ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

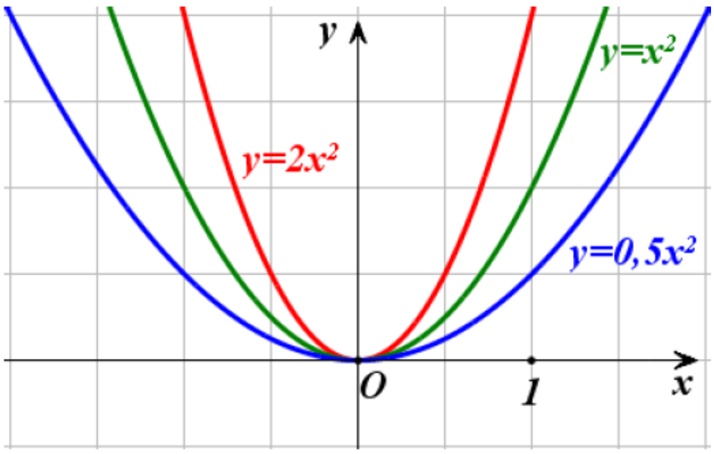
Η πορεία την οποία ακολουθούμε για να χαράξουμε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης λέγεται **μελέτη συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.
3. Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (“οριακές τιμές” κτλ.).
4. Συντάσσουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης και, με τη βοήθεια αυτού και των προηγούμενων συμπερασμάτων, χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x)=\alpha x^2$

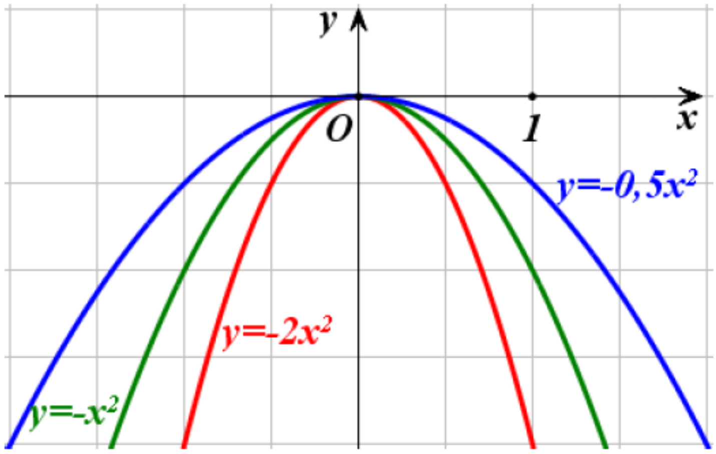
- Αν $\alpha>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$, $\alpha>0$	$+\infty$ ↘	0 min	↗ $+\infty$



- Αν $\boldsymbol{\alpha < 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha<0$	$-\infty$ ↗	**max** **0**	↘ $-\infty$



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μια καμπύλη που λέγεται **παραβολή** με **κορυφή** την αρχή των αξόνων και **άξονα συμμετρίας** τον άξονα $y'y$.

Στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

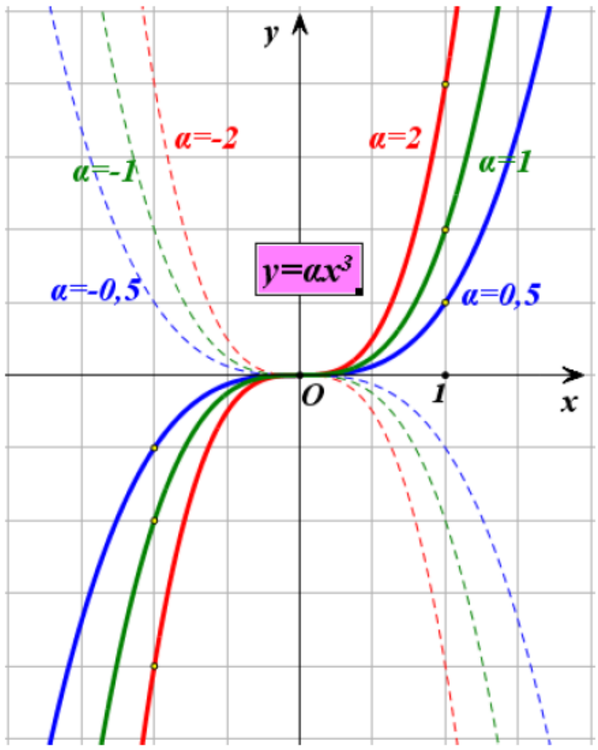
- ✓ Όταν το α είναι θετικό, τότε η παραβολή είναι “ανοικτή” προς τα πάνω, ενώ όταν το α είναι αρνητικό, τότε η παραβολή είναι “ανοικτή” προς τα κάτω.
- ✓ Καθώς η $|\alpha|$ μεγαλώνει, η παραβολή γίνεται όλο και πιο “κλειστή”, δηλαδή “πλησιάζει” τον άξονα $y'y$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: h(x)=αx³

- Αν $\alpha > 0$,
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

  - ✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα κάτω όταν το x τείνει στο $-\infty$.
- Αν $\alpha < 0$,
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
  - ✓ Έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και απεριόριστα προς τα πάνω όταν το x τείνει στο $-\infty$.

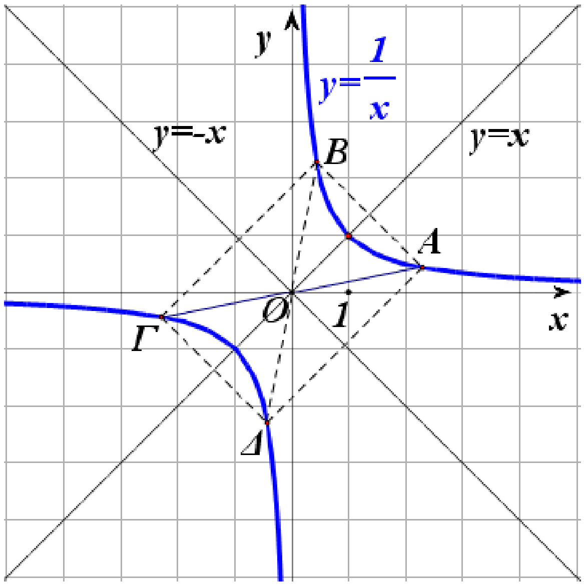


ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$

πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι περιττή

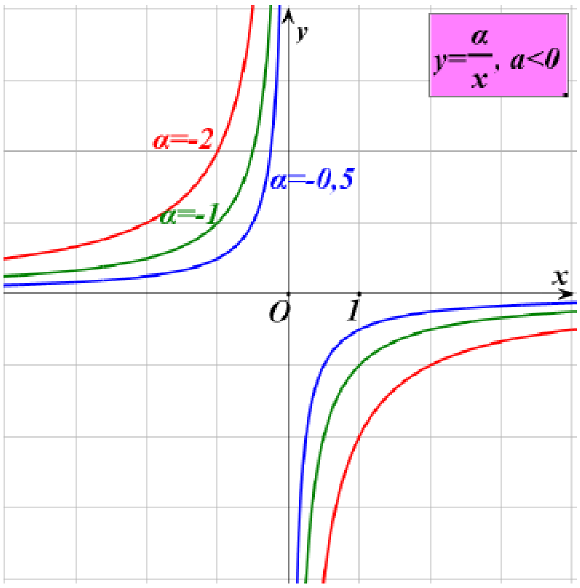
- Αν $\alpha>0$

- Είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:
  - ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 1^{o} και έναν στο 3^{o} τεταρτημόριο,
  - ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
  - ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y=x$ και $y=-x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος
  - ✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.



- Αν $\alpha < 0$

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
- Έχει γραφική παράσταση η οποία:
  - ✓ αποτελείται από δύο κλάδους, έναν στο 2^{o} και έναν στο 4^{o} τεταρτημόριο,
  - ✓ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων,
  - ✓ έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$, που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων και τέλος
  - ✓ έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \neq 0$, λέγεται **ισοσκελής υπερβολή** με **κέντρο** την αρχή των αξόνων και **ασύμπτωτες** τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

- Αν $\alpha>0$,
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.
  - ✓ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty \qquad \frac{-\beta}{2\alpha} \qquad +\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha>0$	$+\infty \searrow \frac{-\Delta}{4\alpha} \nearrow +\infty$ min

- Αν $\alpha<0$, η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$:
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$
  - ✓ Παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$,το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$.

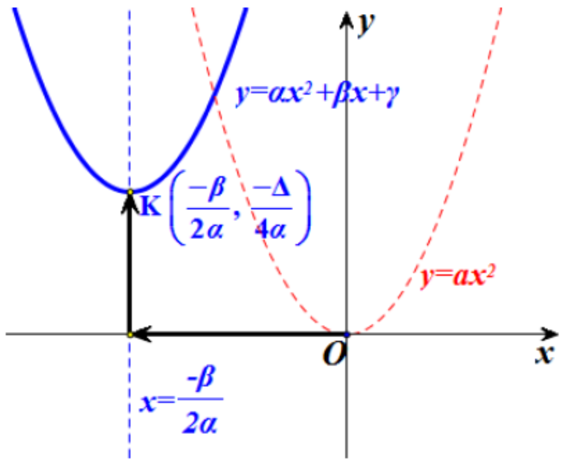
Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα.

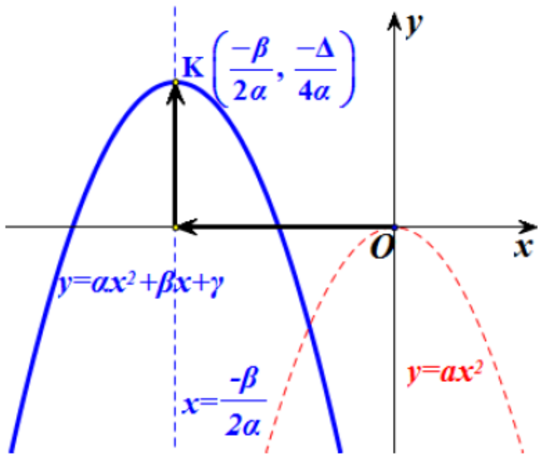
x	$-\infty \qquad \frac{-\beta}{2\alpha} \qquad +\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha<0$	$-\infty \nearrow \frac{-\Delta}{4\alpha} \searrow -\infty$ max

η γραφική της παράσταση είναι

μια **παραβολή**, που έχει **κορυφή** το σημείο $\mathbf{K}\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και

άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

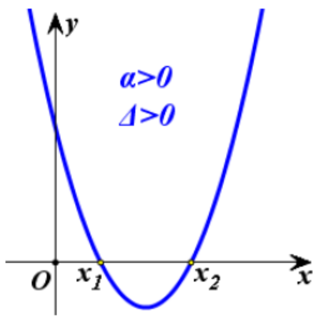




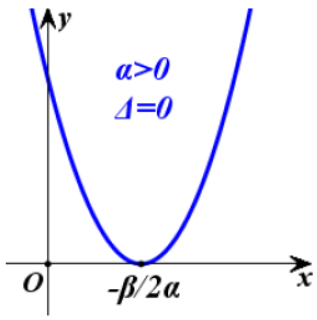
Τέλος η γραφική παράσταση της f είναι μια **παραβολή** που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,\gamma)$, διότι $f(0)=\gamma$, ενώ για τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ παρατηρούμε ότι:

- Αν $\Delta>0$, το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 και επομένως η παραβολή $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία, τα $\mathrm{A}(x_1,0)$ και $\mathrm{B}(x_2,0)$ (Σχ. α΄).
- Αν $\Delta=0$, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα την $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η παραβολή εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},0\right)$ (Σχ. β΄).
- Αν $\Delta<0$, το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως η παραβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ (Σχ. γ΄).

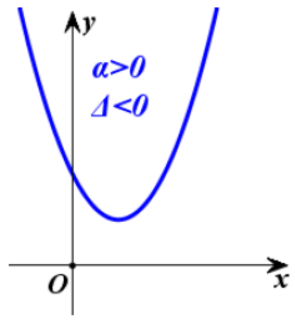
Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα παρακάτω σχήματα:



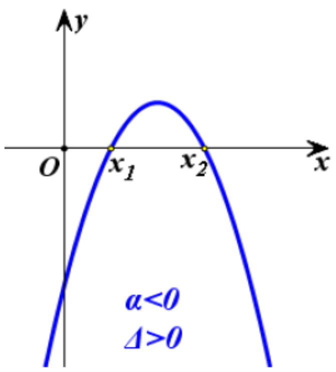
Σχήμα α΄



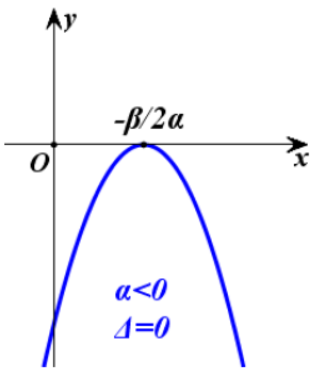
Σχήμα β΄



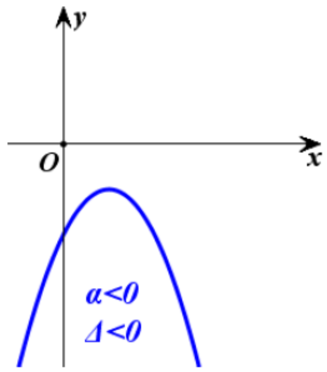
Σχήμα γ΄



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄