

## ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

### A. Ανισώσεις 1<sup>ου</sup> Βαθμού.

**Λύσεις της ανίσωσης  $ax+\beta>0$**

$$ax+\beta>0 \Leftrightarrow ax > -\beta$$

$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha=0$	
Αληθεύει για $x > -\frac{\beta}{\alpha}$	Αληθεύει για $x < -\frac{\beta}{\alpha}$	$\beta>0$	$\beta<0$
		Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$	Αδύνατη

**Λύσεις της ανίσωσης  $ax+\beta<0$**

$$ax+\beta<0 \Leftrightarrow ax < -\beta$$

$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha=0$	
Αληθεύει για $x < -\frac{\beta}{\alpha}$	Αληθεύει για $x > -\frac{\beta}{\alpha}$	$\beta>0$	$\beta<0$
		Αδύνατη	Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

### **Μεθοδολογία**

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Αν υπάρχουν κλάσματα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της ανίσωσης με το θετικό Ε.Κ.Π των παρονομαστών.
- Κάνουμε τις πράξεις.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους. Οι άγνωστοι στο πρώτο μέλος και οι γνωστοί στο δεύτερο. Όταν μεταφέρουμε έναν όρο από μέλος σε μέλος του αλλάζουμε πρόσημο.
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου αν  $\alpha \neq 0$  και διακρίνουμε περιπτώσεις αν  $\alpha=0$ .

**ΠΡΟΣΟΧΗ !!!** Όταν διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με **αρνητικό αριθμό** αλλάζουμε ταυτόχρονα και τη φορά της ανίσωσης.

Για να λύσουμε ένα σύστημα ανισώσεων ή να τις συναληθεύσουμε όπως λέμε :

- Λύνουμε κάθε μια χωριστά.
- Παριστάνουμε τις λύσεις τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και από εκεί προσδιορίζουμε τις κοινές τους λύσεις.

### **Ασκήσεις Ανάπτυξης**

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$i) \frac{x-3}{2} - x + 1 \leq \frac{2x-1}{4} \quad ii) \frac{x+2}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{3x+1}{6} + x \quad iii) \frac{x+2}{3} - \frac{5-2x}{6} < \frac{2x-1}{3}$$

$$iv) \frac{5}{6} \frac{10-x}{2} - \frac{x-8}{2} > \frac{2}{3} \frac{x+15}{3} - 2x + 1$$

2. Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 > \frac{8-x}{6} \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} < \frac{x-1}{4} \end{cases}$$

3. Να γράψετε με μορφή διαστήματος το σύνολο λύσεων των παρακάτω ανισώσεων:

$$i) -3 < 2(3-x) + 5 \leq 9 \quad ii) -12 \leq 3(x+3) - 2(2x+1) < 24 \quad iii) 2(x-2) < 3(x-1) < 2x-1 \quad iv) 4(2x-1) < 6(x+1) < 3(1-3x).$$

4. Να λυθεί η ανίσωση  $\lambda x + 2 > 2\lambda^2 + x$  όταν το  $\lambda$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ .

**Β. Ανισώσεις με Απόλυτες τιμές.**

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε :

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho \quad \text{και} \quad |x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad \text{ή} \quad x > \rho$$

**Ασκήσεις Ανάπτυξης**

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α)  $|2x + 1| < 3$     β)  $|3x - 11| < -\frac{7}{3}$     γ)  $|5x + 3| < 0$     δ)  $|x - 3| > 5$     ε)  $|x - 3| > -1$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α)  $|x + 2| \leq 0$     β)  $|x + 2| < 0$     γ)  $|x + 2| > 0$     δ)  $|x + 2| \geq 0$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α)  $\frac{2|3-x|-1}{3} - |3-x| > \frac{|3-x|-8}{3} + 1$     β)  $\frac{2|3x-2|+4}{4} - \frac{6-|3x-2|}{2} > \frac{|2-3x|}{3} - 2$

4. Να λυθούν οι ανισώσεις :

α)  $1 < |x| < 3$     β)  $1 \leq |2x - 1| < 3$     γ)  $-2 \leq |x| \leq 5$     δ)  $0 < |x + 1| < 1$     ε)  $-3 \leq |2 + 3x| \leq 0$

5. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i.  $\|x| - 2| \leq 1$     ii.  $|3 - |x|| \geq 2$     iii.  $|2 - |x|| \leq 3$   
 iv.  $\|x| - 1| \geq 2$     v.  $\|x + 1| - 4| < 3$     vi.  $\|1 + 2x| - 1| > 2$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i.  $|x - 2| > |x + 1|$     ii.  $|2x - 3| < |1 - 2x|$     iii.  $2|x + 1| \geq |2x + 1|$

7. Να λύσετε την ανίσωση  $d(x,2) - d(x,3) < -1$ .

8. Να λύσετε την ανίσωση  $|x - 2| + |x + 3| \leq 4 - x$

9. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - \lambda x + 4 = 0$  (1), με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

i) Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι ρίζες της (1), να υπολογίσετε τις παραστάσεις  $S = \rho_1 + \rho_2$  και  $P = \rho_1 \rho_2$

ii) Να λύσετε την ανίσωση  $|Sx - (\lambda - 1)x| \leq P$ .

10. Δίνεται η παράσταση  $f(x) = \sqrt{|x-2|-3} - \sqrt{8-|3-x|}$ .

i. Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ορίζεται η  $f(x)$  και να τις γράψετε με μορφή ένωσης διαστημάτων.

ii. Στο σύνολο αυτό να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**Γ. Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού.**

**Γ<sub>1</sub> Μορφές τριωνύμου**

Πίνακας με την μορφή τριωνύμου

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha \neq 0$$

Πρόσημο Δ	Μορφές τριωνύμου
Δ>0	$f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
Δ=0	$f(x)=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
Δ<0	$f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{ \Delta }{4\alpha^2}\right]$

**Ασκήσεις Ανάπτυξης**

- Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
  - $(x+y)^2-3(x+y)+2$
  - $2(x-2y)^2-(x-2y)-1$
  - $2x^2-|x|-1$
- Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο  $x^2-(2\lambda-1)x+\lambda^2+1$ 
  - Να αναλύεται σε γινόμενο δυο πρωτοβαθμίων παραγόντων.
  - Να είναι τέλειο τετράγωνο.
  - Να μην αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

**Γ<sub>2</sub> Πρόσημο τιμών τριωνύμου.**

- Δ>0 και  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) οι ρίζες του τριωνύμου

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	Πρόσημο του α	0	Πρόσημο του -α	0	Πρόσημο του α

- Δ=0 και  $x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}$  η διπλή ρίζα του τριωνύμου.

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	Πρόσημο του α	0	Πρόσημο του α

- Δ<0

x	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	Πρόσημο του α	

**Γ<sub>3</sub> Ανισώσεις της μορφής  $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$  ή  $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$**

- Να βρεθούν οι τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ορίζεται η παράσταση  $g(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$
- Να βρεθεί το λ ώστε η παράσταση  $(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+3(\lambda-1)$  να είναι αρνητική για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες.
  - $(\lambda+2)x^2-2(1-\lambda)x+1=0, \lambda \neq -2,$
  - $\lambda x^2+\lambda x=3x+2-\lambda, \lambda \neq 0.$
- Δίνεται η εξίσωση  $x^2-2\lambda x+3\lambda-2=0$ . Να διερευνηθεί ως προς το είδος των ριζών της για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^2-(\lambda-1)x-\lambda-1=0$  έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η ανίσωση  $(\lambda-1)x^2-\lambda x+\lambda>0, \lambda \neq 1$  να αληθεύει, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Δίνεται η πραγματική συνάρτηση:  $f(x)=\sqrt{|x^2+8x+9|}-24$  Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
- Να λυθεί η ανίσωση  $x^2-5|x|+4<0$

**Γ<sub>4</sub> Ανισώσεις της μορφής A(x) · B(x) · ... · Φ(x) > 0 (< 0)**

9. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- α)  $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 6) \geq 0$    β)  $(3x^3 - x^2)(x^2 - x + 1) < 0$    α)  $(x - 1)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) < 0$   
 γ)  $x^2(3 - x^2) < 0$    ζ)  $3x^3 - 5x^2 + 2x \geq 0$   
 δ)  $(1 - 2x^2)(-x + 7) \leq 0$

**Γ<sub>5</sub> Ανισώσεις της μορφής  $\frac{A}{B} > 0 (< 0)$**

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

γ)  $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 17x + 60} > 0$    δ)  $\frac{-x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 6} > 0$    ε)  $\frac{x + 1}{7 - x} > 2$

11. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α)  $\frac{x - 1}{x + 1} > 1 + \frac{2}{1 - x}$    β)  $\frac{3}{x + 1} - \frac{x - 1}{x - 4} > \frac{3}{2}$

12. Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α)  $\frac{3x + 5}{3x - 7} < 0$    β)  $\frac{12x^2 + 13x - 14}{x - 2} < 0$

13. Για ποιες τιμές του x ισχύει η διπλή ανίσωση:  $-2 < \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} < 1$

14. Για ποιες τιμές του x το τριώνυμο  $x^2 - 14x + 50$  παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26;

15. Ναδειχθεί ότι:  $\frac{1}{3} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} < 3$  για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x.

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - (2\lambda + 1)x + 2\lambda - 1$  (1),  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  το f(x) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.  
 ii. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες του f(x) να αποδείξετε ότι  $4\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + 4\rho_2^2 > 0$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2x + \lambda = 0$  (1) με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- i. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές ρίζες.  
 ii. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι πραγματικές ρίζες της (1), να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{\rho_1 + 1}{\rho_2 + 1} + \frac{\rho_2 + 1}{\rho_1 + 1} \geq 0$$

3. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$  (1)

- i. Να βρείτε τις ρίζες του.  
 ii. Να βρείτε τα πρόσημα των αριθμών  $f\left(\frac{1}{77}\right), f(-\sqrt{2}), f\sqrt[5]{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f\sqrt{2} + \sqrt{7}, f-\sqrt[3]{3}$ .

4. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

- i. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , ώστε να είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
 ii. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , ώστε να είναι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .