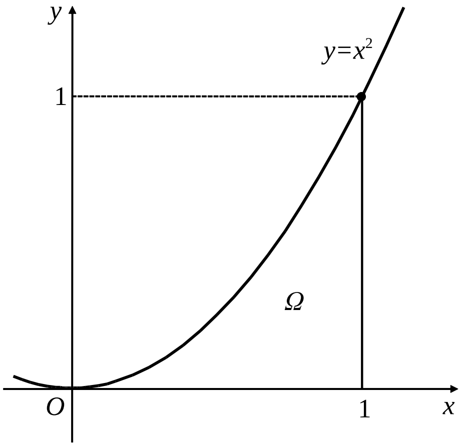
Φύλλο εργασίας στην ενότητα Ορισμένο ολοκλήρωμα

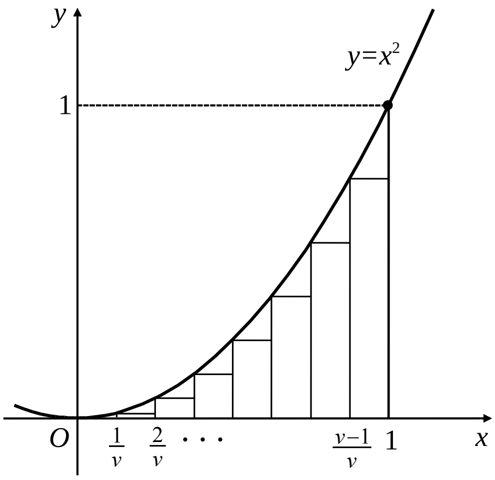
Διαδικασία υπολογισμού εμβαδού Ω ενός χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, *τον άξονα x΄x και την ευθεία* $x=1$



A) Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το διπλανό εμβαδό με διαδοχικές προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας εμβαδά ορθογωνίων.

1) Ανοίξτε το αρχείο Ολοκλήρωμα1.ggb
2) Επιλέξτε το πλαίσιο που αντιστοιχεί στο Κατώτερο άθροισμα και αλλάζοντας τις τιμές του ν προσεγγίστε το ζητούμενο εμβαδό. Σημειώστε την προσέγγισή σας:……………………………………………………
3) Αποεπιλέξτε το Κατώτερο και επιλέξτε Ανώτερο άθροισμα. Επαναλάβετε τη διαδικασία και σημειώστε την προσέγγισή σας:……….. Επομένως το ζητούμενο εμβαδό πρέπει να είναι περίπου:…………

B) Υπολογισμός του εμβαδού με χρήση μαθηματικών θεωρητικών μεθόδων.
Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τον τύπο του Κατώτερου και Ανώτερού αθροίσματος που είδαμε πιο πάνω.



B1) Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε *ν* ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία:

$x_0=0$, $x_1=\frac{1}{\nu}$, $x_2=\frac{2}{\nu}$, ……………., $x_{\nu-1}=\frac{\nu-1}{\nu}$, $x_\nu=\frac{\nu}{\nu}=1$.

Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το Κατώτερο άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\varepsilon_\nu = f(0)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\cdots+f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

1) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της f και τον γνωστό τύπο $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, υπολογίστε τον τύπο της ακολουθίας ε_ν.

____

____

____

____

____

____

____

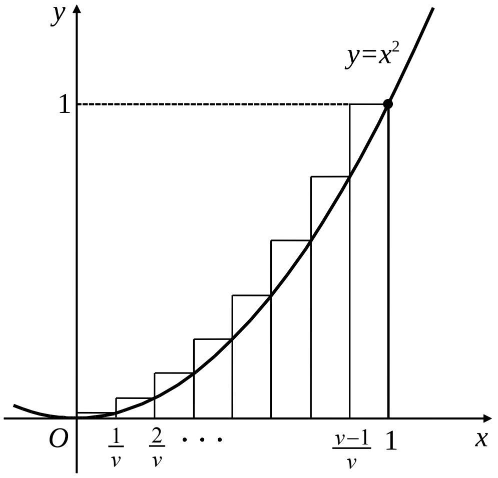
____

____

2) Βρείτε το όριο της ε_ν.

___

___



Β2) Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα προηγούμενα υποδιαστήματα αυτά και ύψη τη μέγιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το Ανώτερο άθροισμα, E_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το: $\mathrm{E}_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu}$

1) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της f και τον γνωστό τύπο $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$, υπολογίστε τον τύπο της ακολουθίας E_ν.

___

___

___

___

___

___

___

___

___

___

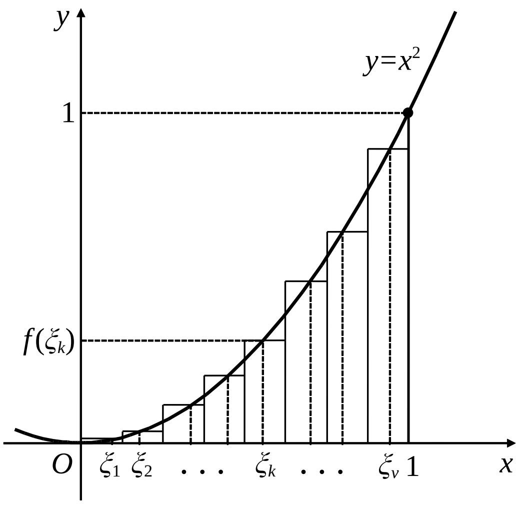
2) Βρείτε το όριο της E_ν.

___

___

Β3) Ο υπολογισμός των αθροισμάτων ε_ν και E_ν προϋποθέτει την εύρεση της ελάχιστης και μέγιστης τιμής της συνάρτησης στα υποδιαστήματα του [0, 1]. Αν σε κάθε υποδιάστημα επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο ξ_κ, $\kappa=1,2,\ldots3,\ldots,\nu$ και σχηματίσουμε τα ορθογώνια με ύψη τις τιμές $f(\xi_\kappa)$, το άθροισμα των εμβαδών τους θα δίνεται από τον τύπο:

$S_\nu = \frac{1}{\nu}f(\xi_1) + \frac{1}{\nu}f(\xi_2) + \cdots + \frac{1}{\nu}f(\xi_\nu)$ (Άθροισμα Riemann);

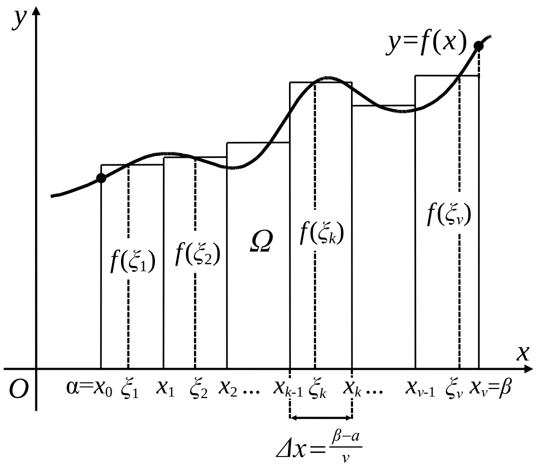


1) Χρησιμοποιείστε το αρχείο Ολοκλήρωμα1.ggb και διερευνήστε τη σχέση μεταξύ των αθροισμάτων Κατώτερο (ε_ν), Ανώτερο (E_ν) και Riemann (S_ν).

Τι διαπιστώνετε;…………………………………………………………………

2) Τι συμβαίνει όταν $\nu \to +\infty$;……………………………………………………………………………………………
3) Ποιο θεώρημα θα χρησιμοποιούσατε για να τεκμηριώσετε την απάντηση;……….

Γενικεύοντας τα παραπάνω δίνουμε τον ορισμό του εμβαδού ως εξής:



Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου *Ω* μεταξύ της $y=f\left(x\right)$, του x΄x και των $x=\alpha$ και $x=\beta$ εργαζόμαστε όπως προηγουμένως (Riemann). Σχηματίζουμε το άθροισμα:

$S_{\nu}=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_{\nu})\Delta x=[f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_{\nu})]\Delta x$

και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_{\nu}$.

Γ) Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που η συνεχής στο [α,β] συνάρτηση *f* δεν είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$;

1) Ανοίξτε το αρχείο Ολοκλήρωμα2.ggb
2) Επιλέξτε και μετακινήστε τη γραφική παράσταση πάνω και κάτω από τον άξονα x΄x. Τι παρατηρείτε στα αποτελέσματα των αθροισμάτων; Δίνουν τα αποτελέσματα αυτά κάποιο εμβαδό; Ναι όχι και γιατί;……

Γενίκευση; Το όριο του $S_{\nu}=\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x$ που υπάρχει στο R ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης *f* από το *α* στο *β*, συμβολίζεται με $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της *f* από το *α* στο *β*”. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx=\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_{\kappa})\Delta x\right)}$$

3) Στο ίδιο αρχείο αλλάξτε τις θέσεις-τιμές των α και β.
   i) Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τη σχέση μεταξύ των $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx$ και $\int_{\beta}^{\alpha} f\left(x\right)dx$;

   ……
   ii) Πώς προκύπτει αυτό από τον ορισμό;……………………………………………………………………………

   ……
   iii) Τι παρατηρείτε όταν α=β;…………………………………………………………………………………………
   iv) Πώς προκύπτει αυτό από τον ορισμό;……………………………………………………………………………
4) Πότε κατά τη γνώμη σας το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ θα δίνει κάποιο εμβαδό;………………………………………………….

……