

# Όριο συνάρτησης

- ❖ Πεπερασμένο όριο στο  $x_0 \in \mathbb{R}$
- ❖ Μη πεπερασμένο όριο στο  $x_0 \in \mathbb{R}$
- ❖ Όριο συνάρτησης στο άπειρο

## Ασκήσεις

► **Πεπερασμένο όριο στο**  $x_0 \in \mathbb{R}$

1.

Να βρεθεί το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1}$ .

2.

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 2e^x \sqrt{x-5} + 27 \frac{|x+2006|}{x^2+2}$ .

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

3.

Αν  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x + \beta - 1}{x - \frac{1}{2}} = 15$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

4.

Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - |x - 5|}{1 - |x^3 + 7|}$ .

5.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}}$ .

β)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x - 1}$ .

6.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta + 2}{x^2 - 1}$ .

Αν το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

7.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^2 - \beta x + 2, & x \leq -1 \\ -3\alpha x + 2\beta + 6, & x > -1 \end{cases}$

Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , έτσι ώστε το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$ .

8.

Να υπολογίσετε, αν υπάρχει το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3| - 4|x-1| + 3}{|x-2|}$

9.

Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x - 1}$

10.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{1 - \sqrt{x}}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{3x^2 - 4}}{x - \sqrt{2}}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt[3]{x} - 1}$

v)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} + \frac{5}{-3x^2 + 13x - 12} \right)$

11.

Έχουμε την συνάρτηση  $g(x) = 4x^2 + (2 - \alpha)x + \beta$ .

Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 18$ , και  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 11x + g(x)}{-x^2 + 5x + 14} = 1$ .

12.

Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και να είναι πραγματικός

αριθμός με:  $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + \alpha^2 x + \beta^2, & x < 1 \\ 2\alpha x^5 - 4\beta x + 2011 \cdot \ln x, & x > 1 \end{cases}$

13.

Να υπολογίσετε αν υπάρχει το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + 2x^2 - |3x-5|}{x^2 - 1}$ .

14.

α) Έστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $\lim_{x \rightarrow 2} [-2f(x) + 3g(x)] = 2$  και

$\lim_{x \rightarrow 2} [5f(x) - 7g(x)] = -4$ , να βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ .

β) Έστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x^3 - 8)] = 4$ ,

να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)]$ .

γ) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$  και  $4f^3(x) + xf^2(x) - 2x^2f(x) = 3x^3$ .

Να βρείτε το  $\alpha$  και το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

15.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{z + \bar{z}}{2}x^2 + (z - \bar{z})i \cdot x - \gamma^3 & x < 2, \text{ όπου } z = \alpha + \beta i. \\ \text{Im}(z)x^2 - 5\text{Re}(z)x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τα  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , όταν το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  είναι πραγματικός αριθμός και η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(3, 10)$ .

16.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^4 - 5x^3 + 8 + \alpha) & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{-x^5 - 1} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - e^x + \sqrt{-x^2 + 4}) & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[ (x^{10} - 2)^{2011} | -x^{2011} - 2010 | \right] \end{array}$$

17.

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{1 - x^5} & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{x^3 + (1 - 2e)x^2 + (e^2 - 2e)x + e^2}{2x^2 - ex - e^2} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x + 2} - 4x + 1}{\sqrt{x} - 1} \end{array}$$

18.

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 2\beta}{x^2 - 1} = -1, \text{ να βρείτε τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

20.

Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια της  $h(x)$  στα  $x_0 = 1$ ,  $x_0 = 2$  και στο  $x_0 = e$

$$\text{με: } h(x) = \begin{cases} 3x^{2011} + x, & x \leq 1 \\ 3^x + 5x^2 - 4x, & 1 < x \leq 2. \\ -5x^2 + x - \ln x, & x > 2 \end{cases}$$

21.

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x} \sqrt{\frac{5x}{x^2-9}}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x|x+\alpha| - 5\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2}}{|x+\alpha|}.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{7x-11}|}{|x-3|}.$$

22.

Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x+2|}{x^2-4}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2-9x+4+|-x^2+4x|}{|x-4|}.$$

23.

Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} - 3}{x^2-1}.$$

24.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$

$$\text{ώστε } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{\kappa x^2 - x + 3\sqrt{2}}{\alpha x + \alpha\sqrt{2}} = \sqrt{e}.$$

25.

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z, w$  με  $w = \frac{z-3}{z-2i}$ ,  $z \neq 2i$  όπου  $z = \alpha + \beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{και η συνάρτηση: } f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{Im}(w)x^{10} + \operatorname{Re}(w)x^5 + 2011 \cdot \ln(-x), & x \leq -1 \\ 2 \operatorname{Im}(w)x^3 - \operatorname{Re}(w)x, & x > -1 \end{cases}$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$  αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  και είναι πραγματικός αριθμός.

26.

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1 \\ \frac{x^3+3}{4}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

α) Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}(x)$ .

β) Να βρείτε αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1}$ .

27.

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  αν  $1 + x - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x + x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

28.

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x}{x^2}$ .

29.

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}$ ,  $\alpha \neq 0$ .

30.

Αν ισχύει  $|f(x) - 2x| \leq (x-5)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$ .

31.

Να υπολογιστούν τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 + x}$ .

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$ .

32.

Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(2x-6)}{3x-9}$ .

33.

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\eta\mu x}$  και πεδίο ορισμού

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

34.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε:

$$x^5 \leq f(x) \leq x^6 + 3x^4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ .

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

35.

Να βρείτε, αν υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  όταν:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1 - \sin x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \frac{|\eta\mu x|}{x}.$$

36.

Αν  $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$ , για κάθε  $x \geq -2$  να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

β)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x+1}$ .

γ)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}$ .

37.

Έστω  $f(x) = \frac{\alpha^2 x + 3\alpha \eta \mu x}{x}$  και  $g(x) = \frac{-2x^2 - 2x \sigma \upsilon \nu x + 2x}{x^2}$ .

Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

38.

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(x-1)}{x^2 + 4x - 5}$ .

40.

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{\eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x}{x \cdot \eta \mu 7x}$  και πεδίο ορισμού

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa \frac{\pi}{7}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

41.

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = (x+2) \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{\sqrt{x+2}}$  και πεδίο ορισμού  $A = (-2, +\infty)$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

42.

Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu x^{2011}}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$ .

43.

Αν  $|f(x) - \eta\mu x| \leq 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

44.

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε :

$$x-1 \leq f(x) \leq |x-1|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \ell$ ,  $\ell \in \mathbb{R}$  να βρείτε :

i. το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

ii. το  $\ell$ .

45.

α. Δίνεται η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = \frac{|x^5 - 7| - 7}{x}$  και πεδίο ορισμού  $A = \mathbb{R}^*$ .

Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

β. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{|x^5 - 7| - 7}{x} \cdot f(x) \right] = 0.$$

46.

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\eta\mu x^2 - 2x^2}$  και πεδίο ορισμού  $A = \mathbb{R}^*$ . Να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

47.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε:

$$7x - x^3 < f(x) < x^4 + 5 \text{ κοντά στο } 1.$$

α. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

β. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x^2 - 1)$ .

48.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με σύνολο τιμών  $f(A) = (-5, 2)$ . Να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\eta\mu x \cdot f(x)] = 0.$$

49.

Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \epsilon\phi x}{x^2}$ .

50.

Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-1) - 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

51.

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε:

$$1 - \chi\eta\mu\chi < f(\chi) < \sigma\upsilon\nu\chi \text{ για κάθε } \chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1).$$

α. Να βρείτε το  $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f(\chi) - 1}{\chi}$ .

β. Αν ισχύει  $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = f(0)$ , να βρείτε το  $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi)$ .

52.

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(\chi) = \ln \chi - \sqrt{1 - \chi}$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

γ. Αν η συνάρτηση  $f$  έχει σύνολο τιμών το διάστημα  $(-\infty, 0]$ , να αποδείξετε ότι:

$$0 < f^{-1}(\chi) \leq 1 \text{ για κάθε } \chi \leq 0.$$

δ. Να βρείτε το  $\lim_{\chi \rightarrow 0} [x^2 \cdot f^{-1}(\chi)]$ .

53.

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε  $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi} = 2$ .

α. Να βρείτε το  $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi)$ .

β. Να αποδείξετε ότι ισχύει  $\chi \cdot f(\chi) > 0$ , κοντά στο 0.

γ. Αν για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ισχύει  $|\chi \cdot f(\chi) \cdot g(\chi) - \chi^2| \leq \chi^2 \cdot f^2(\chi)$  κοντά στο 0, να βρείτε το  $\lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi)$ .

54.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε:

$$f(x) + 1 \geq \sqrt{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell, \ell \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε το  $\ell$ .

β. Αν  $f(x) \leq f^2(x) + \frac{x^2}{2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

55.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε :

$$2x - 1 \leq f(x) \leq x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

β. Να υπολογίσετε το  $\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h)$ .

γ. Αν είναι  $f(x) \neq 1$  κοντά στο 1, να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 3| + f(x) - 3}{f(x) - 1}$ .

56.

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε :

$$f^2(x) \leq x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α.  $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0$ .

β.  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$ .

γ.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

57.

Έστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε :

$$f^{-1}(x) \leq x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = 1.$$

α. Να αποδείξετε ότι:  $f(x) \geq x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β. Να αποδείξετε ότι:  $y \leq \frac{y^2 + 1}{2}$ , για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ .

γ. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

58.

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες, ώστε:

$$-4x^3 \leq f(x) \leq 3x^4 + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 3}{x + 1} = 5.$$

Να βρείτε τα όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ .

β.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 4}{x + 1}$ .

γ.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)g(x) + 12}{x + 1}$ .

► **Μη πεπερασμένο όριο στο**  $x_0 \in \mathbb{R}$

► **Όριο συνάρτησης στο άπειρο** ( $x \rightarrow \infty$ )

59.

Να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

β)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 3x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sigma\upsilon\nu x}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^5 + 4} - 2\sqrt{x^3 + 1}}$

60.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+5}{x^3 - 3x^2 + 4}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
- iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

61.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2\alpha x^2 + 5\beta x - 6}{x - 3}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , για την οποία γνωρίζουμε ότι

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 14$ .

- i. Να δείξετε ότι για  $x \neq 3$  είναι  $18\alpha + 15\beta = 6$ .
- ii. Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , για  $x \neq 3$ .

62.

Να βρείτε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x})$

ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - x})$

63.

Για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  να βρείτε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + (\mu - 1)x - \mu}{x^2 + 2x + 1}$$

64.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1} + \sqrt{9x^2 + 7} - 5x - 2$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

65.

Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε το:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda + 1)x^4 + (\lambda^2 - 1)x^3 - \lambda x + 5}{(1 - \lambda)x^3 - x - 1}$$

66.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log \frac{x^2 - 1}{x^2}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να δείξετε ότι  $f(x) < \log(2x - 2)$ , με  $x > 1$ .

γ) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \log(2x - 2))$ .

67.

Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 1)x^3 + x + 100}{(\lambda - 2)x^2 + 200}$ .

68.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της  $f$  στο 2.

69.

Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}$ .

70.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(x-2) \cdot \eta\mu x}{x^3 - 4x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ .

71.

Για μια συνάρτηση  $f$  που ορίζεται κοντά στο  $\frac{\pi}{2}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2010 \cdot \eta\mu x + 1}{f(x)} = +\infty$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ .

72.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

73.

Μια συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο διάστημα  $(0, +\infty)$ . Αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1} + 3f(x)) = 6$ ,  
να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

74.

Να υπολογίσετε τα όρια

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{x}$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1| + |2-x|}{x}$ .

75.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

i. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

ii. Να βρεθούν οι  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε να υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

76.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{|x^3 - 2x + 5| - |x + 7|}{(x - 2)^2}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .

ii. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .

77.

Στον ημιάξονα  $Ox$  παίρνουμε σημείο  $M$  με τετμημένη  $x$  και φέρνουμε τμήμα  $MN$  κάθετο στον  $Ox$  με μέτρο 1.

- i. Να εκφράσετε το μέτρο του τμήματος  $ON$  συναρτήσει του  $x$ .
- ii. Να υπολογίσετε το όριο του πηλίκου  $\frac{ON}{OM}$ , όταν το  $M$  απομακρύνεται στο άπειρο.
- iii. Να υπολογίσετε το όριο της διαφοράς  $(ON) - (OM)$  όταν το  $M$  απομακρύνεται στο άπειρο.

78.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - 3x$ .

- i. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
- ii. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 6x)$ .

79.

- i. Για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει  $\frac{3x-5}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x^2+10}{x^2}$  για κάθε  $x > 0$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- ii. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - \eta\mu 2x}{x^2 + 100}$ .

80.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{16x^2-4x}}$

- i. Να δικαιολογήσετε ότι μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της  $f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ .
- ii. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- iii. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και το  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x)$ .

81.

- i. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5^x}{3^x + 2^x} \right)$ .
- ii. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 5^x}{2\alpha^x - 5^x}$  για τις διάφορες τιμές του θετικού αριθμού  $\alpha$ .

82.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \left( \frac{2x^2 + \theta}{2x} \right)$  με  $\theta > 0$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- iv. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ .

83.

Να υπολογίσετε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$ .

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{4x^2 + x} + x)$ .

84.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x) = (\alpha - 1)x^2 - x + 5$  και

$Q(x) = (\alpha + 2)x^3 + \alpha x^2 + 2$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

85.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 1} - (κx + λ)$ ,  $κ, λ \in \mathbb{R}$

Να βρείτε για ποιες τιμές των  $κ, λ$  είναι

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

86.

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x^4 - 10000}{x^4 + 10000}$  και  $g(x) = \ln x$

i. Να βρείτε τη σύνθεση της  $f$  με την  $g$ .

ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$ .

iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$ .

87.

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2010} - \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Ορίζονται τα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;
- ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .