ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΘΕΜΑΤΑ 1983

1η ΔΕΣΜΗ

1. **ΖΗΤΗΜΑ 1ον**

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$ με $f(x)=x^{\frac{x+1}{x}}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)$.

2. **ΖΗΤΗΜΑ 1ον**

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x)=(x^2-2x+3)^{\frac{1}{x}}$, στο $+\infty$.

3. **ΖΗΤΗΜΑ 2ον**

Η συνάρτηση f , ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α , β] , είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α , β) και f(α)=f(β)=0 .Να αποδειχτεί :

α) για τη συνάρτηση $F(x)=\frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c\notin[\alpha,\beta]$,ότι υπάρχει $c_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_o)=0$.

β) αν $c\notin[\alpha,\beta]$, ότι υπάρχει $c_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_o , f(c_o))$ της γραμμής με εξίσωση y=f(x) διέρχεται από το σημείο (c , 0) .

4. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον**

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x>0 ισχύει η σχέση : $\ln x\leq x-1$.

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$ με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x}, 0<x\neq 1\\ 0, x=0\\ -1, x=1\end{cases}$$. Να αποδειχθεί ότι :

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ,

ii) είναι φθίνουσα στο διάστημα (0 , 1) και

iii) $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

4η ΔΕΣΜΗ

5. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2-|x|-2$. Να γίνει μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

……..

ΘΕΜΑΤΑ 1984

4η ΔΕΣΜΗ

6. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον** Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής x με $\psi(x)=x+\frac{4}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της ψ .

β) Να εξετάσετε την ψ ως προς τη μονοτονία .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της ψ .

……

ΘΕΜΑΤΑ 1985

1η ΔΕΣΜΗ

7. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2(x-3)+4$, $x\in\Re$.Έστω x_1 , x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή . Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1 , f(x_1))$, $(x_2 , f(x_2))$, $(x_3 , f(x_3))$ είναι συνευθειακά .

4η ΔΕΣΜΗ

8. **ΖΗΤΗΜΑ 2ον**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$, $x\in \Re$.Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και το είδος μονοτονίας σε καθένα από αυτά , καθώς και τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα .Επίσης να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει : (α) τα κοίλα άνω , (β) τα κοίλα κάτω .Ακόμα να βρεθούν τα ενδεχόμενα σημεία καμπής .

9. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$, $x\in \Re$.Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

……………………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑΤΑ 1986

1η ΔΕΣΜΗ

10. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=(\alpha-\frac{2}{3})x^3-(\alpha+\frac{1}{2})x^2-10x+7$, $x\in \Re$. Να βρείτε το $\alpha\in \Re$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x=\frac{3}{2}$. Μετά για την τιμή αυτή του α , να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f .

4η ΔΕΣΜΗ

11. **ΖΗΤΗΜΑ 3ον**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2x^3+3x^2-36x+90$, $x\in \Re$.Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

12. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x-1$, $x\in \Re$. Αν C είναι η γραφική παράσταση της f , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $(1\ ,\ \frac{23}{6})$. Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιο σημείο η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα x΄x .

……………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 1987

1η ΔΕΣΜΗ

13. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4-14x^2+24x$.Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν τρία σημεία Α , Β , $\Gamma\in$ C , τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα Α , Β , Γ να είναι παράλληλες προς τον άξονα x΄x . Να αποδειχτεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y .

4η ΔΕΣΜΗ

14. **ΖΗΤΗΜΑ 4ον**

Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-12$. Να προσδιορίσετε τα α , β $\in \Re$ έτσι ώστε το σημείο Α(2 , -10) να ανήκει στη C και η εφαπτομένη της C στο Α να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό –3 .

……………………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑΤΑ 1988

1η ΔΕΣΜΗ

15. **ΖΗΤΗΜΑ 1ον**

Αν η πολυωνυμική εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί, έχει ως ρίζα τον μιγαδικό 2-3i, να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)= x^2+\beta x+\gamma$, στο σημείο Α(1,f(1)), όπου το x μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$.

4^{η} ΔΕΣΜΗ

16. <u>ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$</u>

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} 3x^2-5x+6, x\le 1 \\ 2\sqrt{x^2+3}, x>1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=1$.

17. <u>ΖΗΤΗΜΑ</u>

Έστω συνάρτηση f με $f(x)=3x^3-\alpha x^2+\beta x-3$, όπου α , β $\in \Re$.Εάν η f έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1=1$ και $x_2=-\dfrac{5}{9}$, τότε να βρεθούν οι αριθμοί α , β .

………

ΘΕΜΑΤΑ 1989

1^{η} ΔΕΣΜΗ

18. <u>ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$</u>

Έστω f , g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , για τις οποίες υποθέτουμε ότι :

i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ ,

ii) $f''=g''$ και

iii) $0\in\Delta$ και f(0)=g(0) .Να δειχθεί ότι :

α) Για κάθε $x\in\Delta$, f(x)-g(x)=cx όπου $c\in\Re$.

β) Αν η f(x)=0 έχει δύο ετερόσημες ρίζες ρ_1 , ρ_2 , τότε η g(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1 , \rho_2]$.

4^{η} ΔΕΣΜΗ

19. <u>ΖΗΤΗΜΑ $2^{ον}$</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+\dfrac{2\alpha}{x}+\beta$, (α , β $\in\Re$) η οποία μηδενίζεται στο $x_1=1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o=2$.

α) Να βρεθούν τα α , β .

β) Να βρεθεί το είδος του ακροτάτου και η τιμή του .

20. <u>ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3\alpha}{x^3}+1, 0<x\le 2 \\ \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, x>2 \end{cases}$.Να προσδιοριστεί το $\alpha\in\Re$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o=2$.

………

ΘΕΜΑΤΑ 1990

1^{η} ΔΕΣΜΗ

21. <u>ΖΗΤΗΜΑ $2^{ον}$</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\alpha x^3}{3}+(\dfrac{\beta}{2}+\delta)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$, όπου α , β , γ , δ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι $\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2}+\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0 , 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (ξ , f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x .

4^{η} ΔΕΣΜΗ

22. <u>ΖΗΤΗΜΑ $2^{ον}$</u>

Δίνεται η συνάρτηση g , η οποία είναι ορισμένη στο $\Re$,δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό και ισχύει ότι g(-1)=7.Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(x)=3(x-2)^2g(2x-5)$, να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

23. <u>ΖΗΤΗΜΑ</u>

Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2})x^2+(\alpha^3+7)x-5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής .

....

<u>ΘΕΜΑΤΑ 1991</u>

<u>4η ΔΕΣΜΗ</u>

24. <u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον</u>

Έστω η συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_o\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_o)-x_of'(x_o)$.

25. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

Α.Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες :

(i) είναι συνεχείς στο [α , β] και παραγωγίσιμες στο (α , β) ,

(ii) για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $g(x)\neq 0$ και (iii) f(β)g(α)-f(α)g(β)=0 .

Β. Να αποδείξετε ότι :

α) για την συνάρτηση F με $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο [α , β]

β) υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

26. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με f(x)>0 , $x\in\Re$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με $F(x)=[f(x)]^x$, $x\in\Re$.

β) Έστω α>0 .Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με $g(x)=\alpha^{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\Re$.

27. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης

$f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\Re$ με $f(x)=ημ^2x-\sqrt{2}\,ημx+2\sqrt{2}$.

....

<u>ΘΕΜΑΤΑ 1992</u>

<u>1η ΔΕΣΜΗ</u>

28. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$.Να δεχθεί ότι η συνάρτηση g με g(x)=lnf(x) , $x\in\Delta$, έχει την ιδιότητα « $g''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Delta$ » αν και μόνο αν ισχύει η σχέση :

$f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$, για κάθε $x\in\Delta$.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα , στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ έχει την ιδιότητα $g''(x)\geq 0$.

29. <u>ΖΗΤΗΜΑ 3ον</u>

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x-x$, $x\in\Re$ και 0<α<1 .

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2)$, όπου 0<α<1 .

30. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

α) Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\Re$ έχει την ιδιότητα $f'=f$ αν και μόνο αν $f(x)=ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά .

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις : $g'(x)συνx+g(x)ημx=g(x)συνx$ και g(0)=1992 .

$4^{η}$ ΔΕΣΜΗ

31. ΖΗΤΗΜΑ $2^{ον}$

Να αποδείξετε ότι για κάθε x στο ανοικτό διάστημα (0 , 1) ισχύει η σχέση : $1+x < e^x < 1+ex$.

32. ΖΗΤΗΜΑ $2^{ον}$

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} x^3 ημ\frac{1}{x} & , αν\ x\neq 0 \\ 0 & , αν\ x=0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε $x\in \Re$.

33. ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1)$, x>0 .

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της f για κάθε x>0 .

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα .

………

ΘΕΜΑΤΑ 1993

$1^{η}$ ΔΕΣΜΗ

34. ΖΗΤΗΜΑ $4^{ον}$

Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως . Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα υ=2 m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s(t)=υt , $t\in[0 , 5]$ όπου t ο χρόνος (σε sec).

α) Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου .

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 6m ;

$4^{η}$ ΔΕΣΜΗ

35. ΖΗΤΗΜΑ $2^{ον}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3x+μ$, $x\in \Re$, όπου μ είναι πραγματικός αριθμός . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο ανοικτό διάστημα (1 , 2) .

36. ΖΗΤΗΜΑ $3^{ον}$

Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από τη συνάρτηση : $K(x)=\frac{α}{4}x^3$, όπου το x διατρέχει το ανοικτό διάστημα $(0 , +\infty)$ και η παράμετρος α παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[\frac{2}{9},\frac{9}{2}]$. Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x)=x^2$, $x\in(0 , +\infty)$ και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)= E(x)- K(x)$, $x\in(0 , +\infty)$.

α) Να βρείτε την ποσότητα x_o για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος , το οποίο συμβολίζουμε με Μ(α)

β) Να βρείτε την τιμή του $α\in[\frac{2}{9},\frac{9}{2}]$ για την οποία το Μ(α) γίνεται μέγιστο , καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος .

………

ΘΕΜΑΤΑ 1994

1η ΔΕΣΜΗ

37. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1 , e] με 0<f(x)<1 και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_o \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_o) + x_o \ln x_o = x_o$.

38. ΖΗΤΗΜΑ 2ον

Έστω ρ πραγματικός αριθμός , Α(x) , Β(x) πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές , ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το Α(x) έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2 .

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο f(x) , τέτοιο ώστε $A(x)B(x)=(x-\rho)^2 f(x)$, αν και μόνο αν $A(\rho)=A'(\rho)=0$.

β) Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1 .Να βρείτε τις τιμές των κ , λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(x)=x^{\nu}(\nu x^3+\kappa x^2+\lambda x+8)$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

4η ΔΕΣΜΗ

39. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2-2x\ln x$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(1 , f(1)) και να προσδιορίσετε το α , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

40. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Έστω ότι η ευθεία y=2x+5 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu\cdot f(x)+4x}{x\cdot f(x)-2x^2+3x}=1$.

41. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Να αποδείξετε ότι :

α) $e^x-x+1>0$, για κάθε $x \in \Re$.

β) Η εξίσωση $2e^x+2x = x^2+2$ έχει ακριβώς μια λύση , την x=0 .

....

ΘΕΜΑΤΑ 1995

1η ΔΕΣΜΗ

42. ΖΗΤΗΜΑ 2ον

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ , λ με κ<λ και η συνάρτηση $f(x)= (x-\kappa)^5(x-\lambda)^3$ με $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$, για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ , λ) .

4η ΔΕΣΜΗ

43. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+\alpha$, $\alpha \in \Re$.

α) Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1<x_2<x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

β) Αν 0<α<1 , να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (-1 , 0) .

44. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x)f'(x)=2f(x)$, για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι , αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_o, f(x_o))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_o, g(x_o))$ είναι παράλληλη στην ευθεία y-2x+5=0 .

45. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t , σύμφωνα με τη συνάρτηση f(t)= $\frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου Α ένας θετικός αριθμός . Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) , από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή , δίνεται από τη συνάρτηση K΄(t)= $\frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι K(0)=0 . Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή , έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο .

……………………………………………………………………………………………………

<u>ΘΕΜΑΤΑ 1996</u>

<u>1η ΔΕΣΜΗ</u>

46. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f , g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\Re$.
Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις f ΄=g , g΄= -f τότε να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχουν οι συναρτήσεις f ΄΄ και g΄΄ και είναι συνεχείς

β) ισχύουν οι σχέσεις f ΄΄+f= g΄΄+g=0 και ότι η συνάρτηση $h=f^2+g^2$ είναι σταθερή

γ) αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, τότε η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

47. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Να αποδείξετε τις ανισότητες :

α) ημx < 2x , x >0 .

β) ημx > x- $\frac{x^3}{3}$, x >0 .

<u>4η ΔΕΣΜΗ</u>

48. <u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον</u>

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση : f ΄(x)=g΄(x)+$ημ^2x+e^x$, $x \in [0,+\infty)$.
Να αποδείξετε ότι f(0)+g(x)<g(0)+f(x) , $x \in (0,+\infty)$.

49. <u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}$, όπου $\alpha \in \Re$.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου α έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση f ΄΄(x)+2f ΄(x)=3f(x) , για κάθε $x \in \Re$.

50. <u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον</u>

Έστω $\lambda , \mu , \beta_1 , \beta_2 \in \Re$ με $\beta_1 \neq \beta_2$.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\lambda e^{\beta_1 x}+\mu e^{\beta_2 x}$ με $x \in \Re$. Έστω ότι υπάρχει $x_o \in \Re$ τέτοιος ώστε $g(x_o)= g΄(x_o)=0$.Να αποδειχθεί ότι λ=μ=0 .

51. <u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον</u>

Έστω ότι f(t) είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου $t \geq 0$ και $f : [0, +\infty) \to \Re$ είναι πραγματική συνάρτηση με $f(\sqrt{t}) = 1-2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$.Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0=0$.

……………………………………………………………………………………………………..

ΘΕΜΑΤΑ 1997

1η ΔΕΣΜΗ

52. ΖΗΤΗΜΑ 2ον

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού το $\Re$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.Έστω α πραγματικός αριθμός .Θέτουμε $A=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B=\frac{f'(\alpha)-Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$.Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\Re-\{\alpha\}$, τέτοια ώστε

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{\phi(x)}{g(x)}$$

για κάθε $x \in \Re-\{\alpha\}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha}$ φ(x) .

53. ΖΗΤΗΜΑ 2ον

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f , ορισμένη στο $\Re$, δύο φορές παραγωγίσιμη , τέτοια ώστε $(x-2)f''(x)+(\alpha\eta\mu x-\beta x^2)f'(x) = e^{x-2} -1$ για κάθε $x \in \Re$,
όπου α , β πραγματικοί αριθμοί .Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$,
ώστε $f'(\rho)=0$. Να εξετάσετε αν ισχύει η σχέση $f''(\rho)>0$.

54. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Δίνεται πραγματική συνάρτηση g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, τέτοια ώστε $g(x)>0$ και $g''(x)g(x)-[g'(x)]^2>0$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

β) $g(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε x_1 , $x_2 \in \Re$.

55. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g , παραγωγίσιμη στο $\Re$, τέτοια ώστε $g(x+y) = e^y g(x)+e^x g(y)+xy+\alpha$ για κάθε x , y $\in \Re$, όπου α πραγματικός αριθμός . Να αποδείξετε ότι :

α) g(0) = -α

β) $g'(x) = g(x)+g'(0)e^x+x$ για κάθε $x \in \Re$.

....

ΘΕΜΑΤΑ 1998

1η ΔΕΣΜΗ

56. ΖΗΤΗΜΑ 2ον

Της γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει g(x) μονάδες του παραγόμενου προϊόντος .Αν $g(x)=M_0+M(1-e^{-\mu x})$, $x \geq 0$, όπου M_0 , M και μ είναι θετικές σταθερές , να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της g(x).Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0

....

ΘΕΜΑΤΑ 1999

1η ΔΕΣΜΗ

57. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, δύο φορές παραγωγίσιμη , η οποία σε σημείο $x_o \in \Re$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση :

$f''(x) > 4(f'(x)-f(x))$, για κάθε $x \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\Re$.

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Re$.

$4^η$ ΔΕΣΜΗ

58. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

α) Να αποδείξετε ότι : $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για κάθε $x \in [0 , +\infty)$.

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0 , +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$[f(x)]^5+2[f(x)]^3+3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} +182, \text{ για κάθε } x\in[0 ,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0 , +\infty)$.

59. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ^2(αx)$, $x\in \Re$ και $α\in \Re$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει $f''(x) + 4α^2f(x) = 2$ για κάθε $x\in \Re$.

60. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ τέτοια ώστε $\frac{f(2)}{2} = \frac{f(1)}{1}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x) – f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1 , 2) .

....

ΘΕΜΑΤΑ 2000

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

61. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0 , 1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0 , 1)$. Αν f(0) = 2 και f(1) = 4 , να δείξετε ότι :

α) η ευθεία y = 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o\in(0 , 1)$.

β) υπάρχει $x_1\in(0 , 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$

γ) υπάρχει $x_2\in(0 , 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2 , f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x+2000 .

62. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Τη χρονική στιγμή t = 0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{αt}{1+(\frac{t}{β})^2}$, $t \geq 0$, όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες . Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου .

α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική , όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες , να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά .

63. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά . Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του , όπου $t \geq 0$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\frac{8}{t+1} - 2$:

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t) .

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου , η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη ;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό , ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί .
(Δίνεται ότι $\ln 11 \cong 2{,}4$)

$4^η$ ΔΕΣΜΗ

64. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Έστω η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \Re$, με $f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$. Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000 . Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y = c και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου , τα Α και Β . Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα Α και Β , είναι κάθετες μεταξύ τους .

$1^η$ ΔΕΣΜΗ

65. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Έστω f , g : $\Re \to \Re$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\Re$ τέτοιες , ώστε να ισχύει
$f(x) - g(x) = x - 4$, για $x \in \Re$. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y = 3x-7 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς $x \to +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση y = 2x-3 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , καθώς $x \to +\infty$.

$4^η$ ΔΕΣΜΗ

66. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f : $\Re \to \Re$ τέτοια ώστε :
$2xf(x) + (x^2+1)f\,'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \Re$, με f(0) = 1 .

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \Re$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

....

ΘΕΜΑΤΑ 2001

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

67. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$, ισχύει ότι :
$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \Re$, όπου β , γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα .

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0 , 1) .

$1^η$ ΔΕΣΜΗ

68. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Έστω η συνάρτηση f : [α , β] $\to \Re$, η οποία είναι συνεχής στο [α , β] , παραγωγίσιμη στο (α , β) και f(α) = 2β , f(β) = 2α .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 2x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α , β) .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f\,'(\xi_1)f\,'(\xi_2) = 4$.

69. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2x\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha$, $x \in \Re$ και $\alpha \in \Re$.
Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής , το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή .

$4^η$ ΔΕΣΜΗ

70. ΖΗΤΗΜΑ 1ον

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$, $x \in \Re$, είναι γνησίως αύξουσα .

β) Η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0 , 1) .

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

71. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+\alpha, & x \le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\ln(x-1), & x \in (1,2] \end{cases}$ **όπου α∈R**

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$

β. Να βρείτε το α∈R ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=1$.

γ. Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(1,2) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

4η ΔΕΣΜΗ

72. ΖΗΤΗΜΑ 1ον (4η ΔΕΣΜΗ-2001)

Έστω η συνάρτηση f(x) = $\dfrac{\alpha x^2 + \beta x}{x-2}$, $x \in \Re - \{2\}$, όπου α , β∈ $\Re$. Αν η ευθεία

ε : y = 2x – 1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, να βρείτε τις τιμές των α , β .

……..

ΘΕΜΑΤΑ 2002

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

73. ΖΗΤΗΜΑ 3ον

Έστω οι συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού το $\Re$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1 – 1 .

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1 – 1 .

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα .

. . . .

ΘΕΜΑΤΑ 2003

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

74. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α , β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α , β) . Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α , β) , δ∈(α , β) , έτσι ώστε f(γ)f(δ) < 0 , να αποδείξετε ότι :

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο διάστημα (α , β) .

β) Υπάρχουν σημεία ξ_1 , ξ_2 ∈(α , β) τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

75. ΖΗΤΗΜΑ 4ον

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο ℝ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε x ∈ ℝ.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα**.**

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o .

……………………………………………………………………………………………….

ΘΕΜΑΤΑ 2004

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

76. ΘΕΜΑ 2ον

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

77. ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 1 \\ 6x + k, & x \geq 1 \end{cases}$, όπου $k \in IR$.

α. Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. **β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, ώστε να ισχύει: $\mu f'(-5) + f'(5) + 34 = 0$.

78. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in IR$ και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f.

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

79. ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: IR \to IR$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}, m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

80. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to IR$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $Re(z)I > Im(z)I$.

Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

…………………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑΤΑ 2005

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

81. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3+kx^2+3x-2$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

α. $k = -1$.

β. Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

γ. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα$(0, 1)$.

82. <u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{2-\alpha\ \ x^{2}-kx+2}{x-3}\quad \text{με } \alpha,\ k\in \mathbb{R} \text{ και } x\neq 3.$$

α. Αν η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι α = 1 και k = 3.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$.

<u>ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ</u>

83. <u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases}-x^{3}+1 & ,\quad x<1\\ x^{4}-1 & ,\quad x\geq 1\end{cases}$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια. **Μονάδες 6**

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f. **Μονάδες 10**

γ. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [−1,2]. **Μονάδες 9**

84. <u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{kx-x^{2}}{4}$, με $x\in \mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο Ο(0,0) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 1.

α. Να αποδείξετε ότι k **Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε. **Μονάδες 8**

γ. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα (2,4) υπάρχει μοναδικό σημείο ξ, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, όπου Α(2, f(2)) και Β(4, f(4)). **Μονάδες 10**

<u>ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ</u>

85. <u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1". **Μονάδες 7**

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\ \ -2004+f(x^{2}-8)\ \ =-2$. **Μονάδες 9**

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=-\dfrac{1}{668}x+2005$. **Μονάδες 9**

……

<u>ΘΕΜΑΤΑ 2006</u>

<u>ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ</u>

86. <u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **Μονάδες 8**

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=lnx στο σημείο Α(α,lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^{\beta})$ με $\beta \in IR$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. **Μονάδες 9**

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες. **Μονάδες 3**

<u>ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ</u>

87. <u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x+\lambda & , \quad x\le 1 \\ \frac{x^2-8x+4}{4x} & , \quad x>1 \end{cases}$ με $\lambda \in R$

Ι. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. **Μονάδες 10**

ΙΙ. Για λ=0

α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R. **Μονάδες 7**

β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ **Μονάδες 8**

88. <u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Για $k \in R$δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-kx^2+10$ για κάθε $x \in R$

Ι. Να βρεθεί η τιμή του $k \in R$για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (1, f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Μονάδες 5**

ΙΙ. Για k = 3

α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$. **Μονάδες 5**

γ. και για κάθε $\alpha \in (14,15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = α–5 έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (0,1). **Μονάδες 7**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

89. <u>ΘΕΜΑ 2°</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+e^{x}}{1+e^{x+1}}$, x∈IR.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο IR. **Μονάδες 9**

γ. Για κάθε x<0 να αποδείξετε ότι: $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$. **Μονάδες 7**

90. <u>ΘΕΜΑ 4°</u>

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = xln(x+1)-(x+1)lnx με x>0.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,+∞). **Μονάδες 12**

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. **Μονάδες 5**

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α ∈ (0,+∞) τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha}=\alpha^{\alpha+1}$. **Μονάδες 8**

....

ΘΕΜΑΤΑ 2007

91. <u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Έστω η $\mathbf{f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta}$ όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in z$

α) Δείξτε ότι η **f** παρουσιάζει ένα **τοπικό μέγιστο** , ένα **τοπικό ελάχιστο** και **ένα σημείο καμπής**. **Μονάδες 7**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **f(x) = 0** έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες. **Μονάδες 8**

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων και x_3 η θέση του σημείου καμπής δείξτε ότι τα $A(x_1,f(x_1)), B(x_2,f(x_2)), \Gamma(x_3,f(x_3))$ βρίσκονται στην $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$ **Μονάδες 3**

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

92. <u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4}{x}$, με x>0.

α. Να βρείτε τα όρια i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{xf(x)}{(x-2)^2}$ **Μονάδες 8**

β. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο O(0,0) τη μικρότερη απόσταση. **Μονάδες 9**

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία y=-2x+6. **Μονάδες 8**

93. <u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο R. Αν για κάθε $x\neq0$ ισχύει xf(x)=x+2ημx, τότε:

α. Να βρείτε το f(0). **Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι f(x)<3 για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. **Μονάδες 10**

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. **Μονάδες 8**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

94. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$. **Μονάδες 10**

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 7**

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

95. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{2}, & x < 2 \\ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$. **Μονάδες 12**

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ (0,f(0)). **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \dfrac{1}{2}x-2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. **Μονάδες 7**

96. ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 8x^3 -12x^2+8x-2$, για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1. **Μονάδες 8**

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια μόνο ρίζα στο (0, 1). **Μονάδες 9**

γ. Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(g(x)-3x) = f(x^2+2)$ για κάθε $x \in R$, να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο. **Μονάδες 8**

……………………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑΤΑ 2008

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

97. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. **Μονάδες 3**

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. **Μονάδες 6**

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 7**

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

98. ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \ x \le 1 \\ (x-1)^2 & , \ x > 1 \end{cases}$

Α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι:

α. συνεχής στο σημείο $x_o = 1$ **Μονάδες 8**

β. παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 1$. **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(2, 1). **Μονάδες 7**

99. ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2+2x+k}{x}$,

όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **Μονάδες 3**

Β. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της M(1, f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να βρείτε την τιμή του k. **Μονάδες 8**

Γ. Για k = 1,

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 8**

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$. **Μονάδες 6**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

100. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$. **Μονάδες 6**

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \quad x>0 \\ k & , \quad x=0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής. **Μονάδες 6**

ii. Αν $k = -\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e). **Μονάδες 7**

……………………………………………………………………………………………

ΘΕΜΑΤΑ 2009

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

101. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x>-1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x>-1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$ **Μονάδες 8**

Β. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. **Μονάδες 5**

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$, και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ **Μονάδες 6**

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$ **Μονάδες 6**

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

102. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq 1 \\ 2x+3, & x > 1 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$. **Μονάδες 5**

β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$. **Μονάδες 10**

γ. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, στο $-\infty$ και στο $+\infty$. **Μονάδες 10**

103. ΘΕΜΑ 4ο

Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Ι. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ. **Μονάδες 4**

ΙΙ. Για $\lambda = 0$

α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

β. να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$. **Μονάδες 8**

γ. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. **Μονάδες 5**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

104. ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2)$, $x > -1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 5**

Β. Έστω ότι $\lambda = -1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 10**

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$ **Μονάδες 4**

....

ΘΕΜΑΤΑ 2010

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

105. ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. **Μονάδες 5**

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2-3x+2)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ **Μονάδες 7**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ. **Μονάδες 6**

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ **Μονάδες 7**

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3+3x+\text{συν}x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ**1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

Γ**2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0,π). **Μονάδες 5**

Γ**3.** Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2+8) = f(6x)$ **Μονάδες 10**

Γ4. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x}+2x$, $x\neq 0$. Να βρείτε:

Δ1. Τα τοπικά ακρότατα της f. **Μονάδες 8**

Δ**2.** Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 8**

Δ**3.** Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(1, f(1)). **Μονάδες 4**

Δ**4.** Το σημείο M(ξ, f(ξ)), ξ>0, της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα AB με A(1, f(1)), B(3, f(3)). **Μονάδες 5**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f **Μονάδες 5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, +∞) **Μονάδες 5**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες. **Μονάδες 6**

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi\cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M(ξ, f(f)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **Μονάδες 9**