ΘΕΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1.	**<u>ΖΗΤΗΜΑ 4ον (1η ΔΕΣΜΗ-1984)</u>** Έστω z ο μιγαδικός x+yi με $y \neq 0$ ($x,y \in \mathbb{R}$) ,θέτουμε ω=$\frac{\overline{z}^2}{z-1}$ όπου $\overline{z}$ ο συζυγής του z. Να δείξετε ότι ο ω είναι πραγματικός αριθμός, αν και μόνον αν το σημείο (x, y) ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.
2.	**<u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον (1η ΔΕΣΜΗ-1986)</u>** **Α. i.** Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού. **ii.** Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2 . Να δείξετε ότι : $\|z_1 \cdot z_2\| = \|z_1\| \cdot \|z_2\|$ **Β.** Έστω z=(2x-3)+(2y-1)I, ($x,y \in \mathbb{R}$). Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) που είναι τέτοια ώστε : $\|2z-1+3i\|$=3 είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του καθώς και την ακτίνα του.
3.	**<u>ΖΗΤΗΜΑ 1ον(1η ΔΕΣΜΗ-1991)</u>** **Β.** Αν ω=$\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ $\mu\varepsilon\ \alpha \in \mathbb{R}^*\ \ \kappa\alpha\iota\ \ z \neq \alpha i$, τότε να αποδειχθεί ότι : **α)** Ο ω είναι φανταστικός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός αριθμός. **β)** Ισχύει $\|\omega\|$=1 αν και μόνον αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.
4.	**<u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον(1η ΔΕΣΜΗ-1993)</u>** Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z-1 \quad \overline{z}+1}{z+\overline{z}}$ $\mu\varepsilon\ \ z \in \mathbb{C}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ Re(z) \neq 0$ **α)** Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{\overline{z}}\right) = f \;\; z$. **β)** Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία Μ(x,y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί z=αx+βyi , με $\alpha,\beta,x,y \in \mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \alpha\beta x \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση : Re[f(z)]=0.
5.	**<u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον(1η ΔΕΣΜΗ-1994)</u>** **Α.** Στο σύνολο των μιγαδικών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων : $(z^2+1)^2+z^3+z=0$ και $z^{16}+2z^{14}+1=0$. **Β.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, ω και ω_1, τέτοιους ώστε ω=z-zi και ω_1=$\frac{1}{\alpha}+\alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει ω=$\overline{\omega}_1$, τότε η εικόνα Ρ του z στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται σε μια υπερβολή.
6.	**<u>ΖΗΤΗΜΑ 2ον(1η ΔΕΣΜΗ-1999)</u>** Έστω ο μιγαδικός z=x+yi, $x,y \in \mathbb{R}$ **α)** Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x,y) που είναι τέτοια ώστε: $\|z-1\|^2 + \|z-3-2i\|^2 = 6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του. **β)** Έστω Ο η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ε_1,ε_2 είναι οι δυο εφαπτόμενες που άγονται από το Ο στον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δύο σημείων επαφής M_1, M_2.
7.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο (ΙΟΥΝΙΟΣ 2000)</u>** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5+i}{2+3i}$ Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $\left\|\frac{z-1}{z-i}\right\| = 1$.

8.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(Εσπερινο 2000)</u>** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=7+8i$ και $z_2=4-5i$. α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $z_1 \cdot z_2$. β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\frac{z_1}{z_2}$.
9.	**ΘΕΜΑ 2ο(ΕΠΑΝΑΛ. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΛΙΟΣ 2001)** α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $\lvert z+16\rvert = 4\lvert z+1\rvert$ β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για **τους** οποίους ισχύει: $\lvert z-1\rvert = \lvert z-i\rvert$
10.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(ΙΟΥΝΙΟΣ 2002)</u>** Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbf{N}^*$. **α.** Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.
11.	**<u>ΘΕΜΑ 3ον (ΙΟΥΛΙΟΣ 2002)</u>** Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$,με τύπο $f(x)=\frac{\lvert x-z\rvert^2-\lvert x+\bar{z}\rvert^2}{x^2+\lvert z\rvert^2}$ όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$. α).Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x).$ β).Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $\lvert z+1\rvert > \lvert z-1\rvert$. γ).Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.
12.	**<u>ΘΕΜΑ 2ον (ΜΑΪΟΣ 2003)</u>** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in R$ και $w=3z - i\bar{z} +4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z. **α.** Να αποδείξετε ότι $Re(w)=3\alpha-\beta+4$ $Im(w)=3\beta-\alpha$. **β.** Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$. γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.
13.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(ΙΟΥΛΙΟΣ 2003)</u>** α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $\lvert z\rvert = 2$ και $Im(z)\geq 0$. β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x .
14.	**<u>ΘΕΜΑ 4ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2004)</u>** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in IR$ ώστε να ισχύει: $$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = a + \ 1 - a \ i$$ Να αποδείξετε ότι: **α.** αν $Im(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$. **β.** αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$. **γ.** για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \leq \alpha \leq 1$. **δ.** οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

15.	**<u>ΘΕΜΑ 2ον (ΜΑΪΟΣ 2003)</u>** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 3$. **α.** Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$ **β.** Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός . **γ.** Δείξτε ότι: $\|z_1 + z_2 + z_3\| = \dfrac{1}{3}\|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1\|$.
16.	**<u>ΘΕΜΑ 1ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2005)</u>** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z = \lambda^2 - 2 + (3-2\lambda)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w = k+4i$, $k > 0$. Για τους z, w ισχύουν: $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0$ και $\|w\| = 5$. **α.** Να αποδείξετε ότι $z = -1+i$. **β.** Να αποδείξετε ότι $k = 3$. **γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu\overline{z} = 3i - w$
17.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(Επαναληπτικές 2005)</u>** **α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4+4i$ και $2z_1 - \overline{z_2} = 5+5i$, να βρείτε τους z_1, z_2. **β.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $\|z - 1 - 3i\| \leq \sqrt{2}$ και $\|w - 3 - i\| \leq \sqrt{2}$: **i.** να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w και **ii.** να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $\|z - w\|$.
18.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(Δ. ΕΣΠΕΡΙΝΟ Επαναληπτικές 2005)</u>** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{x+3i}{2-i}$, $x \in \mathbb{R}$. **α.** Να βρείτε το x, ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός. **β.** Αν x = –6, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός. **γ.** Αν x = 4, να βρείτε το $\|\overline{z}\|$.
19.	**<u>ΘΕΜΑ 3ον (ΜΑΪΟΣ 2006)</u>** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $\|z_1\| = \|z_2\| = \|z_3\| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ **α.** Να αποδείξετε ότι: **i.** $\|z_1 - z_2\| = \|z_3 - z_1\| = \|z_2 - z_3\|$. **ii.** $\|z_1 - z_2\|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \geq -1$ **β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

20.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2006)</u>** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 13 = 0$ (1) **α.** Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1). **β.** Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \|z_1\|^2 - 2\|z_1 \cdot z_2\| + \sqrt{13}\,\|\overline{z_2}\| + i^{2006}$. **γ.** Αν $z_1 = 2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $\|z - z_1\| = 5$
21.	**<u>ΘΕΜΑ 3ο(Επαναληπτικές 2006)</u>** Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$, $\alpha \in IR$. α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2.
22.	**<u>ΘΕΜΑ 2ον (ΜΑΪΟΣ 2007)</u>** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $\mathbf{z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}}$ με $\mathbf{\alpha \in R}$ **α)** Δείξτε ότι η εικόνα του **z** ανήκει στον **κύκλο** κέντρου **0(0,0)** και ακτίνας $\boldsymbol{\rho = 1}$ **β)** Έστω $\mathbf{z_1, z_2}$ οι μιγαδικοί που προκύπτουν για $\boldsymbol{\alpha = 0}$ και $\boldsymbol{\alpha = 2}$ αντίστοιχα. **i.** Να βρεθεί η **απόσταση** των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $\mathbf{z_1}$ και $\mathbf{z_2}$ ii. Να αποδείξετε ότι $(z_1)^{2\nu} = (z_2)$ για κάθε φυσικό αριθμό **ν**
23.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2007)</u>** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(\lambda-2)+2\lambda i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z. β. Αν ισχύει $z + \overline{z} = 2$, να βρείτε το $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ γ. Αν $\|z\| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, να βρείτε το λ.
24.	**<u>ΘΕΜΑ 4ον (ΕΠΑΝ. ΙΟΥΛ. 2007)</u>** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2 = \frac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$ α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$. β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και αβ>0, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $(z_1+1+i)^{20}-(\overline{z_1}+1-i)^{20}=0$.
25.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(Δ. ΕΣΠΕΡΙΝΟ Επαναληπτικές 2007)</u>** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $\|z - 1 + i\| = \|iz\|$ **α. i)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z. **ii)** Να βρείτε ποια από τα σημεία Μ απέχουν από την αρχή Ο(0,0) απόσταση ίση με $\sqrt{5}$. **β.** Αν Re(z)=0, τότε να δείξετε ότι z=-i.

26.	**ΘΕΜΑ 2ον (ΜΑΪΟΣ 2008)** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $\left\|(i+2\sqrt{2})z\right\|=6$ και $\|w-(1-i)\|=\|w-(3-3i)\|$ τότε να βρείτε: α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . **β.** το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . γ. την ελάχιστη τιμή του $\|w\|$ **δ.** την ελάχιστη τιμή του $\|z-w\|$
27.	**ΘΕΜΑ 2ον (ΜΑΪΟΣ 2009)** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i$, $\lambda\in\mathbb{R}$ **Α. α**. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 9** **β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. **Μονάδες 8** **Β**. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $\|w\|^2+\overline{w}-12=z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. **Μονάδες 8**
28.	**ΘΕΜΑ 2ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2009)** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=2+3i$ και $z_2=(1-i)2+3i2009+1$. **α.** Να αποδείξετε ότι $z_2=1+i$. **Μονάδες 8** **β.** Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\overline{z_1}-z_2$. **Μονάδες 7** **γ.** Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή κ+λi, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 10**
29.	**ΘΕΜΑ 2ον (ΕΠΑΝ. ΙΟΥΛ. 2009)** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-8=0$ α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z=x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. **Μονάδες 10** β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. **Μονάδες 8** γ. Για τους αριθμούς z_1 , z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2=40$ **Μονάδες 7**
30.	**ΘΕΜΑ 2ον (ΜΑΪΟΣ 2010)** Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$ **Β1.** Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης. **Μονάδες 7** Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$ **Μονάδες 6** **Β3.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $\|w-4+3i\|=\|z_1-z_2\|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. **Μονάδες 7** **Β4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3\leq\|w\|\leq 7$ **Μονάδες 5**

31.	**<u>ΘΕΜΑ 2ο(ΕΣΠΕΡΙΝΟ 2010)</u>** Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x+yi$ με $x,y \in \mathbb{R}$. **Β1.** Αν ισχύει ότι $2z - \bar{z} = 3$ τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z. **Μονάδες 10** **Β2.** Αν z=2+i, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι $\lvert w+z \rvert = \lvert z^2 \rvert$ **Μονάδες 7** **Β3.** Αν z=2+i και $u=\dfrac{\bar{z}+iz}{\bar{z}+1}$ τότε να αποδείξετε ότι $u^{2010}=-1$ **Μονάδες 10**
32.	**ΘΕΜΑ Β<u>(ΕΠΑΝ. ΙΟΥΛ. 2010)</u>** Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1+z_2=-2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$ **Β1**. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 **Μονάδες 5** **Β2.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $\lvert w-z_1 \rvert^2 + \lvert w-z_2 \rvert^2 = \lvert z_1 - z_2 \rvert^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2+y^2 = 4$ **Μονάδες 8** **Β3.** Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β2 να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2 \cdot \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) = 0$ **Μονάδες 6** **Β4**. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος Β2 με την ιδιότητα $\lvert w_1 - w_2 \rvert = 4$, να αποδείξετε ότι $\lvert w_1 + w_2 \rvert = 2$ **Μονάδες 6**