Διαιρετότητα

Μαθαίνω

- **Πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού **α** είναι όλοι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς,
  δηλαδή οι αριθμοί: **0, α, 2·α, 3·α, 4·α,...**
- Το **μηδέν** είναι πολλαπλάσιο όλων των φυσικών αριθμών
- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** δύο ή περισσοτέρων αριθμών ($\neq 0$) ονομάζεται το μικρότερο (διαφορετικό από το 0) κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών.

Δραστηριότητες

1) Να βρείτε τα 5 πρώτα πολλαπλάσια των παρακάτω αριθμών.
   i. Πολ/σια του 3:.............................
   ii. Πολ/σια του 5:.............................
   iii. Πολ/σια του 8:............................
   iv. Πολ/σια του 12:...........................
2) Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των παρακάτω αριθμών:
   i. $\text{Ε.Κ.Π}\left[4,5\right]=$................
   ii. $\text{Ε.Κ.Π.}\left[2,3,12\right]=$..........
   iii. $\text{Ε.Κ.Π.}\left[1,5,10\right]=$...........
3) Δύο πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι. Το πρώτο ανά 3 ημέρες, το δεύτερο ανά 4 ημέρες. Αν ξεκίνησαν από το νησάκι ταυτόχρονα , σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού;

   Λύση

Μαθαίνω

- Αν **α** και **β** δύο φυσικοί αριθμοί, ο αριθμός β **διαιρεί** τον αριθμό α (το συμβολίζουμε β\α), όταν η διαίρεση **α:β** είναι τέλεια.

Τότε:

1) υπάρχει ένας φυσικός αριθμός γ (το πηλίκο της διαίρεσης α:β) έτσι ώστε να ισχύει: $\alpha = \beta \cdot \gamma$ (ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης).
2) Ο αριθμός α λέγεται πολλαπλάσιο του αριθμού β.
3) Ο αριθμός α διαιρείται από τον αριθμό β.
4) Ο αριθμός β είναι παράγοντας του αριθμού α.

- **Διαιρέτες** ενός φυσικού αριθμού **α** λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

  π.χ.

  Οι διαιρέτες του αριθμού 8 είναι: 1, 2, 4, 8.
- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης των αριθμών αυτών.
- Δύο αριθμοί **α** και **β** λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α, β) = 1.**

  π.χ.

  Οι αριθμοί 5, 6 είναι πρώτοι μεταξύ τους αφού $\text{ΜΚΔ}(5,6)=1$.

<u>Δραστηριότητες</u>

1) Να βρείτε όλους τους διαιρέτες των παρακάτω φυσικών αριθμών.
   i. Διαιρέτες του 5:............................
   ii. Διαιρέτες του 6:............................
   iii. Διαιρέτες του 12:..........................
   iv. Διαιρέτες του 17:..........................
   v. Διαιρέτες του 24:..........................

   Να σημειώσετε ποιος από τους παραπάνω αριθμούς είναι πρώτος και ποιος σύνθετος.
2) Να βρείτε το ΜΚΔ των παρακάτω φυσικών αριθμών:
   i. $\text{ΜΚΔ}(3,6)=$..........
   ii. $\text{ΜΚΔ}(4,6)=$..........
   iii. $\text{ΜΚΔ}(5,8)=$..........
   iv. $\text{ΜΚΔ}(4,8,12)=$......

   Να σημειώσετε ποιοί από τους παραπάνω αριθμούς είναι πρώτοι μεταξύ τους

Μαθαίνω

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο φυσικό, θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

π.χ.

Να εξετάσετε αν ο αριθμός 7 διαιρεί τον αριθμό 350.000

Λύση:

Ο αριθμός 350.000 είναι πολλαπλάσιο του 35 διότι 350.000=35·10.000

Ο αριθμός 7 διαιρεί το 35 , άρα διαιρεί και το πολλαπλάσιό του 350.000.

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους , θα διαιρεί το άθροισμα και τη διαφορά τους

π.χ.

Να εξετάσετε αν ο αριθμός 12 διαιρεί τον αριθμό 1236.

Λύση:

Ο αριθμός 1236 γράφεται: 1200+36

Ο αριθμός 12 διαιρεί και το 1200 και το 36, άρα διαιρεί και το άθροισμά τους 1236.

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν δεύτερο φυσικό αριθμό και ο δεύτερος αριθμός διαιρεί έναν τρίτο, τότε ο πρώτος αριθμός θα διαιρεί και τον τρίτο.
  Δηλαδή: αν α\β και β\γ , τότε α\γ. (*Μεταβατική ιδιότητα*)

Κριτήρια διαιρετότητας

Μαθαίνω

- ✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 10**
  Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **10** όταν το τελευταίο του ψηφίο είναι μηδέν (**0**)

Παρατήρηση

Ανάλογα κριτήρια διαιρετότητας ισχύουν για τους αριθμούς 100, 1000, κλπ.

Πιο συγκεκριμένα:

Ένας αριθμός διαιρείται με το 100 όταν τα δύο τελευταία του ψηφία είναι 0.

Ένας αριθμός διαιρείται με το 1000 όταν τα τρία τελευταία του ψηφία είναι 0.

✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 2**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2** όταν είναι **άρτιος**, δηλαδή όταν το τελευταίο του ψηφίο είναι: **0, 2, 4, 6, 8**.

✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 5**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5** όταν το τελευταίο του ψηφίο είναι **0** ή **5**.

✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 4**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4** όταν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι **μηδέν** ή **σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4**.

π.χ.

Ποιοι από τους αριθμούς **232, 34.500, 741** διαιρούνται με το 4;

Το 232 διαιρείται με το 4 αφού το 32 διαιρείται με το 4.

Το 34500 διαιρείται με το 4 εφόσον τα δύο τελευταία ψηφία του είναι 0.

Το 741 δεν διαιρείται με το 4 αφού το 41 δεν διαιρείται με το 4.

✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 25**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **25** όταν τα δύο τελευταία ψηφία του είναι **μηδέν** ή **σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 25.**

π.χ.

Ποιοι από τους αριθμούς **64.300, 875, 1240** διαιρούνται με το 25;

- Το 64.300 διαιρείται με το 25 εφόσον τα δύο τελευταία ψηφία του είναι 0.
- Το 875 διαιρείται από το 25 αφού το 75 διαιρείται με το 25.
- Το 1240 δεν διαιρείται από το 25 αφού το 40 δεν διαιρείται από το 25.

✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 8**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **8** όταν τα τρία τελευταία ψηφία του **σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 8.**

π.χ.

Ο αριθμός 62.672

Έχουμε: $672 \div 8 = 84$, επομένως το 62.672 διαιρείται με το 8.

π.χ.

Ο αριθμός 28343

Έχουμε: $343 = 8 \cdot 42 + 7$, επομένως ο αριθμός 28.343 δε διαιρείται με το 8.

✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 3**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** όταν το άθροισμα των ψηφίων του **διαιρείται με το 3.**

π.χ.

Ο αριθμός 2.337

Έχουμε: $2+3+3+7=15$

Το 15 διαιρείται με το 3, επομένως και ο αριθμός 2.337 διαιρείται με το 3.

✓ **Κριτήριο διαιρετότητας με το 9**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **9** όταν το άθροισμα των ψηφίων του **διαιρείται με το 9.**

π.χ.

Ο αριθμός 7.398

Έχουμε: $7+3+9+8=27$

Το 27 διαιρείται με το 9, οπότε και ο αριθμός 7.398 διαιρείται με το 9.

✓ **Ένας αριθμός που διαιρείται από δύο <u>πρώτους</u> αριθμούς ή <u>πρώτους μεταξύ τους</u>, τότε θα διαιρείται και από το γινόμενό τους.**

Επομένως, ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **6** όταν **διαιρείται** από το **2** και το **3** **ταυτόχρονα**

Αντίστοιχα:

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **12** όταν **διαιρείται** από το **3** και το **4** **ταυτόχρονα**.

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **15** όταν **διαιρείται** από το **3** και το **5** **ταυτόχρονα**.

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **18** όταν **διαιρείται** από το **2** και το **9** **ταυτόχρονα**.

π.χ.

- Ο αριθμός 462
  Διαιρείται με το 2 , εφόσον είναι άρτιος, αλλά και με το 3,
  διότι: $4+6+2=12$ και το 12 διαιρείται με το 3. Επομένως διαιρείται και με το 6.
- Ο αριθμός 638
  Διαιρείται με το 2 , εφόσον είναι άρτιος, αλλά δεν διαιρείται με το 3,
  διότι: $6+3+8=17$. Επομένως δεν διαιρείται με το 6.
- Ο αριθμός 7.398
  Διαιρείται με το 2 , εφόσον είναι άρτιος, καθώς και με το 9 , διότι:
  $7+3+9+8=27$ και το 27 διαιρείται με το 9. Επομένως διαιρείται και με το 18

Χρήσιμα συμπεράσματα:

- ✓ ***Αν ένας αριθμός διαιρείται με τον φυσικό αριθμό α , τότε θα διαιρείται και με τους διαιρέτες του α.***
- ✓ ***Αν ένας αριθμός δεν διαιρείται με τον α, τότε δεν θα διαιρείται και από τα πολλαπλάσια του α.***

π.χ.

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς **43, 63, 84, 268, 5.643** διαιρούνται με το **3** και ποιοι με το **9**;

- Το 43: $4+3=7$, δεν διαιρείται με το 3 ,οπότε αποκλείεται να διαιρείται με το 9.
- Το 63: $6+3=9$, διαιρείται με το 9 ,άρα και με το 3.
- Το 84: $8+4=12$, διαιρείται με το 3 ,όχι όμως με το 9.
- Το 268: $2+6+8=16$, δεν διαιρείται με το 3 , επομένως ούτε και με το 9.
- Το 5.643: $5+6+4+3=18$, διαιρείται με το 9 άρα και με το 3.

Συμπληρωματικά κριτήρια

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 11**

  Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **11** όταν το άθροισμα των διψήφιων τμημάτων που προκύπτουν αν τον χωρίσουμε από δεξιά προς τα αριστερά είναι ένας αριθμός που **διαιρείται με το 11**.

  Σημείωση: Αν το πλήθος των ψηφίων του αριθμού είναι περιττό τότε το τελευταίο τμήμα μετά τον χωρισμό θα είναι μονοψήφιο.

π.χ.

Ο αριθμός 5379

Έχουμε: $53+79=132$

Αντίστοιχα: $1+32=33$ και $33\div 11=3$.

π.χ.

Ο αριθμός 3.877.357

Έχουμε: $3+87+73+57=220$

Αντίστοιχα: $2+20=22$ και $22\div 11=2$.

β΄ τρόπος

Προσθέτουμε τα ψηφία του αριθμού με περιττή σειρά (1^o+3^o+5^o+...ψηφίο)

Στη συνέχεια προσθέτουμε τα ψηφία με άρτια σειρά (2^o+4^o+6^o+...ψηφίο)

Αφαιρούμε το μικρότερο άθροισμα από το μεγαλύτερο.

Αν η διαφορά τους είναι μηδέν (0) ή πολλαπλάσιο του 11 τότε ο αρχικός αριθμός διαιρείται από το 11.

π.χ.

Ο αριθμός 26.224

Άθροισμα ψηφίων με περιττή σειρά: $2+2+4=8$

Άθροισμα ψηφίων με άρτια σειρά: $6+2=8$

Τότε: $8-8=0$, επομένως ο αριθμός 26.224 διαιρείται με το 11.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 7**

  Ένας αριθμός διαιρείται με το 7 αν «διαγράψουμε» το τελευταίο ψηφίο του, το διπλασιάσουμε, το γινόμενο το αφαιρέσουμε από τον αριθμό που απέμεινε και το τελικό αποτέλεσμα διαιρείται με το 7.

  Σε περίπτωση που ο αριθμός που προκύπτει μετά την αφαίρεση είναι μεγάλος επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

π.χ.

Ο αριθμός 133

Έχουμε: $3 \cdot 2 = 6$

$13 - 6 = 7$. Επομένως το 133 διαιρείται με το 7.

π.χ.

Ο αριθμός 8.029

Έχουμε: $9 \cdot 2 = 18$

$802 - 18 = 784$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία

$4 \cdot 2 = 8$

$78 - 8 = 70$ και το 70 διαιρείται με το 7, επομένως και ο αριθμός 8.029 διαιρείται με το 7.

Εύρεση ΕΚΠ και ΜΚΔ δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών

Μαθαίνω

Για να βρούμε το ΕΚΠ ή τον ΜΚΔ δύο η περισσοτέρων φυσικών αριθμών, αναλύουμε αρχικά τους αριθμούς αυτούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Τότε:

- Το **ΕΚΠ** είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
- Ο **ΜΚΔ** είναι το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

π.χ.

Να βρεθεί το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των αριθμών 24, 42, 54.

Λύση:

Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα: $24 = 2^3 \cdot 3$

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$54 = 2 \cdot 3^3$

Επομένως: $\text{ΕΚΠ}\left[24, 42, 54\right] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$

$\text{ΜΚΔ}\left(24, 42, 54\right) = 2 \cdot 3 = 6.$

π.χ.

Να βρεθεί το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των αριθμών 1.134, 1344, 2940

Λύση

Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

1134	2	1344	2	2940	2
567	3	672	2	1470	2
189	3	336	2	735	3
63	3	168	2	245	5
21	3	84	2	49	7
7	7	42	2	7	7
1		21	3	1	
		7	7		
		1			

Άρα έχουμε: $1134 = 2\cdot 3^4\cdot 7,\quad 1344 = 2^6\cdot 3\cdot 7,\quad 2940{=}2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2$

Επομένως: $\text{ΕΚΠ}\left[1134,1344,2940\right] = 2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^2$.

$\text{ΜΚΔ}\left(1134,1344,2940\right) = 2\cdot 3\cdot 7 = 42.$

<u>β΄ τρόπος</u>

Να βρεθεί το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των αριθμών 1.134, 1344, 2940

Λύση

1134	1344	2940	2΄
567	672	1470	2
567	336	735	2
567	168	735	2
567	84	735	2
567	42	735	2
567	21	735	3΄
189	7	245	3
63	7	245	3
21	7	245	3
7	7	245	5
7	7	49	7΄
1	1	7	7
		1	

Επομένως: $\text{ΕΚΠ}\left[1134,1344,2940\right] = 2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^2$.

$\text{ΜΚΔ}\left(1134,1344,2940\right) = 2\cdot 3\cdot 7 = 42.$

Μέθοδος (Αλγόριθμος) του Ευκλείδη για το ΜΚΔ

▪ Γράφουμε τους αριθμούς σε μία γραμμή.

▪ Ξαναγράφουμε το μικρότερο από τους αριθμούς στην αμέσως επόμενη γραμμή.

▪ Διαιρούμε τους άλλους αριθμούς με τον μικρότερο και κάτω από τον καθένα γράφουμε το υπόλοιπο της αντίστοιχης διαίρεσης.

▪ Συνεχίζουμε τη διαδικασία και όταν το υπόλοιπο μιας διαίρεσης είναι μηδέν τότε παύει να συμμετέχει στη διαδικασία

▪ Ο ΜΚΔ των αρχικών αριθμών είναι ο αριθμός που τελικά απομένει ενώ οι υπόλοιποι είναι μηδέν.

π.χ.

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 36, 54, 72.

Λύση:

Έχουμε:	36	54	72
	36	18	0
	0	18	

Άρα: $\text{ΜΚΔ}(36,54,72)=18.$

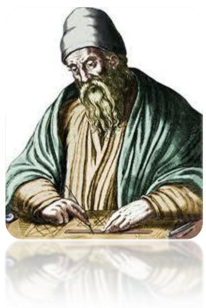
π.χ.

Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 1.134, 1.344, 2.940

Λύση:

Έχουμε:	1134	1344	2940
	1134	210	672
	84	210	42
	0	0	42

Άρα: $\text{ΜΚΔ}(1134,1344,2940)=42.$



Εύρεση διαιρετών φυσικού αριθμού n>1

Αναλύουμε τον αριθμό **n** σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Στη συνέχεια παίρνοντας όλους τους δυνατούς συνδυασμούς για τους εκθέτες βρίσκουμε όλους τους διαιρέτες του αριθμού

π.χ.

Να βρεθούν όλοι οι διαιρέτες του αριθμού 90.

Λύση:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Άρα: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Κάθε διαιρέτης δ του 90 θα έχει τη μορφή: $\delta = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$, όπου ο αριθμός α ισούται με 0 ή 1, ο αριθμός β ισούται με 0 ή 1 ή 2 και ο αριθμός γ ισούται με 0 ή 1.

Παίρνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

Για $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ παίρνουμε $\delta_1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1$.

Για $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ παίρνουμε $\delta_2 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$

Για $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ παίρνουμε $\delta_3 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$

Για $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6$

Για $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 0$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 9$

Για $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 0$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 18$

Για $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 5$

Για $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 10$

Για $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15$

Για $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$

Για $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 1$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 45$

Για $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$ παίρνουμε $\delta_4 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$

Επομένως οι **διαιρέτες** του **90** είναι οι αριθμοί: **1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 και 90**.