Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ: $f(x)=\alpha x+\beta$

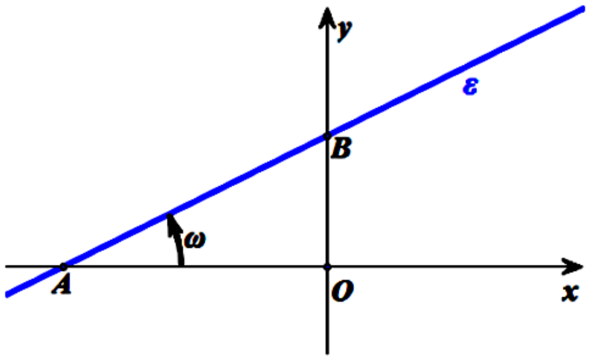
Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

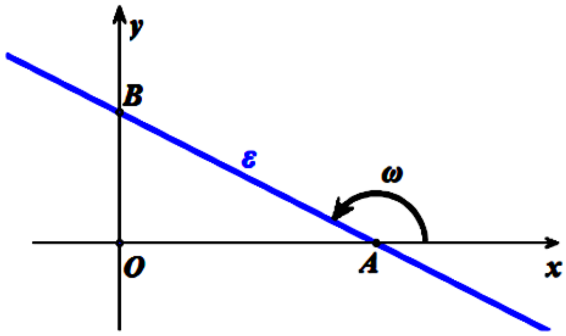
Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ευθεία ε. Τί ονομάζουμε :

α) γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x;

β) συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας ε;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ





α) Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax, όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη *θετική φορά*[(1)] μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα*** $x'x$.

Παρατήρηση

Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=0^\circ$.

Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ \le \omega < 180^\circ$.

β) Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

Παρατήρηση

- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε λ>0
- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε λ<0
- Αν $\omega=0^o$, τότε λ=0
- Αν $\omega=90^0$,δηλαδή αν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x΄ x, **τότε δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης.**

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx+β είναι μια ευθεία με εξίσωση y=αx+β η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Β(0,β) και έχει κλίση λ=α.

- αν $\alpha>0$, τότε $0^\circ<\omega<90^\circ$
- αν $\alpha<0$, τότε $90^\circ<\omega<180^\circ$
- αν $\alpha=0$, τότε $\omega=0^\circ$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha=0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή $f(x)=\beta$ και λέγεται **σταθερή συνάρτηση,** διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

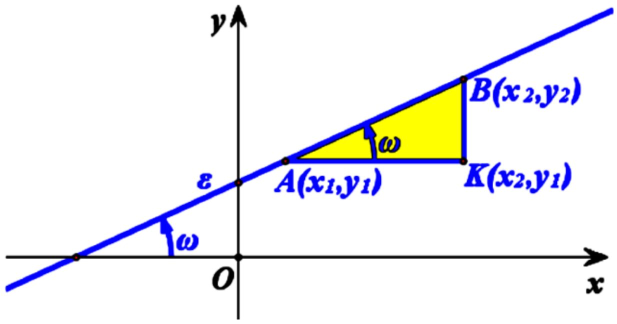
Και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x.

Συντελεστής διευθύνσεως ευθείας όταν γνωρίζουμε δύο σημεία της.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαία σημεία $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ της ευθείας $y=\alpha x+\beta$.

Τότε θα ισχύει:
$y_1=\alpha x_1+\beta$ και $y_2=\alpha x_2+\beta$,
οπότε θα έχουμε:
$y_2-y_1=(\alpha x_2+\beta)-(\alpha x_1+\beta)=\alpha(x_2-x_1)$.
Επομένως θα είναι:

$$\boxed{\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

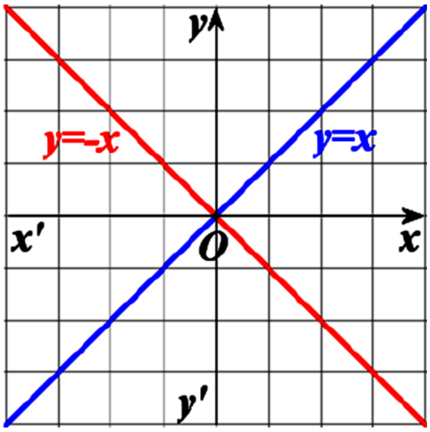


Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx είναι μια ευθεία με εξίσωση y=αx η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Για $\alpha=1$ έχουμε την ευθεία $y=x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega=\alpha=1$, δηλαδή $\omega=45^o$. Επομένως η ευθεία $y=x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ των αξόνων.

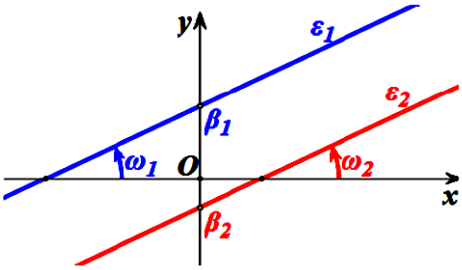
Για $\alpha=-1$ έχουμε την ευθεία $y=-x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\varepsilon\varphi\omega=\alpha=-1$, δηλαδή $\omega=135^o$. Επομένως η ευθεία $y=-x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $y\hat{O}x'$ και $y'\hat{O}x$ των αξόνων.

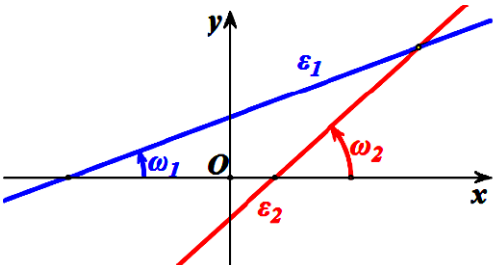


Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

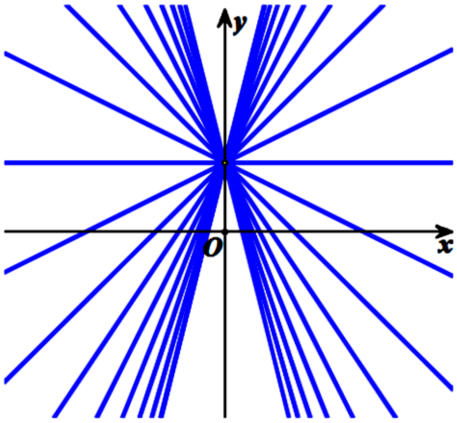
Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως.

- ✓ Αν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1\neq\beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες
- ✓ Αν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.
- ✓ Αν $\alpha_1\neq\alpha_2$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

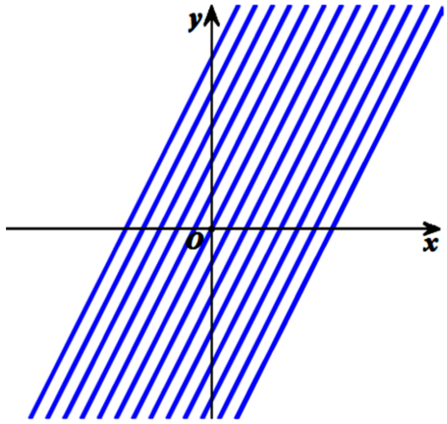




Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y=\alpha x+\beta$, όπου β σταθερό και α μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.



Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y=\alpha x+\beta$, όπου α σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.



Η συνάρτηση $f(x)=|x|$

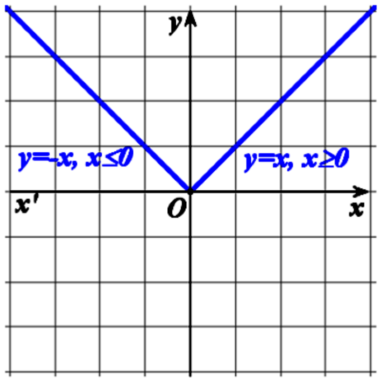
Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x, & \text{αν } x\le 0 \\ x, & \text{αν } x\ge 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

- ✓ $y=-x$, με $x\le 0$ και
- ✓ $y=x$, με $x\ge 0$

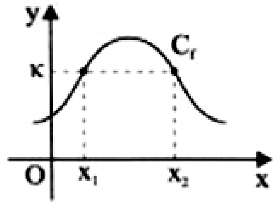
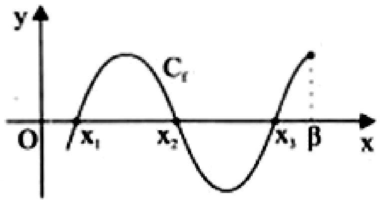
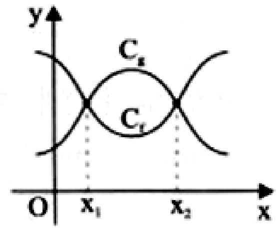
που διχοτομούν τις γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ αντιστοίχως.



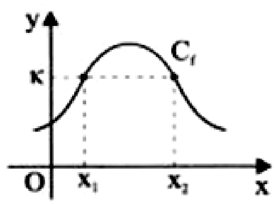
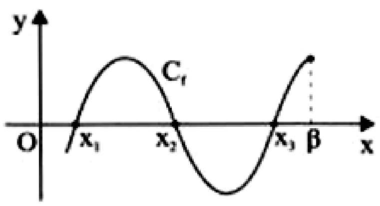
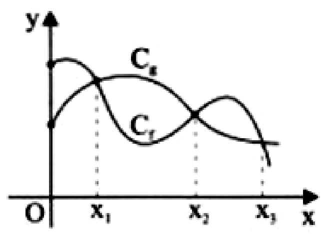
Κάθετες ευθείες.

Ας θεωρήσουμε δυο διακεκριμένες ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y=\alpha_1x+\beta_1$ και $y=\alpha_2x+\beta_2$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\alpha_2=-1$

Γραφική επίλυση εξισώσεων

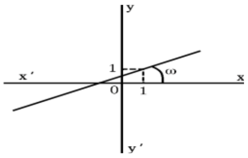
Εξίσωση	Ρίζες εξίσωσης	Γραφικά	Ρίζες
$f(x)=\kappa$	Οι τετμημένες των σημείων της C_f που έχουν τεταγμένη ίση με κ.		x_1 , x_2
$f(x)=0$	Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με τον $x'x$.		x_1 , x_2 , x_3
$f(x)=g(x)$	Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και C_g.		x_1 , x_2

Γραφική επίλυση ανισώσεων

Ανίσωση	Λύσεις ανίσωσης	Γραφικά	Λύσεις
$f(x)>\kappa$	Οι τετμημένες των σημείων της C_f που έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη από το κ.		$x\in(x_1,x_2)$
$f(x)>0$	Οι τετμημένες των σημείων της C_f που είναι πάνω από τον $x'x$.		$x\in(x_1,x_2)\cup(x_3,\beta]$
$f(x)>g(x)$	Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τα σημεία της C_g.		$x\in[0,x_1)\cup(x_2,x_3)$

Ερωτήσεις τύπου «σωστό-λάθος»

1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ω. Σ Λ



2. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $\psi = -3x + 4$ και $\psi = -3x + 5$ αντίστοιχα είναι κάθετες. Σ Λ

3. Η ευθεία $y = 5$ είναι κάθετη στον άξονα y΄y. Σ Λ

4. Η ευθεία $x = -2$ είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x. Σ Λ

5. Οι ευθείες $x = \kappa$ και $y = \alpha$ είναι κάθετες μεταξύ τους. Σ Λ

6. Οι ευθείες $x = \kappa$ και $y = \lambda x$, $\lambda \neq 0$ είναι παράλληλες. Σ Λ

7. Το σημείο (2, 2) ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x = 2$ Σ Λ

8. Κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ ισαπέχει από τους άξονες Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η ευθεία $x = 5$ έχει συντελεστή διεύθυνσης:

Α. 0 Β. 5 Γ. 1 Δ. 0,5 Ε. Δεν ορίζεται

2. Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 5x + 4$. Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλη της ε;

Α. $y = -5x + 4$ Β. $y = \frac{1}{5}x + 4$ Γ. $y = \frac{5}{4}x + 3$ Δ. $y = -\frac{1}{5}x + 2$ Ε. $y = 5x + 7$

3. Αν οι ευθείες ε_1, ε_2 με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_{2x} + \beta_2$ αντίστοιχα είναι κάθετες, τότε ισχύει:

Α. $\alpha_1 = \alpha_2$ Β. $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2}$ Γ. $\alpha_1 \alpha_2 = -1$ Δ. $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ Ε. $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$

4. Τα σημεία Α (2, 1), Β (- 2, 1), Γ (- 2, -1), Δ (2, - 1) αποτελούν κορυφές:

Α. Παραλληλογράμμου Β. Ορθογωνίου Γ. Τετραγώνου

Δ. Ρόμβου Ε. Τυχαίου τετραπλεύρου

5. Οι ευθείες $y - x = 1$ και $x + y = 1$ τέμνονται στο σημείο:

Α (0, - 1) Β (- 1, 0) Γ (0, 1) Δ (0, 0) Ε (1, 0)

6. Η ευθεία $-2x = 6$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο:

Α (0, 3) Β (3, 0) Γ (0, - 3) Δ (- 3, 0) Ε (- 3, 3)

7. Οι ευθείες $x = 3$ και $y = -2$ τέμνονται στο σημείο:

Α (3, 0) Β (0, - 2) Γ (3, - 2) Δ (- 2, 3) Ε (- 3, 2)

Ερωτήσεις Ανάπτυξης

1. Να βρείτε το λ έτσι ώστε οι ευθείες ε_1: $y=(\lambda^2-\lambda+1)x+3$ και ε_2 : $y=\lambda(\lambda+2)x+1$ να είναι παράλληλες.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x + 2$, $\lambda < 0$. Να βρείτε:

α) Τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.

γ) Την τιμή του λ, ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να είναι 2 τετραγωνικές μονάδες.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του λ η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο Α(1,4)

γ. Για λ=3

i. Να χαραχθεί η γραφική παράσταση της f.

ii. Να βρείτε τον συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας με εξίσωση $y=f(x)$.

iii. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η C_f με τον άξονα x΄x.

iv. Να βρείτε τα σημεία που η C_f τέμνει τους άξονες.

4. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=2-|x-2|$.

α. Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς την απόλυτη τιμή.

β. Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

5. Δίνονται οι ευθείες ε_1 :$2y=(\lambda-1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και ε_2 : $\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{3}=1$. Βρείτε:

i. Τους συντελεστές διευθύνσεως των ε_1 ,ε_2 .

ii. Το λ ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

iii. Το λ ώστε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

iv. Το λ ώστε ε_1//x΄x.

v. Το λ ώστε η ε_1 να περνάει από την αρχή των αξόνων.

vi. Το μ αν το σημείο Μ(2μ-3, $-\frac{7}{5}$) ανήκει στην ε_2.

vii. Τα σημεία που η ε_2 τέμνει τους άξονες.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x-1=0$ που έχει ρίζες τους αριθμούς ρ_1 ,ρ_2 καθώς και οι ευθείες ε_1: $y=(\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{2})x+10$ και ε_2 : $y=((\alpha-1)^2+2|\alpha-1|)x+6$. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ να βρείτε:

α. Το $\alpha\in\mathbb{R}$.

β. Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ε_2 με τους άξονες.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|$ και έστω Α και Β τα σημεία της γραφικής της παράστασης με τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα.

α. Να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων Α και Β αντίστοιχα, καθώς και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β.

β. Να σχεδιάσετε την C_f και την παραπάνω ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

γ. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x|\le\frac{x+15}{4}$.

8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2+\lambda x+4}-3$ διέρχεται από το σημείο Μ(-4, -1).

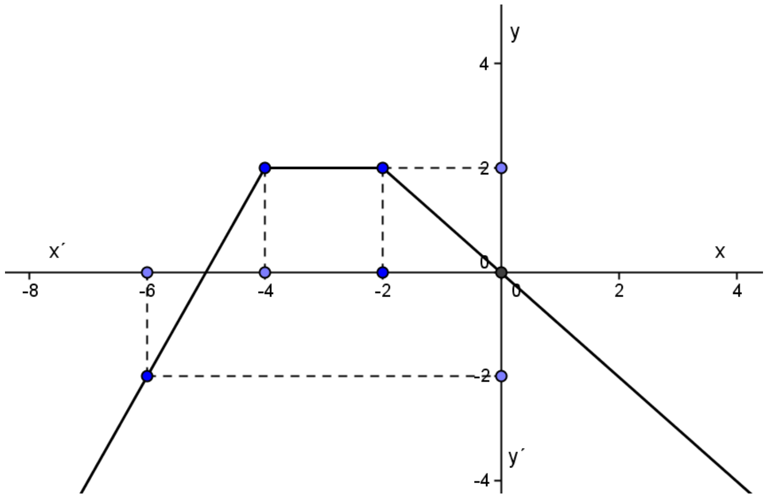
α. Να βρείτε το λ.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να κάνετε την γραφική παράσταση της f.

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

9. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



10. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $f(x)=|x|$ και g(x)=-x+2

i. Να λύσετε γραφικά :

α. Την εξίσωση $|x|=-x+2$

β. Την ανίσωση $|x|>-x+2$

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

11. Στο παραπλεύρως σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α. Να σχεδιάσετε στο σχήμα τις ευθείες με εξισώσεις y=-1 και y=2 και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις :

i. $f(x)\le -1$ **ii**. $-1<f(x)<2$.

β. Να σχεδιάσετε στο σχήμα την ευθεία που διέρχεται από τα Α και Β και να βρείτε την εξίσωσή της.

γ. Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις :

i. $f(x)>\frac{-x+1}{2}$

ii. $0\le f(x)\le \frac{-x+1}{2}$