ΘΕΜΑ 4ο (4833)

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός χ , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός χ , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 . (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ . (Μονάδες 7)

Προτεινόμενη Λύση

α) Αν $\chi=-5,$

τότε: $\lambda=\left[2\cdot(-5)+5\right]^2-8\cdot(-5)=(-10+5)^2+40=(-5)^2+40=25+40=65.$

β) Αν $\lambda=20,$ τότε:

$$(1)\Leftrightarrow(2\chi+5)^2-8\chi=20\Leftrightarrow 4\chi^2+20\chi+25-8\chi=20\Leftrightarrow 4\chi^2+12\chi+5=0$$

$$\Leftrightarrow \chi=-\frac{1}{2} \text{ ή } \chi=-\frac{5}{2}$$

γ) $(1)\Leftrightarrow\lambda=4\chi^2+20\chi+25-8\chi\Leftrightarrow 4\chi^2+12\chi+(25-\lambda)=0$ (2).

i) Έστω λ=5. Τότε η $(2)\Leftrightarrow 4\chi^2+12\chi+20=0\Leftrightarrow \chi^2+3\chi+5=0$, αδύνατη εξίσωση, διότι $\Delta=-11\prec 0.$ Κατά συνέπεια για κάθε τιμή του εισαγόμενου αριθμού χ είναι $\lambda\neq 5.$

ii) $(1)\Leftrightarrow\lambda=4\chi^2+12\chi+25,$ με $\Delta=144-400=-56\prec 0.$

Είναι $\alpha=4\succ 0$ και $-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{3}{2}$

Το τριώνυμο $\lambda=4\chi^2+12\chi+25$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $\chi=-\dfrac{3}{2}$,

την $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=\dfrac{256}{16}=16$. Άρα για κάθε χ: $4\chi^2+12\chi+25\geq 16\Leftrightarrow\lambda\geq 16.$

ΘΕΜΑ 4ο (4835)

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - \beta\chi + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.
Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|\chi_1 + \chi_2| = 4$, τότε:
α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β . (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)
γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $\chi^2 - \beta|\chi| + 3 = 0$ (1)
Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Προτεινόμενη Λύση

α) Είναι: $\chi_1 + \chi_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-\beta}{1} = \beta$ $(\textit{τύποι Vietta})$

Τότε: $|\chi_1 + \chi_2| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow \beta = -4$ ή $\beta = 4.$

β) Από υπόθεση η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, άρα:
$\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 4\gamma \Leftrightarrow |\beta|^2 > 4\gamma \Leftrightarrow 4^2 > 4\gamma \Leftrightarrow 16 > 4\gamma \Leftrightarrow \gamma < 4.$

γ) $(1) \Leftrightarrow |\chi|^2 - \beta \cdot |\chi| + 3 = 0$ με $\Delta = \beta^2 - 12 = |\beta|^2 - 12 = 4^2 - 12 = 4 > 0.$

Επειδή $P = 3 > 0$ (ρίζες ομόσημοι αριθμοί), η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν
$S < 0 \Leftrightarrow \beta < 0$. Άρα $\beta = -4.$

ΘΕΜΑ 4ο (4836)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες χ_1, χ_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $\chi_1 + 4\chi_2 \geq 4$.

Μονάδες 12)

Προτεινόμενη Λύση

α) Πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2.$$

β) Έστω ρ ρίζα της εξίσωσης.

Αν $\rho = 0$, τότε με αντικατάσταση στην εξίσωση προκύπτει $0 - 0 + 1 = 0$, άτοπον.

(Εναλλακτικά: $P = 1 \neq 0 \Leftrightarrow \chi_1 \neq 0$ και $\chi_2 \neq 0$)

Άρα $\rho \neq 0$. Ισχύει: $\chi_1 \cdot \chi_2 = P \Leftrightarrow \chi_1 \cdot \chi_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \chi_1 \cdot \chi_2 = 1.$

Αν $\chi_1 = \rho,\ \textit{τότε}:\ \rho \cdot \chi_2 = 1 \Leftrightarrow \chi_2 = \dfrac{1}{\rho}$, δηλαδή $\dfrac{1}{\rho}$ ρίζα της εξίσωσης.

γ) ι) Έχουμε: $S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda > 2 > 0 \Leftrightarrow \chi_1 + \chi_2 > 0$ και με δεδομένο ότι οι ρίζες είναι ομόσημοι αριθμοί ($P = 1 > 0$) συμπεραίνουμε πως οι αριθμοί χ_1 και χ_2 είναι θετικοί.

ιι) Αν $\chi_1 = \rho$, τότε $\chi_2 = \dfrac{1}{\rho}$

Έστω: $\chi_1 + 4\chi_2 \geq 4 \Leftrightarrow \rho + 4 \cdot \dfrac{1}{\rho} \geq 4 \xleftrightarrow{\rho>0} \rho^2 + 4 \geq 4\rho \Leftrightarrow (\rho - 2)^2 \geq 0,$ ισχύει.