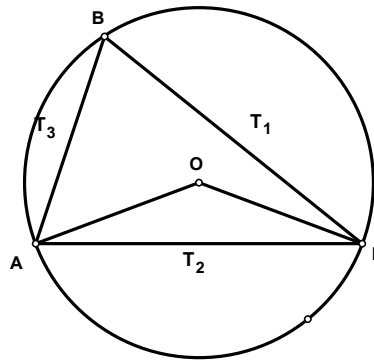


### ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

1. Σε κύκλο  $(O,R)$  είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρά  $AB=15$  Να υπολογίσετε:
  - α) την ακτίνα  $R$  του κύκλου
  - β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου  $(O,R)$
  - γ) το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου  $AB\Gamma$
  - δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.
2. Τρεις κύκλοι  $(O_1, R_1)$ ,  $(O_2, R_2)$  και  $(O_3, R_3)$  εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$ . Αν  $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$  και  $R_3 = 2 - \sqrt{2}$  :
  - α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $O_1O_2O_3$  είναι ορθογώνιο.
  - β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .
  - γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .
3. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $AB=2R$ . Στην προέκταση του  $AB$  προς το  $B$ , θεωρούμε ένα σημείο  $\Gamma$ , τέτοιο ώστε  $B\Gamma=2R$ . Από το  $\Gamma$  φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $\Gamma E$  του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο  $A$  τέμνει την προέκταση του τμήματος  $\Gamma E$  στο σημείο  $\Delta$ .
  - α. Να αποδείξετε ότι  $\Gamma E = 2\sqrt{2} R$ .
  - β. Να αποδείξετε ότι  $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma \Delta \cdot \Gamma E$ .
  - γ. Να υπολογίσετε το τμήμα  $\Gamma \Delta$  συναρτήσει του  $R$ .
  - δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων  $B\Gamma E$  και  $A\Delta E$  συναρτήσει του  $R$ .

4. Σε κύκλο  $(O,R)$  θεωρούμε τις διαδοχικές χορδές  $AB = R\sqrt{2}$ ,  $B\Gamma = R\sqrt{3}$ . Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $R$ :
  - α. το εμβαδόν του κυκλικού τομέα  $OAG$  που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία  $AO\Gamma$
  - β. το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων  $T_1, T_2, T_3$
  - γ. τη χορδή  $A\Gamma$ .



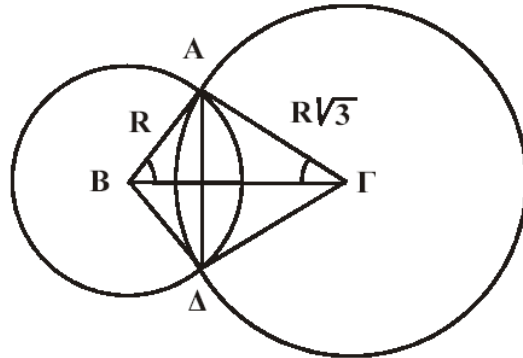
5. Τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O,R)$ . Η πλευρά  $AB$  είναι ίση με την πλευρά  $\lambda_4$  του εγγεγραμμένου στον κύκλο  $(O,R)$  τετραγώνου και η πλευρά  $A\Gamma$  είναι ίση με την πλευρά  $\lambda_6$  του εγγεγραμμένου στον κύκλο  $(O,R)$  κανονικού εξαγώνου. Φέρουμε το ύψος  $AH$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
  - α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
  - β. Να αποδείξετε ότι  $AH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .
  - γ. Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = \frac{R\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ .
  - δ. Με κέντρο την κορυφή  $B$  και ακτίνα  $BA$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ , και με κέντρο την κορυφή  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma A$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να υπολογίσετε τα εμβαδά των καμπυλόγραμμων τριγώνων  $ABE$  και  $A\Gamma\Delta$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$ .

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) με μήκη πλευρών  $AB=R$  και  $A\Gamma = R\sqrt{3}$ .

Γράφουμε τους κύκλους  $(B, R)$  και  $(\Gamma, R\sqrt{3})$ .

Να υπολογίσετε:

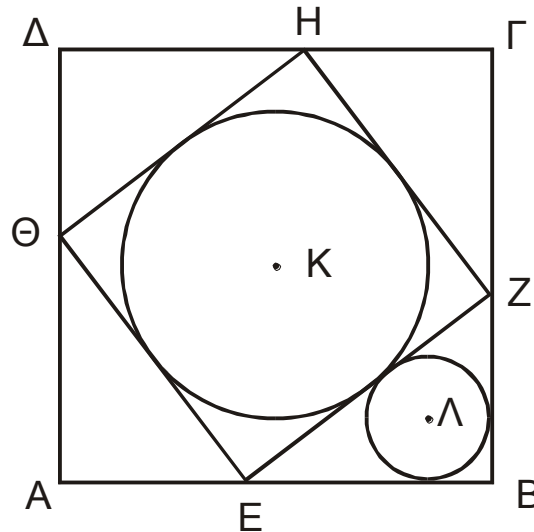
- Το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$  συναρτήσει του  $R$ .
- Τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .
- Το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AB\Delta\Gamma$  συναρτήσει του  $R$ .
- Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του  $R$ .



7. Τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $\alpha$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, R)$ . Έστω  $E$  ένα σημείο της  $A\Delta$ , τέτοιο ώστε  $A\Delta = \sqrt{3}AE$  και  $Z$  το σημείο τομής της προέκτασης της  $BE$  με τον κύκλο.

- Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα  $BE$  ως συνάρτηση της πλευράς  $\alpha$  του τετραγώνου.
- Να αποδείξετε ότι  $EZ = \frac{3-\sqrt{3}}{6}\alpha$ .
- Να βρείτε ως συνάρτηση του  $\alpha$ , το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία  $\Delta\hat{O}Z$ .

8. Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $7\text{ cm}$ , εγγράφουμε τετράγωνο  $EZH\Theta$  έτσι, ώστε:  $AE = BZ = \Gamma\Theta = \Delta\Theta = 3\text{ cm}$ .



- Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$ .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $EBZ$  και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου  $(\Lambda, \rho)$  στο τρίγωνο  $EBZ$  είναι  $\rho = 1\text{ cm}$ .
- Εάν  $(K, R)$  είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο  $EZH\Theta$ , να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου  $(K, R)$  προς το εμβαδόν του κύκλου  $(\Lambda, \rho)$ .