

## ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f(x) = a^x$$

$$g(x) = \log_a x$$

$a > 1$

**ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:**  $\mathbb{R}$

**ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ:**  $(0, +\infty)$

$f \uparrow \mathbb{R}$ . Δηλαδή  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

Τέμνει η  $C_f$  τον  $y' y$  στο  $(0, 1)$

Ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα  $Ox'$ .

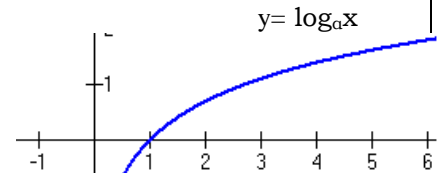
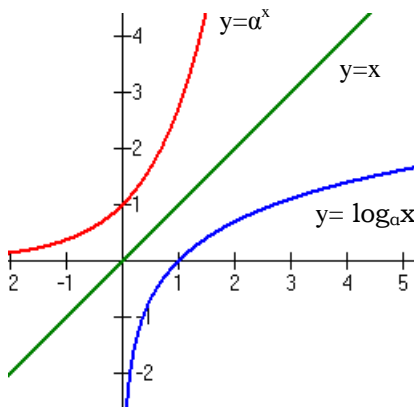
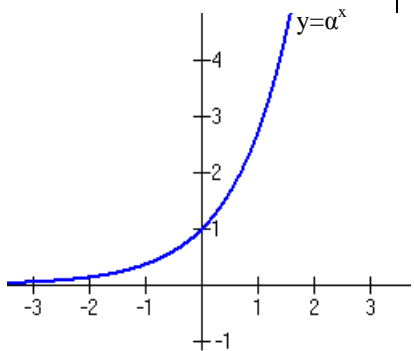
**ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:**  $(0, +\infty)$

**ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ:**  $\mathbb{R}$

$g \uparrow 0, +\infty$  Δηλαδή  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

Τέμνει η  $C_f$  τον  $x' x$  στο  $(1, 0)$

Ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα  $Oy'$ .



$$\log_a x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\log_a x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$0 < a < 1$

**ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:**  $\mathbb{R}$

**ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ:**  $(0, +\infty)$

$f \downarrow \mathbb{R}$ . Δηλαδή  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

Τέμνει η  $C_f$  τον  $y' y$  στο  $(0, 1)$

Ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα  $Ox$ .

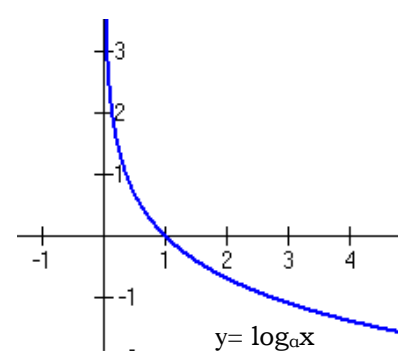
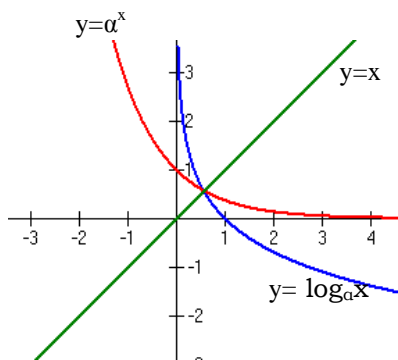
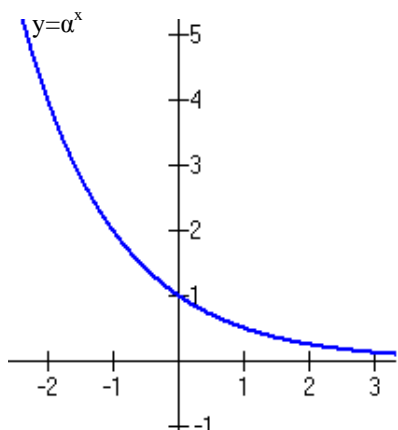
**ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ:**  $(0, +\infty)$

**ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ:**  $\mathbb{R}$

$g \downarrow 0, +\infty$  Δηλαδή  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

Τέμνει η  $C_f$  τον  $x' x$  στο  $(1, 0)$

Ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα  $Oy$ .



Οι  $y = a^x$  και  $y = \log_a x$  έχουν άξονα συμμετρίας  
Την διχοτόμο της γωνίας  $xOy$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$       ii)  $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$       iii)  $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$

iv)  $2^{x-2} - 3^{x-3} - 2^{x-3} + 3^{x-4} = 0$       v)  $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $(x^2 - 5x + 5)^{x+2} = 1$       ii)  $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i)  $3^{\eta\mu 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$       ii)  $3^{\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x} = 9^{1-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}$       iii)  $2^{\eta\mu x} \cdot (4^{\eta\mu x})^{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις

i)  $3^{x^2-7x+6} < 1$       ii)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$       iii)  $(0,5)^{5x-x^2-1} < 0,125$       iv)  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

5. i) Να βρείτε το  $(\alpha \neq 5)$  ώστε η  $f(x) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^x$  να είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το  $\alpha$ ,  $(\alpha \neq 0)$  ώστε η  $g(x) = \left(1 - \frac{5}{\alpha}\right)^x$  να είναι γνησίως φθίνουσα.

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = (1 - k^2)^x$ .

α) Για ποιες τιμές του  $k$  ορίζεται η  $f$ ;

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του  $k$  για τις οποίες η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το  $k$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f(x)$  να περνάει από το σημείο  $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

δ) Να βρείτε τις τιμές του  $k$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f(x)$  να περνάει από το σημείο  $\Sigma(2, 1)$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \left(\frac{1-5a}{a+1}\right)^x$

α. Να βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

β. Να βρείτε τις τιμές του  $a$  ώστε η  $f$  να είναι:

i. Γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i.  $10^{2x} \cdot 4 \cdot 5^{2x} \cdot 2^{2x} + 4 = 0$       ii.  $6^x - 9 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x - 18$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i.  $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$       ii.  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$       iii.  $e^{2x} - (1+e)e^x + e < 0$       iv.  $e^{2x} - e^x - 2 > 0$

v.  $e^{2x} - (e-2)e^x - 2e < 0$       vi.  $3 \cdot 8^x - 3 \cdot 12^x + 2 \cdot 18^x > 2 \cdot 27^x$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $\log(1+x) = \log(1-x)$       ii)  $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$

iii)  $2\log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$       iv)  $\ln \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{2}$       v)  $x(\log 10 - \log 5) = \log(4^x - 12)$

11. α) Να υπολογίσετε τον αριθμό  $100^{\log \sqrt{3}}$ . β) Να λύσετε την εξίσωση:  $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$ .

12. i) Να αποδείξετε ότι:  $3^{\log x} = x^{\log 3}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση:  $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$

13. i) Να αποδείξετε ότι  $x^{\log y} = y^{\log x}$  με  $x, y > 0$

ii) Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$$

iii) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης:  $\log[\log(x^2 + x \log \theta - 110)] = 0$  να βρείτε το  $\theta \in \mathbb{R}_+$

14. Να λύσετε την εξίσωση:  $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$ .

15. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.
16. Να βρείτε τον θετικό αριθμό  $x$  ώστε να ισχύει:  

$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \dots + \log x^{2v-1} = 2v^2$$
17. Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο  $(a_n)$  ισχύει  $a_p = k \cdot a_1$ , όπου ο  $a_p$  ο όρος τάξεως  $p$ , α ο πρώτος της όρος, και  $\lambda$  ο λόγος της να αποδείξετε ότι:  $(p-1)\log \lambda = \log k$
18. Να λύσετε την εξίσωση  $\ln(\sin x) = 0$ .
19. Αν μια αριθμητική πρόοδος έχει 1<sup>ο</sup> όρο τον  $\ln 3$  να δείξετε ότι, το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της είναι:  $S_n = n^2 \ln 3$
20. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{5-x}{5+x}$ .
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
  - Να δείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή.
21. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(2^x - 5)$ . Να βρείτε:
- το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
  - τα σημεία τομής της  $C_f$  με τους άξονες
  - τα διαστήματα του  $x$  που η  $C_f$  δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα των  $x$ .
22. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(5-3^x)$ . Να βρείτε:
- το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
  - Τα σημεία τομής της  $C_f$  με τους άξονες
  - Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 0$
23. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (2\ln a - 1)^x$
- Να βρείτε για ποιες τιμές του  $a$  η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .
  - Να βρείτε το  $a$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.
  - Να βρείτε το  $a$  ώστε η  $C_f$  να έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημίαξονα  $Ox$ .
24. Αν οι αριθμοί  $7, \ln \sqrt{3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x}, \ln 10$  με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε το  $x$ .
25. Έστω η συνάρτηση:  $f(x) = \ln(e^x - 3^{x-1})$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
  - Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = x - 2\ln 2$ .
26. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \alpha \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(\ln 2, 3)$ .
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
  - Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .
  - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.
  - Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) > 2$ .
27. Έστω η συνάρτηση:  $f(x) = \log(2 \cdot 25^x - 5 \cdot 4^x)$  και η ευθεία  $\epsilon: y = x + \log 3$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .
  - Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας  $\epsilon$ .
  - Να δείξετε ότι το σημείο  $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$  βρίσκεται πάνω από το σημείο  $B$  με τετμημένη  $\frac{3}{2}$  της ευθείας  $\epsilon$ .
28. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \ln \sqrt{2^x - 3}$  και  $g(x) = \sqrt{\ln 2^x - 3}$
- Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$
  - Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .
  - Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(3)$  και  $g(3)$

29. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ. Να συγκρίνεται τους αριθμούς  $f(0)$  και  $f\left(\frac{1}{3}\right)$

δ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x)+f(x+1)=0$

30. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x)$ ,  $x > 0$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A. Αν  $f(10)=25$ , να δείξετε ότι  $\alpha=1$ .

B. Για την τιμή  $\alpha=1$  να:

α. δείξετε ότι η  $f(x)$  γράφεται στη μορφή  $f(x) = (\log^2 x + 4 \log x)^2$

β. λύσετε την εξίσωση  $f(x)=0$ .

31. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ .

β. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2 \ln 2$ .

γ. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 0$ .

32. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{5}\right)^x$ .

α. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

β. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η συνάρτηση f είναι αύξουσα.

γ. Εάν  $\alpha=11$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x)+f(x+1)=6$ .

33. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$  και  $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$ .

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f(x)$  και  $g(x)$ .

β. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

γ. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 2g(x)$ .

34. A. Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  οι αριθμοί  $\log(3 \cdot 2^x - 1)$ ,  $\log(4 \cdot 2^x - 1)$ ,  $\log(8 \cdot 2^x - 2)$

με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

B. Εάν ο τέταρτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι  $a_4 = -\log 2$ , να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

35. A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x} - 1$$

B. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x)=5^x$ . Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x)+g(x+1)+g(x+2)+\dots+g(x+49)=\frac{125(5^{50}-1)}{4}$$

36. 1. Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει κάθε μία από τις

παρακάτω ισότητες;  $\log x^4 = 4 \log(-x)$ ,  $\log x^2 = 2 \log x$ ,  $\frac{\log x^4}{\log x^2} = 2$

2. Να λυθεί η εξίσωση  $(x^2)^{1+\log x^4} = 10^6$