup A')&=P(A)+P(A')\\P(\Omega)&=P(A)+P(A')\\1&=P(A)+P(A').\end{aligned}$$

Οπότε $P(A')=1-P(A)$.



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

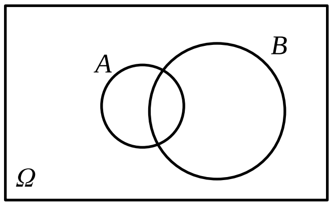
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)\,,\quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.



$A\cup B$

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\,.$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

4. Αν $A\subseteq B$, τότε $P(A)\le P(B)$

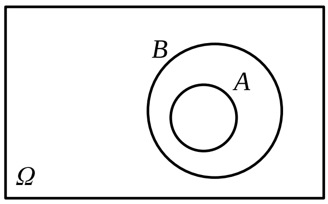
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A\subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A)\le N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)}\le\frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A)\le P(B).$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\,.$$

Άρα $\quad P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\,.$