ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Πρωτοβάθμιες Εξισώσεις.

1. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{3(x-4)}{4}-\frac{2(x+5)}{3}-\frac{3x-5}{2}=2-\frac{5(x+1)}{6}-x$
2. Να λυθεί η εξίσωση $x^2(x+1)+2x(x+1)+x+1=0$
3. Να λυθεί η εξίσωση $x(x^2-4)-x^3+2x^2=0$
4. Να λυθεί η εξίσωση $(x+1)^2-(x-1)^2=0$
5. Να λυθεί η εξίσωση $(x-3)^2-(3-x)(x^2-9)=0$
6. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2-1)(3x-1)=(x+1)(3x-1)^2$
7. Να λυθεί η εξίσωση $x^3-2x^2-4x+8=0$
8. Να λυθεί η εξίσωση $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$
9. Να λυθεί η εξίσωση $x(x-1)^2=x^2-2x+1$
10. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x^2-1}$
11. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x^2-2x}$
12. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+2}{x^2-5x+6}+\frac{2x-1}{2x^2-4x}=\frac{2}{3-x}$
13. Να επιλύσετε τους παρακάτω τύπους ως προς την μεταβλητή που ζητείται:

    i. $v=v_0+at$ ως προς t   ii. $v=\frac{2\pi R}{T}$, ως προς R.   iii. $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, ως προς ω

    iv. $a=\frac{v-v_0}{t-t_0}$, ως προς v   v. $V=V_0(1+\alpha\theta)$, ως προς θ   vi. $E=\pi\rho(\lambda+\rho)$, ως προς λ

    vii. $\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}$, ως προς γ   viii. $\Sigma=\frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\nu$ ως προς α_1 ix. $S=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$, ως προς g.

Β. Διερεύνηση Εξισώσεων.

1. Να βρείτε τα λ, μ ώστε η εξίσωση: $(\lambda^2-1)\chi=\lambda+\mu-2$ να είναι αόριστη.
2. Αν η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda)\chi=\lambda^2-9$ είναι αδύνατη, να δείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda+1)\chi=\lambda+5$ έχει μοναδική λύση.
3. Αν οι εξισώσεις $(\lambda - 2)\, x = \lambda + 2$ και $\lambda^2x - \lambda = 4x + 5$ είναι συγχρόνως αδύνατες, να βρεθεί η τιμή του λ.
4. Να εξετάσετε για ποιες τιμές των α,β η εξίσωση $\alpha(\chi-4)=2(\chi+\beta)$
   i. Έχει μοναδική λύση
   ii. Αληθεύει για κάθε χ.
   iii. Είναι αδύνατη.
5. Δίνεται ότι η εξίσωση $\alpha^2(\chi-1)-11\chi-4=5(\chi-\alpha)$ είναι αδύνατη. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha(\chi-7)-2\alpha^2=-4(\chi+1)$ είναι αόριστη.
6. Να λυθεί η εξίσωση: $\mu^2(\chi-2)+3\mu(\chi-1)=(\mu^2+3)(\chi-1)-1$.
7. Να λυθεί η εξίσωση: $\mu\chi-(\mu-2)^2=2(\chi-1)+\mu$.
8. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές των λ, μ την εξίσωση: $(1-\chi)\lambda=\lambda^2\chi+\mu-1$
9. Να εξετάσετε για ποιες τιμές των α,β η εξίσωση $\alpha(\chi-1)=3(\chi-\beta)$
   i. Έχει μοναδική λύση
   ii. Αληθεύει για κάθε χ.
   iii. Είναι αδύνατη.
10. Αν η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda)\,x=\lambda^2+2\lambda+1$ είναι αόριστη, να δείξετε ότι η εξίσωση:

    $(\lambda^{2010}-1)\,x=\lambda^{2011}$ είναι αδύνατη.

11.Αν η εξίσωση $\lambda^2-9\ \ x=\lambda^3-27$ είναι ταυτότητα, να βρείτε το μ ώστε η εξίσωση:

$\lambda+\mu^2-4\ \ x=\mu^2-\mu$ να είναι αδύνατη.

12. Αν οι εξισώσεις (λ - 2) x = λ + 2 και λ^2x - λ = 4x + 5 είναι συγχρόνως αδύνατες, τότε να βρεθεί η τιμή του λ .

Γ. Εξισώσεις με Απόλυτα.

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x-1|=|x-3|$ β) $|x-2|=2|x+1|$ γ) 3-2$|x|$=0 δ) 2$|x|$+5=0

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{3|2x-5|+1}{2}-|2x-5|=\dfrac{6|2x-5|-4}{7}$ β) $\dfrac{|x^2-x|+4}{2}-|x^2-x|+1=-\dfrac{|x^2-x|}{4}+\dfrac{6+|x-x^2|}{2}$.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $||x|+3|=4$ β) $||x-2|+3|=5$ γ) $||x|-2|=|2|x|+1|$

δ) $||x-1|-2|=|2|x-1|-3|$ ε) $|4-|x||=||x|+3|$ στ) $|||x|-2|-3|=1$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x|-\dfrac{2|x|-3}{10}=1-\dfrac{|x|-10}{5}$ β) $1-\dfrac{|2x-1|-1}{4}=|1-2x|-\dfrac{|6x-3|-2}{8}$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x-2|=2x-3$ β) $|3x+1|=3+5x$ (Προσοχή στον περιορισμό για το β΄μέλος)

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x-2|-3|3-x|+x-1=0$ β) $|x+1|-|2x+5|-3x=0$

Δ. Η εξίσωση $x^ν$=α.

ΕΞΙΣΩΣΗ $x^ν$=α

1. $x^ν$=α — Αν α>0, ν περιττός $\xrightarrow{\text{1 Λύση}}$ x= $\sqrt[ν]{α}$ π.χ x^3=8 $\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$

2. $x^ν$=α — Αν α>0, ν άρτιος $\xrightarrow{\text{2 Λύσεις}}$ x= $\sqrt[ν]{α}$ ή x= $-\sqrt[ν]{α}$ π.χ x^4=16 $\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{16}=2$ ή x= $-\sqrt[4]{16}=-2$

3. $x^ν$=α — Αν α<0, ν άρτιος $\longrightarrow$ Αδύνατη π.χ x^4=-16

4. $x^ν$=α — Αν α<0, ν περιττός $\xrightarrow{\text{1 Λύση}}$ x=- $\sqrt[ν]{|α|}$ π.χ x^3=-8 $\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{8}=-2$

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) x^3+81=0 ii) 2x^7+54x^4=0 iii) $(x-1)^4$-32=0 iv) 4x+x^7=0

Ε. Εξισώσεις 2ου Βαθμού.

Ερωτήσεις του τύπου «σωστό-λάθος»

1. Η εξίσωση $αx^2 + γ = 0$ έχει διακρίνουσα πάντα αρνητική. Σ Λ
2. Αν α, γ ετερόσημοι αριθμοί, η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ έχει δύο άνισες ρίζες Σ Λ
3. Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$ έχει μία ρίζα ίση με το μηδέν, όταν η διακρίνουσά της είναι ίση με το μηδέν. Σ Λ
4. Η εξίσωση $αx^2 + βx - γ = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες αν $α > 0$ και $γ > 0$. Σ Λ
5. Αν η εξίσωση $x^2 - λx + 1 = 0$, $λ \in R^*$ έχει δύο ρίζες άνισες, αυτές είναι αντίστροφες. Σ Λ
6. Αν η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες, τότε είναι $β = 0$. Σ Λ
7. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $α + β = 1$ και $α.β = 3$. Σ Λ
8. Όταν η εξίσωση $x^2 + βx + γ = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες, το γ είναι αρνητικός αριθμός. Σ Λ
9. Όταν η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α < 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες, το γ είναι αρνητικός αριθμός. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν η εξίσωση $x^2 - 4x + α = 0$ έχει για διπλή ρίζα το 2, τότε ο α ισούται με:
   Α. 1 Β. – 1 Γ. 4 Δ. - 4 Ε. 0
2. Αν η εξίσωση $x^2 - 2x - κ = 0$ έχει 2 ρίζες άνισες, για τον πραγματικό αριθμό κ ισχύει:
   Α. $κ < -1$ Β. $κ \leq -1$ Γ. $κ < 0$ Δ. $κ > -1$ Ε. κ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός
3. Όταν οι α, γ είναι ετερόσημοι η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$ έχει:
   Α. δύο ρίζες άνισες Β. διπλή ρίζα θετική Γ. διπλή ρίζα αρνητική
   Δ. καμία ρίζα Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε
4. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 + (3 - λ)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες τότε ο πραγματικός αριθμός λ είναι:
   Α. αρνητικός αριθμός Β. $λ = 0$ Γ. $λ = 3$ Δ. $λ = -3$ Ε. $λ = 9$
5. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3αx + α^2 = 0$, $α \neq 0$ είναι αντίστροφες τότε ο α είναι:
   Α. οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός $\neq 0$ Β. οποιοσδήποτε αρνητικός αριθμός
   Γ. $α = 1$ ή $α = -1$ Δ. $α = 9$ ή $α = -9$ Ε. $α = 5$ ή $α = -5$
6. Αν $α + β = 5$ και $αβ = 6$ τότε οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της εξίσωσης:
   Α. $x^2 + 5x + 6 = 0$ Β. $x^2 - 5x + 6 = 0$ Γ. $x^2 - 5x - 6 = 0$
   Δ. $x^2 + 6x - 5 = 0$ Ε. $x^2 - 6x + 5 = 0$
7. Στην ερώτηση «υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε $α + β = 1$ και $αβ = 6$» δίνονται από τους μαθητές οι εξής απαντήσεις:
   Α. Ναι Β. Όχι Γ. Ναι και είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x + 6 = 0$
   Δ. Ναι και είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 6 = 0$ Ε. Ναι και είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 6 = 0$
   Ποια είναι η σωστή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
8. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x + 3 = 0$ τότε η παράσταση $x_1^2 + x_2^2$ ισούται με:
   Α. 25 Β. 9 Γ. 19 Δ. 15 Ε. 29
9. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 7x + 2 = 0$ τότε η παράσταση $κx_1 + κx_2$ $κ \neq 0$ ισούται με:
   Α. 7 Β. – 7 Γ. 7κ Δ. - 7κ Ε. $7κ^2$ ΣΤ.. δεν μπορούμε να απαντήσουμε

Ερωτήσεις Ανάπτυξης

1. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3x^2 + 2(α + β + γ)x + (αβ + αγ + βγ) = 0$ έχει μια διπλή ρίζα, αν και μόνον αν $α = β = γ$.
2. Να δειχθεί ότι: αν η εξίσωση $(2α - β)x^2 - 4αx + 4β = 0$ έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση

   $(α^2 + β^2)x^2 - 2x + 3(α - β) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

3. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2x - \mu + 3 = 0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ:

α) αυτή έχει δύο διαφορετικές ρίζες β) αυτή έχει μια διπλή ρίζα γ) δεν έχει ρίζες.

4. Αν ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 \neq \rho_2$) είναι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ να βρεθούν οι παραστάσεις:

i) $\left|\rho_1 - \rho_2\right|$, ii) $\left|\rho_1^2 - \rho_2^2\right|$

(Υπόδειξη: $\left|\rho_1 - \rho_2\right| = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)^2} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2} = \ldots$)

5. Να βρείτε όλες τις εξισώσεις β΄ βαθμού που το άθροισμα των ριζών τους είναι ίσο με το γινόμενό τους.

6. Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 - \lambda(2x - 3) = 0$ που έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2.

Να αποδειχθεί ότι η παράσταση $(x_1 - \frac{3}{2})(x_2 - \frac{3}{2})$ είναι ανεξάρτητη του λ.

7. Η εξίσωση $(\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \beta = 0$ όπου α, β πραγματικές παράμετροι με $0 < \alpha < \beta$ έχει λύση; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, ποια;

8. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η παραπάνω εξίσωση: α) να έχει μία μόνο ρίζα β) να έχει διπλή ρίζα

9. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$

i) θετικές, ii) ετερόσημες, iii) ίσες

10. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης

$\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$ με $\lambda \neq 0$ είναι αντίστροφες τότε:

α) να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ

β) να λυθούν οι εξισώσεις για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε.

11. .Να δείξετε ότι οι εξισώσεις: $\chi^2+5\chi+\alpha=0$ και $\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2+4\alpha-25=0$ έχουν το ίδιο πλήθος λύσεων.

12. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$,το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:$(1-\lambda)\chi^2+(3+2\lambda)\chi-\lambda=0$

13. Αν η εξίσωση $\chi^2+\chi+2\lambda+1=0$ έχει διπλή ρίζα,να βρείτε:ι)Το λ, ιι)Την διπλή ρίζα.

14. Για ποιες τιμές του α η εξίσωση $(2+\alpha)\chi^2+6\alpha\chi+4\alpha+1=0$ έχει δύο ρίζες ίσες;

15. Για ποιες τιμές των α,β η εξίσωση $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+4=0$ έχει διπλή ρίζα η οποία επαληθεύει και την

$\beta\chi^2-3\beta\chi+2\lambda=0$

16. .Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\chi^2+(2\lambda+1)\chi+2\lambda=0$ έχει δύο ρίζες από τις οποίες η μία είναι τριπλάσια της άλλης.

17. Αν η εξίσωση $x^2-2(2\alpha-\beta)x-\left|\alpha-1\right|=0$ έχει διπλή ρίζα να βρείτε τους α και β.

18. Αν η εξίσωση $\lambda^2x^2+(5\lambda-2)x+\lambda+2=0$ έχει ρίζα τον αριθμό -1 να βρείτε το λ και μετά να δείξετε ότι το -1 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης.

19. Δίνεται η εξίσωση $(3λ-1)x^2-x-1=0$ (1)

α. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση (1)

i. Να είναι δευτέρου βαθμού.

ii. Να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αν x_1 ,x_2 οι άνισες ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε:

i. $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = -1$ ii. $2x_1+2x_2<1$.

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2-3x+|\lambda - 1|=0$ (1)

i. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

ii. Αν x_1 ,x_2 οι ρίζες της (1) και ισχύει : $x_1=2x_2$ να βρείτε τις ρίζες x_1 και x_2 και το λ.

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2-16x+μ-1=0$ και γνωρίζουμε ότι μεταξύ των ριζών της ισχύει η σχέση $x_1-x_2=10$. να βρεθούν οι ρίζες και ο μ .

<u>ΣΤ. Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2^ου^ Βαθμού.</u>

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ</u>

22. Αν η εξίσωση $(2x - 3)\ |\lambda| + 3 = 2λ^2x$ έχει ρίζα τον αριθμό 2, να υπολογιστεί ο λ.

23. Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - (α + 1)\ x^2 + α = 0$

24. Να λυθεί η εξίσωση $(x-3)^2+|x - 3|-6=0$

25. Δίνεται η εξίσωση $α\ |x - 1| + 6\ |β| = 9 + β^2$, όπου α, β πραγματικές παράμετροι και $α \neq 0$. Υπολογίστε το β όταν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1.

26. Να λυθεί η εξίσωση: $x - \sqrt{x} = 20$.

27. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2}{|x|}=\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $2x^4 + x^2 - 1= 0$ ii. $x^4 - x^2 + 1= 0$

29. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^4 - 3α^2x^2 - 4α^2 = 0$ β) $γ^4x^4 + (α^2γ^2 - β^2γ^2)\ x^2 - α^2β^2 = 0$