ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κυριακόπουλος Αντώνης
e-mail: a_kiriak@otenet.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή που αναφέρεται γενικά στην έννοια της εξίσωσης:

- Δίνουμε τον ορισμό της εξίσωσης και επισημαίνουμε τη διαφορά μεταξύ ισότητας και εξίσωσης.
- Αναφέρουμε πότε δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες και αποδεικνύουμε τα σχετικά θεωρήματα.
- Εκθέτουμε τα διάφορα είδη εξισώσεων και ασχολούμαστε με τους τρόπους επίλυσης αυτών.
- Διατυπώνουμε μια απλή αλλά πολύ χρήσιμη πρόταση για την επίλυση των εξισώσεων.
- Τέλος, επισημαίνουμε τα λάθη που πιθανόν να γίνουν κατά την διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης.

0. Εισαγωγή.

Η εργασία αυτή απευθύνεται στους συναδέλφους μαθηματικούς και έχει σκοπό τη σωστή διδασκαλία των εξισώσεων. Θέλω να τονίσω μερικά σημεία τα οποία αν δεν προσεχτούν υπάρχει κίνδυνος να περάσουν στους μαθητές λανθασμένα μηνύματα. Υποθέτω ότι ο διδάσκων κατέχει την Μαθηματική Λογική, η οποία, ως γνωστόν, είναι η βάση όλων ανεξαιρέτως των μαθηματικών. Μερικά από αυτά που θα πω παρακάτω, για να διδαχθούν στους μαθητές θα πρέπει να απλοποιηθούν και να προσαρμοσθούν κατάλληλα στις γνώσεις τους. Για παράδειγμα, οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί και επομένως δεν γνωρίζουν τι είναι προτασιακός τύπος. Έτσι, αν πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε την έννοια αυτή, αντί να πούμε: «Ο προτασιακός τύπος p(x) με σύνολο ορισμού Α», μπορούμε να πούμε, χωρίς να κάνουμε λάθος: « Η έκφραση p(x), η οποία γίνεται μια πρόταση αληθής ή ψευδής, για κάθε x από το σύνολο Α». Χρειάζεται όμως μεγάλη προσοχή γιατί πολλές φορές στην προσπάθειά μας να δώσουμε να καταλάβουν οι μαθητές τις διάφορες έννοιες στα Μαθηματικά, τις απλοποιούμε περισσότερο από όσο πρέπει με αποτέλεσμα να τις λέμε λάθος και να περνάμε λανθασμένα μηνύματα. Έχω ακούσει συναδέλφους να λένε: **« Το λέω έτσι (δηλαδή λάθος) για να το απλοποιήσω και να το καταλάβουν οι μαθητές!!!».** Αυτό είναι παράλογο. Είναι δυνατόν από το λάθος να καταλάβουν το σωστό; Οι έννοιες στα Μαθηματικά απλοποιούνται μέχρι ενός ορισμένου σημείου (infimum), κάτω από το οποίο αρχίζουν τα λάθη και οι παρανοήσεις .

Για να απλοποιήσει όμως κάποιος μια έννοια στα Μαθηματικά, θα πρέπει να την κατέχει πάρα πολύ καλά ώστε να γνωρίζει το «infimum» της έννοιας αυτής για να μην κατέβει κάτω από αυτό. Για παράδειγμα, θα έχουμε κατέβει κάτω από το όριο αυτό αν, στην προσπάθειά μας να απλοποιήσουμε τον ορισμό της εξίσωσης, πούμε στους μαθητές ότι: **«Εξίσωση είναι μια ισότητα η οποία περιέχει έναν άγνωστο x και η οποία επαληθεύεται για ορισμένες τιμές του x».** Ένας τέτοιος ορισμός όχι μόνο δεν έχει νόημα, γιατί αφού είναι ισότητα θα πρέπει να ισχύει σε κάθε περίπτωση, αλλά μένει και η εντύπωση στους μαθητές ότι όταν έχουν μια εξίσωση, έχουν μια ισότητα, που είναι λάθος, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ένας συνάδελφος μου έλεγε ότι ο μαθηματικός της κόρης του, στην Α΄ τάξη του Γυμνασίου, τους υπαγόρευσε τα εξής: **« Ευθύγραμμο τμήμα είναι μια ευθεία που έχει αρχή και τέλος»** και στην επόμενη γραμμή: **« Ευθεία είναι μια γραμμή που προκύπτει αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα και από τα δύο άκρα του»**. Εγώ πιστεύω ότι ο συνάδελφος αυτός γνώριζε ότι αυτά που τους έλεγε δεν είναι σωστά, αλλά στην προσπάθεια του να απλοποιήσει τις έννοιες αυτές, όχι μόνο τους τα είπε λάθος, όχι μόνο τους πέρασε το μήνυμα ότι μια ευθεία έχει αρχή και τέλος, αλλά έκανε και «φαύλο κύκλο», αφού τους όρισε το ευθύγραμμο τμήμα με την ευθεία και την ευθεία με το ευθύγραμμο τμήμα. Ίσως ο συνάδελφος αυτός να νόμιζε ότι αν τους έλεγε ότι στην Γεωμετρία η έννοια της ευθείας είναι αρχική, δηλαδή ότι δεν ορίζεται, θα μείωνε τα Μαθηματικά. Θα έπρεπε όμως να γνωρίζει και θα ήταν μια ωραία ευκαιρία να το έλεγε και στους μαθητές, ότι η παρουσία των αρχικών όρων (εννοιών) σε μια Μαθηματική (Αξιωματική) Θεωρία, όχι μόνο δεν μειώνει την αξία της, αλλά αντιθέτως την καθιστά ευρύτερη, γιατί μπορεί να εφαρμοσθεί σε διάφορες περιπτώσεις, ακριβώς γιατί οι λαμβανόμενοι ως αρχικοί όροι μας παρέχουν την ευχέρεια να τους ερμηνεύσουμε, κατά περίπτωση, με διαφορετικούς τρόπους. Θα έπρεπε βέβαια προηγουμένως να τους έχει πει τι είναι μια Μαθηματική Θεωρία, ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η πρώτη Μαθηματική Θεωρία (3^{ος}αιώνας π. Χ.) και ότι τα σύγχρονα Μαθηματικά έχουν «ταχτοποιηθεί» έχοντας ως πρότυπο την δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτά είναι πολύ εύκολο να κατανοηθούν ακόμα και από τους μαθητές της Α΄ τάξης του Γυμνασίου, αρκεί να ειπωθούν απλά, αλλά σωστά.

1. Η γενική έννοια της εξίσωσης.

<u>Ορισμός.</u> Θεωρούμε δύο μη κενά σύνολα Ω και Τ και δύο συναρτήσεις $f:\mathrm{A}\to\mathrm{T}$ **και** $g:\mathrm{B}\to\mathrm{T}$ **μιας μεταβλητής , όπου Α και Β είναι δύο μη κενά υποσύνολα του Ω. Ο προτασιακός τύπος:**

$$\mathbf{f(x)=g(x)} \qquad (\varepsilon)$$

ονομάζεται εξίσωση με έναν άγνωστο x και με σύνολο αναφοράς το Ω.

• Οι εκφράσεις f(x) και g(x) ονομάζονται **«τα μέλη»** της εξίσωσης (ε) [f(x) πρώτο μέλος, g(x) δεύτερο μέλος].

• Το σύνολο $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}(=D_\varepsilon)$ ονομάζεται **σύνολο ορισμού** της εξίσωσης (ε).

• Έστω ότι: $D_\varepsilon=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\varnothing$. Τότε:

— Για κάθε $x\in D_\varepsilon$ η έκφραση (ε) γίνεται μια πρόταση (αληθής ή ψευδής).

— Ένα στοιχείο ξ του συνόλου D_ε λέμε ότι είναι **μια λύση ή μια ρίζα της εξίσωσης** (ε) αν, και μόνο αν, η έκφραση (ε) με $x=\xi$ γίνεται μια πρόταση αληθής. Δηλαδή αν, και μόνο αν, ισχύει: f(ξ)=g(ξ).

— Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης (ε) είναι:

$$S_\varepsilon=\{x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\mid f(x)=g(x)\}\subseteq D_\varepsilon(=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}).$$

• Μια εξίσωση (ε) λέμε ότι είναι **αδύνατη** αν, και μόνο αν $D_\varepsilon=\varnothing$ ή ($D_\varepsilon\neq\varnothing$ και $S_\varepsilon=\varnothing$).

Δηλαδή αν, και μόνο αν, $D_\varepsilon=\varnothing$ ή $D_\varepsilon\neq\varnothing$ αλλά δεν υπάρχει στοιχείο $\xi\in D_\varepsilon$ τέτοιο ώστε να ισχύει: f(ξ)=g(ξ) $[\Leftrightarrow \forall\xi\in D_\varepsilon, f(\xi)\neq g(\xi)]$.

• Η εύρεση των στοιχείων του συνόλου S_e, δηλαδή η εύρεση όλων των λύσεων της εξίσωσης (ε), ονομάζεται **επίλυση** της εξίσωσης αυτής.

• Μια εξίσωση (ε) λέμε ότι είναι **ταυτότητα** ως προς x ή ότι είναι **ταυτοτική** ως προς x, αν, και μόνο αν, $D_\varepsilon\neq\varnothing$ και $D_\varepsilon=S_\varepsilon$. Δηλαδή, αν, και μόνο αν, $D_\varepsilon\neq\varnothing$ και κάθε στοιχείο του συνόλου αυτού είναι λύση της εξίσωσης. Στην περίπτωση αυτή, οι συναρτήσεις f και g ταυτίζονται (είναι ίσες) στο σύνολο $D_\varepsilon\left(=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\right)$.

• Μία εξίσωση λέμε ότι είναι **αόριστη ή απροσδιόριστη** αν, και μόνο αν, έχει άπειρες λύσεις.

Σημείωση 1. Ανάλογα ορίζεται και η έννοια της εξίσωσης με 2, 3 κτλ. αγνώστους.

2. Εξισώσεις ισοδύναμες.

<u>Ορισμός.</u> Δύο εξισώσεις (ε) και (ε΄) με το ίδιο σύνολο αναφοράς, λέμε ότι είναι ισοδύναμες στην τομή $D_\varepsilon\cap D_{\varepsilon'}(\neq\varnothing)$ των συνόλων ορισμού των και γράφουμε: $(\varepsilon)\Leftrightarrow(\varepsilon')$ αν, και μόνο αν: $S_\varepsilon=S_{\varepsilon'}$. Δηλαδή, αν, και μόνο αν, κάθε λύση της μιας εξίσωσης είναι και λύση της άλλης.

— Θεωρούμε τρεις εξισώσεις $(\varepsilon),(\varepsilon')$ και (ε'') με το ίδιο σύνολο αναφοράς. Στην τομή $D_\varepsilon\cap D_{\varepsilon'}\cap D_{\varepsilon''}(\neq\varnothing)$ των συνόλων ορισμού των, όπως βρίσκουμε εύκολα, ισχύουν τα εξής:

1) $(\varepsilon)\Leftrightarrow(\varepsilon)$.

2) Αν $(\varepsilon)\Leftrightarrow(\varepsilon')$, τότε $(\varepsilon')\Leftrightarrow(\varepsilon)$.

3) Αν $(\varepsilon)\Leftrightarrow(\varepsilon')$ και $(\varepsilon')\Leftrightarrow(\varepsilon'')$, τότε $(\varepsilon)\Leftrightarrow(\varepsilon'')$.

(Είναι φανερό ότι η πρώτη σχέση ισχύει και στο σύνολο D_ε και ότι η δεύτερη ισχύει και στο σύνολο $D_\varepsilon\cap D_{\varepsilon'}$).

Σημείωση 2. Στο σύνολο των εξισώσεων με το ίδιο σύνολο αναφοράς και με κοινό σύνολο ορισμού ένα υποσύνολο αυτού Σ, η σχέση:

« Η εξίσωση (ε) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (ε') »

είναι μια **«σχέση ισοδυναμίας»** στο σύνολο Σ (αυτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική).

3. Εξισώσεις εντός του συνόλου $\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με εξισώσεις εντός του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών (πολλά από αυτά που θα πούμε επεκτείνονται εύκολα και σε ένα οποιοδήποτε άλλο σώμα, όπως για παράδειγμα στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών κτλ.). Δηλαδή, θα ασχοληθούμε με εξισώσεις, στις οποίες τα μέλη είναι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής και το σύνολο αναφοράς είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (αν δεν αναφέρουμε το σύνολο αναφοράς θα εννοούμε ότι αυτό είναι το $\mathbb{R}$). Για την επίλυση των εξισώσεων αυτών χρησιμοποιούμε τα παρακάτω θεωρήματα.

<u>Θεώρημα 1.</u> Έστω μια εξίσωση f(x)=g(x) με σύνολο ορισμού D. Για κάθε συνάρτηση h που είναι ορισμένη στο σύνολο D, ισχύει (στο D) η ισοδυναμία :

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x).$$

Απόδειξη.

$$\begin{pmatrix} \rho \ \text{ρίζα της} \\ \text{f(x)=g(x)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \in D \ \text{και} \\ \text{f}(\rho)\text{=g}(\rho) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \in D \ \text{και} \\ \text{f}(\rho)\text{+h}(\rho)\text{=g}(\rho)\text{+h}(\rho) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \ \text{ρίζα της} \\ \text{f(x)+h(x)=g(x)+h(x)} \end{pmatrix}$$

<u>Πόρισμα 1.</u> **Έστω μια εξίσωση f(x)=g(x) με σύνολο ορισμού D. Για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει (στο D) η ισοδυναμία :**

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + \kappa = g(x) + \kappa .$$

<u>Πόρισμα 2.</u> **Αν σε μια εξίσωση μεταφέρουμε έναν «όρο» της από το ένα μέλος στο άλλο, θέτοντας προ αυτού το πρόσημο « $-$» , τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική .**

Για παράδειγμα, έστω μια εξίσωση f(x)+g(x)=φ(x)-h(x) με σύνολο ορισμού το D. Ισχύουν (στο D) οι ισοδυναμίες:

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) - h(x) \Leftrightarrow f(x) + g(x) + h(x) = \varphi(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x) + h(x) = \varphi(x) - g(x) .$$

<u>Πόρισμα 3.</u>**Κάθε εξίσωση με ένα άγνωστο x είναι ισοδύναμη, στο σύνολο ορισμού της, με μια εξίσωση της μορφής: f(x)=0, όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση.**

<u>Θεώρημα 2.</u> **Έστω μια εξίσωση f(x)=g(x) με σύνολο ορισμού D. Για κάθε συνάρτηση h που είναι ορισμένη στο σύνολο D και για την οποία ισχύει $h(x) \neq 0$, για κάθε $x \in D$, ισχύει (στο D) η ισοδυναμία :**

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) .$$

Απόδειξη. Εύκολη.

<u>Πόρισμα 4.</u> **Έστω μια εξίσωση f(x)=g(x) με σύνολο ορισμού D. Για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$, ισχύει (στο D) η ισοδυναμία :**

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot g(x) .$$

— Με τη βοήθεια του πορίσματος αυτού μπορούμε να εξαλείψουμε τους αριθμητικούς παρονομαστές μιας εξίσωσης (αν έχει).

Θεώρημα 3. Έστω μια εξίσωση f(x)=g(x) με σύνολο ορισμού D. Στο D ισχύουν οι ισοδυναμίες:

α) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2\nu+1}(x) = g^{2\nu+1}(x)$ **, για κάθε** $\nu \in \mathbb{N}$ **.**

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^{2\nu}(x) = g^{2\nu}(x) \\ f(x) \cdot g(x) \geq 0 \end{cases}$ **, για κάθε** $\nu \in \mathbb{N}^*$

Απόδειξη. Εύκολη.

Σημείωση 3. α) Στο σύνολο ορισμού της εξίσωσης: $|f(x)| = |g(x)|$, ισχύει:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) .$$

β) Στο σύνολο ορισμού της εξίσωσης: $|f(x)| = g(x)$, ισχύει:

$$\left| f(x) \right| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{cases}$$

4. Παραγοντοποιημένες εξισώσεις.

Κάθε εξίσωση, της οποίας το ένα μέλος είναι το 0 και το άλλο είναι γινόμενο δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων (από τις οποίες καμία δεν είναι σταθερή συνάρτηση), ονομάζεται **παραγοντοποιημένη εξίσωση.**

Έστω, για παράδειγμα, η εξίσωση:

$$f(x)g(x)h(x) = 0 .$$

Ονομάζουμε D το σύνολο ορισμού της. Είναι φανερό ότι το σύνολο λύσεων της εξίσωσης αυτής είναι η ένωση των συνόλων λύσεων των εξισώσεων: $f(x) = 0, g(x) = 0$ και $h(x) = 0$, με σύνολο ορισμού εκάστης το D.

5. Ακέραιες εξισώσεις.

<u>Ορισμός.</u> Μια εξίσωση λέγεται ακέραια ή πολυωνυμική αν, και μόνο αν, τα μέλη της είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Για παράδειγμα, καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι ακέραια:

$$\sqrt{2}x - 2 = 3x^2 - x + 2, \quad 5x^3 - 7x + 2 = 0, \quad 2x - 3 = 2x + 1$$

Προφανώς, το σύνολο ορισμού μιας ακεραίας εξίσωσης ταυτίζεται με το σύνολο αναφοράς της

— Αν σε μία ακέραια εξίσωση: g(x)=h(x), όπου g και h είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις, μεταφέρουμε όλους τους όρους της στο πρώτο μέλος και κάνουμε όλες τις δυνατές απλοποίησης, τότε βρίσκουμε μια ισοδύναμη εξίσωση της μορφής: f(x)=0, όπου f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση της οποίας ο τύπος έχει τη μορφή ενός (ανηγμένου) πολυωνύμου (με απροσδιόριστο το x). Δηλαδή, τότε, βρίσκουμε μια ισοδύναμη εξίσωση της μορφής:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 , \qquad (1)$$

όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ πραγματικοί αριθμοί. Η εξίσωση αυτή (1) λέμε ότι είναι η **ανηγμένη** μορφή της αρχικής εξίσωσης g(x) = h(x).

—**Βαθμό** της ακεραίας εξίσωσης (1) με $\alpha_\nu \neq 0$, ονομάζουμε τον βαθμό ν της πολυωνυμικής συνάρτησης του πρώτου μέλους.

—**Βαθμό** της ακεραίας εξίσωσης: g(x)=h(x), ονομάζουμε το βαθμό της ισοδύναμης ανηγμένης εξίσωσης: $\mathrm{g(x) - h(x) = 0}$.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε το βαθμό της εξίσωσης: $2x^5 - 3x^2 - 7 = 2x^5 - 4x + 1$ Επειδή:

$$2x^5 - 3x^2 - 7 = 2x^5 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 ,$$

η δοσμένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού.

— Λέμε ότι η εξίσωση (1) είναι η **γενική μορφή** των ακέραιων (πολυωνυμικών) εξισώσεων με ένα άγνωστο x, βαθμού ν. Έτσι, η γενική μορφή των ακέραιων εξισώσεων με ένα άγνωστο x:

• **Πρώτου βαθμού** είναι: $\alpha x+\beta=0$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$.

• **Δεύτερου βαθμού** είναι: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$.

•**Τρίτου βαθμού** είναι: $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$.

κ.ο.κ.

Σημείωση 4. Η επίλυση των εξισώσεων $1^{ου}$ βαθμού είναι απλή. Υπάρχουν σχετικά απλοί τύποι με ριζικά για την επίλυση των ακεραίων εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού (με σύνολο αναφοράς το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών), τους οποίους διδάσκουμε στη μέση εκπαίδευση και τους οποίους θεωρούμε γνωστούς. Υπάρχουν λίγο πιο πολύπλοκοι τύποι (με ριζικά) για την επίλυση των ακεραίων εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού, οι οποίοι διδάσκονται στα Ανώτερα Μαθηματικά. Αλλά, όπως απέδειξε ένας νεαρός, τότε, Νορβηγός μαθηματικός, ο N.H.Abel (1802-1829), δεν υπάρχουν ανάλογοι τύποι για την επίλυση ακεραίων εξισώσεων βαθμού $\nu\geq 5$, αν και αποδεικνύεται θεωρητικά η ύπαρξη των ριζών τους.

6. Ακέραιες εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές.

<u>Θεώρημα.</u> Αν η εξίσωση: $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=0$**, όπου** $\nu\in\mathbb{N}^*$ **και** $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},...,\alpha_1,\alpha_0$ **ακέραιοι αριθμοί με** $\alpha_\nu\neq 0$ **και** $\alpha_0\neq 0$**, έχει ρίζα το ανάγωγο κλάσμα** $\frac{\kappa}{\lambda}$ $(\kappa\lambda\neq 0)$**, τότε ο κ είναι διαιρέτης του** α_0 **και ο λ είναι διαιρέτης του** α_ν**.**

<u>Πόρισμα.</u> Αν η εξίσωση: $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=0$**, όπου** $\nu\in\mathbb{N}^*$ **και** $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},...,\alpha_1,\alpha_0$ **ακέραιοι αριθμοί με** $\alpha_\nu\neq 0$ **και** $\alpha_0\neq 0$**, έχει ρίζα τον ακέραιο αριθμό** $\kappa\neq 0$**, τότε ο κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου** α_0**.**

Σημείωση 5. Αναφέρουμε και τα εξής δύο θεωρήματα:

i) <u>Ακέραιες εξισώσεις με ρητούς συντελεστές.</u>

<u>Θεώρημα.</u> Αν η εξίσωση : $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ **έχει ρητούς συντελεστές και έχει ρίζα έναν από τους δύο αριθμούς** $\alpha+\sqrt{\beta}$ **και** $\alpha-\sqrt{\beta}$**, όπου α και β ρητοί αριθμοί με** $\beta>0$ **και** $\sqrt{\beta}$ **άρρητο (ασύμμετρο), τότε θα έχει ρίζα και τον άλλο αριθμό .**

ii) <u>Μιγαδικές ρίζες.</u>

<u>Θεώρημα.</u> «**Αν η εξίσωση** : $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ **έχει πραγματικούς συντελεστές και έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό** $\alpha+\beta i$**, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί με** $\beta\neq 0$**, τότε θα έχει ρίζα και τον συζυγή αυτού** $\alpha-\beta i$ **».**

7. Βαθμός πολλαπλότητας ρίζας.

<u>Ορισμός.</u> Θεωρούμε μία ακέραια εξίσωση: f(x)=0, όπου f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 1$ και ένα αριθμό $\kappa \in \mathbb{N}^*$. Ένας αριθμός ξ λέμε ότι είναι μια ρίζα της εξίσωσης αυτής με βαθμό πολλαπλότητας κ αν, και μόνο αν, υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση g με: $f(x)=(x-\xi)^{\kappa}g(x)$ και $g(\xi)\neq 0$.

Έστω ότι ξ είναι ρίζα μιας ακεραίας εξίσωσης f(x)=0 με βαθμό πολλαπλότητας κ. Αν κ=1, τότε το ξ λέγεται και **απλή** ρίζα της εξίσωσης αυτής. Αν κ=2 λέγεται διπλή κ.ο.κ..

8. Ρητές εξισώσεις.

<u>Ορισμός.</u> Μια εξίσωση λέγεται ρητή **αν, και μόνο αν, τα μέλη της είναι ρητές συναρτήσεις.**

Για παράδειγμα, καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι ρητή:

$$\frac{2x-1}{x+1}-\frac{3x+2}{x-1}=\frac{\sqrt{3}}{x^2-1},\quad x-\frac{1}{x}=2x^2-1.$$

— Αν σε μία ρητή εξίσωση με έναν άγνωστο x και με σύνολο ορισμού D μεταφέρουμε όλους τους όρους της στο πρώτο μέλος και εκτελέσουμε όλες τις σημειωμένες πράξεις (αν υπάρχουν), τότε βρίσκουμε μια ισοδύναμη εξίσωση στο D της μορφής: $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, όπου f και g είναι δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις, με $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in D$. Επομένως, έχουμε στο D:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0.$$

Συνεπώς , οι λύσεις της δοσμένης εξίσωσης είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, οι οποίες ανήκουν στο σύνολο D.

Παράδειγμα. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2-x}. \qquad \textbf{(1)}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης του πρώτου μέλους τις εξίσωσης (1) είναι $\mathbb{R}-\{1\}$ και εκείνης του δεύτερου μέλους είναι $\mathbb{R}-\{0,1\}$. Η τομή των δύο αυτών συνόλων είναι το σύνολο ορισμού D της εξίσωσης (1). Βρίσκομαι ότι: $D=\mathbb{R}-\{0,1\}$. Έχουμε, για κάθε $x\in D$

(οπότε $x\neq 0$ και $x\neq 1$):

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{2}{x(x-1)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x(x-1)}=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \ \acute{\eta}\ x=2) \Leftrightarrow x=2$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει τη μοναδική ρίζα x=2.

9. Εξισώσεις με ριζικά.

Ονομάζουμε εξισώσεις με ριζικά (ή άρρητες εξισώσεις), τις εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος x εμφανίζεται κάτω από σύμβολο ριζικού.

1) Εξισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι:

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}), \mathrm{f(x)} \geq 0 \ \textit{και} \ \mathrm{g(x)} \geq 0 \right\}$, όπου Α είναι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f και B είναι εκείνο της g. Προφανώς στο D ισχύει η ισοδυναμία:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

2) Εξισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι:

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}), \mathrm{f(x)} \geq 0 \right\}$, όπου Α είναι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f και B είναι εκείνο της g. Προφανώς στο D ισχύει η ισοδυναμία:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

3) Εξισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$.

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι:

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma), \mathrm{f(x)} \geq 0 \ \textit{και} \ \mathrm{g(x)} \geq 0 \right\}$, όπου Α είναι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f, B της g και Γ της h. Έχουμε στο D:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h^2(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ 2\sqrt{f(x)g(x)} = h^2(x) - f(x) - g(x). \end{cases}$$

Έτσι, φτάνουμε σε εξίσωση της δεύτερης μορφής.

4) Εξισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$.

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι:

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma), \mathrm{f(x)} \geq 0 \ , \ \mathrm{g(x)} \geq 0 \ \textit{και} \ \mathrm{h(x)} \geq 0 \right\}$, όπου Α είναι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f, B της g και Γ της h. Έχουμε στο D:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) - f(x) - g(x).$$

Έτσι, φτάνουμε σε εξίσωση της δεύτερης μορφής.

5) Εξισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = h(x)$.

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι:

$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma), \mathrm{f(x)} \geq 0 \ \textit{και} \ \mathrm{g(x)} \geq 0 \right\}$, όπου Α είναι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f, B της g και Γ της h. Έχουμε στο D (§3, θεώρημα 3):

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x)\cdot\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\geq 0 \\ f(x)+g(x)-2\sqrt{f(x)g(x)}=h^2(x) \end{cases}$$

:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(x)\cdot\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\geq 0 \\ f(x)+g(x)-2\sqrt{f(x)g(x)}=h^2(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(x)\left(f(x)-g(x)\right)\geq 0 \\ 2\sqrt{f(x)g(x)}=f(x)+g(x)-h^2(x) \end{cases}$$

Έτσι, φτάνουμε σε εξίσωση της δεύτερης μορφής.

10. Επίλυση εξισώσεων.

Η επίλυση μιας εξίσωσης ξεκινάει με την εύρεση του συνόλου ορισμού της. Δηλαδή, **πριν κάνουμε οτιδήποτε στην εξίσωση που θέλουμε να επιλύσουμε, θα πρέπει να βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της**. Ο λόγος είναι, όχι μόνο για να ξέρουμε για ποιες τιμές του x έχουν νόημα τα μέλη της, αλλά και για να ξέρουμε για ποιες τιμές του x ισχύουν αυτά που θα πούμε στη συνέχεια. **Το σύνολο ορισμού μιας εξίσωσης δεν είναι απαραίτητο να το γράφουμε υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του** $\mathbb{R}$. Άλλωστε αυτό στις περισσότερες περιπτώσεις δεν μπορούμε να το κάνουμε, αφού προς τούτο χρειάζεται να επιλύσουμε εξισώσεις και ανισώσεις ανώτερου βαθμού, που τα ίδια τα Μαθηματικά δεν μπορούν να επιλύσουν!!! Βεβαίως, αν μας είναι χρήσιμο και μπορούμε, γράφουμε το σύνολο ορισμού της εξίσωσης υπό τη μορφή αυτή, δηλαδή υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια, για να επιλύσουμε την εξίσωση εργαζόμαστε συνήθως με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους.

<u>Πρώτος τρόπος. Με ισοδυναμίες.</u> Συνήθως, για να επιλύσουμε μια εξίσωση, αφού βρούμε το σύνολο ορισμού της, χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα ισοδυναμιών που είδαμε παραπάνω (στα παρακάτω παραδείγματα εννοούμε ότι σύνολο αναφοράς είναι το $\mathbb{R}$).

Παράδειγμα 1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{x-5-\sqrt{x}}=4-\sqrt{x}\ . \qquad \textbf{(1)}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι:

$D=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0 \text{ και } x-5-\sqrt{x}\geq 0\right\}$. Για κάθε $x\in D$, έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 4-\sqrt{x}\geq 0 \\ x-5-\sqrt{x}=\left(4-\sqrt{x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-\sqrt{x}\geq 0 \\ x-5-\sqrt{x}=16-8\sqrt{x}+x \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\leq 4 \\ \sqrt{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 16 \\ x=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$$

Ο αριθμός 9, όπως βρίσκουμε εύκολα, ανήκει στο σύνολο D. Συνεπώς, η δοσμένη εξίσωση έχει τη μοναδική ρίζα x=9.

Σχόλιο. Λύσαμε την παραπάνω εξίσωση χωρίς να γράψουμε το σύνολο ορισμού αυτής D υπό μορφή διαστήματος η ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Αν θέλαμε όμως θα μπορούσαμε να το βάλουμε υπό τη μορφή αυτή , εργαζόμενοι ως εξής:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-5-\sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \\ x \leq x^2-10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2-11x+25 \geq 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \geq \frac{11+\sqrt{21}}{2} (=7.79\ldots).$$

Άρα: $D = \left[\frac{11+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$.

Παράδειγμα 2. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{6x^7-3x^2-2x-1}{6x^7-2x^2-5x+1} = 1. \qquad \textbf{(1)}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι:
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 6x^7-2x^2-5x+1 \neq 0\right\}$. Για κάθε $x \in D$, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow 6x^7-3x^2-2x-1 = 6x^7-2x^2-5x+1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$$
$$\Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=2).$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, ο αριθμός 1 δεν ανήκει στο σύνολο D, ενώ το 2 ανήκει. Άρα, η δοσμένη εξίσωση έχει τη μοναδική ρίζα x=2.

Σχόλιο. Το σύνολο ορισμού D της εξίσωσης αυτής δεν μπορούμε να το βάλουμε υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, γιατί δεν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $6x^7-2x^2-5x+1=0$. Εντούτοις, όπως είδαμε, αυτό δεν μας εμπόδισε να λύσουμε την δοσμένη εξίσωση.

<u>Δεύτερος τρόπος. Με συνεπαγωγές και επαλήθευση .</u>

Μερικές φορές, όταν θέλουμε να επιλύσουμε μια εξίσωση: f(x)=g(x), είναι δύσκολο να εφαρμόσουμε τα θεωρήματα ισοδυναμιών, για να έχουμε κάθε φορά ένα σύστημα σχέσεων ισοδύναμο με την αρχική εξίσωση. Στις περιπτώσεις αυτές εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της D.
- Μετά λέμε: « Έστω ότι $\rho \in D$ είναι μια λύση της δοσμένης εξίσωσης f(x)=g(x)». Τότε, θα έχουμε την ισότητα $f(\rho)=g(\rho)$ και με συνεπαγωγές βρίσκουμε το ρ. Αν δεν βρούμε κανένα ρ (φθάσουμε σε άτοπο) τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν βρούμε μια ή περισσότερες τιμές του ρ, έστω: $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$, τότε **θα ήταν λάθος να σταματήσουμε εδώ και να πούμε ότι αυτές είναι οι ζητούμενες λύσεις της εξίσωσης, γιατί από πουθενά δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν την εξίσωση.** Στη συνέχεια, θα πρέπει να εξετάσουμε ποιοι από τους αριθμούς αυτούς $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$ επαληθεύουν την εξίσωση. Όσοι, από τους αριθμούς αυτούς, την επαληθεύουν είναι οι ζητούμενες λύσεις. Αν κανένας δεν την επαληθεύει, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

— Στην πράξη λέμε: «Έστω ότι $x \in D$ είναι μια λύση της εξίσωσης κτλ.»
(δηλαδή, αντί το ρ. ή άλλο γράμμα, χρησιμοποιούμε το ίδιο το x και θεωρούμε την εξίσωση σαν μια ισότητα που ισχύει).
Σημείωση 6. Εκ πρώτης όψεως ο τρόπος αυτός φαίνεται να είναι ευκολότερος από τον προηγούμενο, γιατί δεν προσέχουμε ώστε κάθε φορά να έχουμε ισοδύναμο σύστημα σχέσεων με την δοσμένη εξίσωση. Στην πράξη όμως συχνά συναντάμε δυσκολίες όταν πάμε να κάνουμε την επαλήθευση. Για παράδειγμα δεν είναι και τόσο εύκολο να ελέγξουμε αν ο αριθμός $x=\frac{7}{2}\sqrt{\frac{45}{48}}$ είναι ή όχι ρίζα της εξίσωσης:

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=7.$$

Παράδειγμα 3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu^7 x+\eta\mu^4 x=1. \qquad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Έστω ότι $x\in\mathbb{R}$ είναι μια λύση τις εξίσωσης αυτής. Βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\sigma\upsilon\nu^7 x\le\sigma\upsilon\nu^2 x \quad (2) \text{ και } \eta\mu^4 x\le\eta\mu^2 x \quad (3)$$

Αν σε μια τουλάχιστο από τη σχέσεις (2) και (3) ισχύει η ανισότητα τότε προσθέτοντας αυτές κατά μέλη θα είχαμε: $\sigma\upsilon\nu^7 x+\eta\mu^4 x<1$**,** άτοπο λόγω της (1).
Άρα:

$$\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^7 x=\sigma\upsilon\nu^2 x \text{ και}\\ \eta\mu^4 x=\eta\mu^2 x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu^5 x-1)=0 \text{ και}\\ \eta\mu^2 x(\eta\mu^2 x-1)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\left(\sigma\upsilon\nu x=0 \text{ ή συνx=1}\right) \text{ και}\\ \left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\sigma\upsilon\nu^2 x=0\end{cases}\Rightarrow\left(\sigma\upsilon\nu x=0 \text{ ή συνx=1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi \;\; \acute{\eta} \text{ x=}2\kappa\pi, \text{ όπου κ}\in\mathbb{Z}\right)$$

Αντιστρόφως. Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί: $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ και $x=2\kappa\pi$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, επαληθεύουν την δοσμένη εξίσωση και άρα αυτοί είναι οι ζητούμενες λύσεις.
Παράδειγμα 4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{2x-1}{3}. \qquad (1)$$

(Υπενθυμίζουμε ότι: **Με** $\alpha\in\mathbb{R}$**,το σύμβολο [α]- ακέραιο μέρος του α- παριστάνει τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό, ο οποίος δεν υπερβαίνει τον α. Για κάθε** $\alpha\in\mathbb{R}$**, ισχύει:** $\alpha-1<[\alpha]\le\alpha$**.** Περισσότερα βλέπε στο άρθρο μου στο mathematica -Φάκελος του καθηγητή. Άλγεβρα- με τίτλο : **«ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ»).**
Λύση. Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Έστω ότι $x\in\mathbb{R}$ είναι μια λύση τις εξίσωσης αυτής. Τότε, από την (1) έπεται ότι $\frac{2x-1}{3}\in\mathbb{Z}$. Θέτουμε:

$\frac{2x-1}{3}=k$, οπότε $k\in\mathbb{Z}$ και $x=\frac{3k+1}{2}$. Αντικαθιστώντας στην(1) βρίσκουμε ότι: $\left[\frac{3k+2}{2}\right]=k$. Έτσι έχουμε:

$\frac{3k+2}{2}-1<\left[\frac{3k+2}{2}\right]\le\frac{3k+2}{2}\Rightarrow\frac{3k+2}{2}-1<k\le\frac{3k+2}{2}\Rightarrow...\Rightarrow -2\le k<0\Rightarrow$(k$=-2$ ή k$=-1$).

Με k$=-2$ βρίσκουμε: x$=-\frac{5}{2}$ και με k$=-1$ βρίσκουμε: x$=-1$.

Αντιστρόφως. Όπως βρίσκουμε εύκολα ,οι τιμές x$=-\frac{5}{2}$ και x$=-1$, που βρήκαμε, επαληθεύουν την δοσμένη εξίσωση.

- Άρα, οι ζητούμενες λύσεις είναι: x$=-\frac{5}{2}$ και x$=-1$

Σημείωση 7. Πολλές φορές ,για να διατηρήσουμε τις ισοδυναμίες σε μια εξίσωση, εφαρμόζουμε την εξής πρόταση:

<u>Πρόταση.</u> Αν (Σ) είναι μια σχέση ή ένα σύστημα σχέσεων και για τις σχέσεις: $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_\nu$ ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$(\Sigma)\Rightarrow\sigma_1,(\Sigma)\Rightarrow\sigma_2,...,(\Sigma)\Rightarrow\sigma_\nu, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}(\Sigma)\\ \sigma_1\\ \sigma_2\\ .\\ .\\ .\\ \sigma_\nu\end{cases}$$

Με άλλα λόγια: **« Κάθε σχέση (ή σύστημα σχέσεων) ισοδυναμεί με τον εαυτόν της μαζί με όποιες και όσες σχέσεις θέλουμε από εκείνες που συνεπάγονται από τη σχέση αυτή».**

Απόδειξη. Έστω ότι οι σχέσεις του(Σ) είναι αληθείς. Τότε, λόγω των συνεπαγωγών (1), κάθε μία από τις σχέσεις$\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_\nu$ είναι αληθής. Το αντίστροφο είναι προφανές.

Παράδειγμα 5. « Να λυθεί η εξίσωση: $z^7.\bar{z}^3=1$ με σύνολο αναφοράς το σύνολο$\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών» (Σχολικό βιβλίο Γ τάξης Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης σελίδα 122 άσκηση 5)

Λύση. Το σύνολο ορισμού και δοσμένης εξίσωσης είναι το σύνολο$\mathbb{C}$. Έχουμε, για κάθε $z\in\mathbb{C}$:

$$z^7.\bar{z}^3=1\Leftrightarrow\begin{cases}z^7.\bar{z}^3=1\\ \left|z^7.\bar{z}^3\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^4.z^3.\bar{z}^3=1\\ |z|^{10}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^4.|z|^6=1\\ |z|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^4=1\\ |z|=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\text{z=1 ή z=-1 ή z=i ή z=-i}\right).$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: z=1 , z=-1 , z=i και z=-i.

Σχόλιο. Το σχολικό βιβλίο στις λύσεις (σελίδα 105 α΄ τρόπος) διακόπτει τις ισοδυναμίες με τη λέξη «Επομένως» που σημαίνει : «Συνεπάγεται». Έτσι όμως όλες οι ισοδυναμίες που γράφει θα έπρεπε να είναι συνεπαγωγές και στο τέλος να επαληθεύσει αν οι αριθμοί που βρήκε επαληθεύουν την δοσμένη εξίσωση. Γιατί αυτό δεν συνάγεται από πουθενά, αφού οι ισοδυναμίες διακόπτονται (βλέπε άρθρο μου στο mathematica -φάκελος του καθηγητή, Μαθηματική απόδειξη και λογική - με τίτλο : « **ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΑΛΛΑ ΠΟΛΥ ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ»).**

11. Παραμετρικές εξισώσεις. Διερεύνηση.

Μια εξίσωση λέμε ότι είναι **παραμετρική εξίσωση** αν, και μόνο αν, εκτός από τον άγνωστο x περιέχει και άλλα γράμματα (ένα ή περισσότερα), τα οποία όμως υποθέτουμε ότι παριστάνουν δοσμένους αριθμούς. Τα γράμματα αυτά ονομάζονται **παράμετροι** της εξίσωσης.

• Η διαδικασία με την οποία, για κάθε σύστημα τιμών των παραμέτρων, βρίσκουμε αν υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης και πόσες και, αν είναι δυνατόν, και ποιες είναι, ονομάζεται **διερεύνηση** της εξίσωσης αυτής.

— Όταν μια εξίσωση είναι παραμετρική στη λύση της συμπεριλαμβάνεται και η διερεύνηση.

Παράδειγμα. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \lambda}} = \lambda \qquad \textbf{(1)}$$

με άγνωστο το x και παράμετρο το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού τις εξίσωσης είναι:

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x + \lambda \geq 0 \text{ και } x + \sqrt{x + \lambda} \geq 0\right\}$. Παρατηρούμε ότι αν λ<0, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\lambda \geq 0$. Για κάθε $x \in D$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x + \lambda} = \lambda^2 \Leftrightarrow \sqrt{x + \lambda} = \lambda^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - x \geq 0 \\ x + \lambda = (\lambda^2 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \lambda^2 \\ x^2 - (2\lambda^2 + 1)x + \lambda^4 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \lambda^2 \\ \left(x = \lambda^2 + \lambda + 1 \text{ ή } x = \lambda^2 - \lambda\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leq \lambda^2 \\ x = \lambda^2 + \lambda + 1 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} x \leq \lambda^2 \\ x = \lambda^2 - \lambda \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \lambda^2 + \lambda + 1 \leq \lambda^2 \\ x = \lambda^2 + \lambda + 1 \end{cases} \text{ή} \begin{cases} \lambda^2 - \lambda \leq \lambda^2 \\ x = \lambda^2 - \lambda \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda^2 - \lambda \text{ (γιατί } \lambda \geq 0\text{)}.$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, για κάθε $\lambda \geq 0$ οι αριθμοί που βρήκαμε $x = \lambda^2 - \lambda$ ανήκουν στο σύνολο ορισμού D.

• Συνεπώς, η δοσμένη εξίσωση:

Για κάθε $\lambda < 0$ είναι αδύνατη και για κάθε $\lambda \geq 0$ έχει τη λύση $x = \lambda^2 - \lambda$.

12. Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια.

1) Το σύμβολο της ισότητας στις εξισώσεις.

Κατά τη γνώμη μου το πιο αποτυχημένο σύμβολο στα Μαθηματικά είναι το σύμβολο της ισότητας στις εξισώσεις. Γιατί γράφουμε = διαβάζουμε «ίσον», αλλά στις εξισώσεις το = που γράφουμε δεν έχει την έννοια της ισότητας όπως την ξέρουμε στα μαθηματικά. Ούτε έχει τις ιδιότητες αυτού. Οι εξισώσεις δεν είναι ισότητες. **Το = σε μια εξίσωση f(x)=g(x) ούτε ισχύει ούτε ζητείται να αποδειχθεί. Οι εξισώσεις δεν είναι ισότητες συναρτήσεων.** Αυτό πρέπει να τονίζεται ιδιαίτερα στους μαθητές ώστε να μην αντιμετωπίζουν τις εξισώσεις σαν ισότητες και όταν έχουν να λύσουν μια εξίσωση, να μην λένε, για παράδειγμα, « παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη», δηλαδή να μην θεωρούν ότι τα δύο μέλη μιας εξίσωσης είναι ίσες συναρτήσεις κτλ..

Ένας τρόπος για να εμπεδώσουν οι μαθητές την έννοια της εξίσωσης είναι να γράφουμε τις εξισώσεις ως εξής:

$$f(x)\overset{?}{=}g(x).$$

Ίσως αυτό να είναι κουραστικό. Συμφωνώ. Τουλάχιστον όμως ας τις γράφουμε στην αρχή έτσι έως ότου καταλάβουν οι μαθητές περί τίνος πρόκειται. Εγώ αυτό έκανα στα μαθήματά μου και μπορώ να πω με επιτυχία.

2) Το σύμβολο της ισοδυναμίας στις εξισώσεις.

Επισημαίνουμε ότι, το σύμβολο της ισοδυναμίας «$\Leftrightarrow$» έχει άλλη έννοια όταν το γράφουμε μεταξύ δύο προτάσεων και άλλη όταν το γράφουμε μεταξύ δύο εξισώσεων.

• Δεν είναι σωστό να προσπαθούμε να μάθουμε τους μαθητές, οποιασδήποτε τάξης, να λύνουν εξισώσεις χωρίς να τους έχουμε πει πότε δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες, γράφοντας την μία κάτω από την άλλη. Γιατί, κατ' αυτόν τον μηχανικό τρόπο, οι μαθητές δεν ξέρουν τι σχέση πρέπει έχει κάθε μια εξίσωση που γράφουν με την προηγούμενη. Έτσι, ένας μαθητής μπορεί να σκεφτεί να πολλαπλασιάσει και τα δύο μέλη της εξίσωσης, για παράδειγμα, με $x-2$ ή να απλοποιήσει με $x-2$ (αν είναι παράγοντας και στα δύο μέλη) ή, ακόμα χειρότερα, να γράψει μια δική του εξίσωση, άσχετη με την προηγούμενη!!! Γιατί όχι; Αφού κανένας δεν του έχει πει ποια σχέση πρέπει να έχει η εξίσωση που θα γράψει με την προηγούμενη. Ο ορισμός της ισοδυναμίας δύο εξισώσεων είναι πολύ απλός και μπορεί εύκολα να κατανοηθεί από ένα μαθητή, οποιασδήποτε τάξης. Δεν υπάρχει λοιπόν καμία δικαιολογία να διδάσκονται οι εξισώσεις κατά αυτόν το μηχανικό και λανθασμένο τρόπο, τον οποίο, δυστυχώς, βλέπουμε και σε σχολικά βιβλία .

3) Το σύνολο αναφοράς στις εξισώσεις.

Στην επίλυση μιας εξίσωσης παίζει πρωτεύοντα ρόλο το σύνολο αναφοράς της. Για παράδειγμα:

•Η εξίσωση $x^2=5$, με σύνολο αναφοράς το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ είναι αδύνατη. Με σύνολο αναφοράς το σύνολο των πραγματικών θετικών αριθμών $\mathbb{R}_+^*$ έχει τη μοναδική λύση $\sqrt{5}$. Με σύνολο αναφοράς το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις, τις $\sqrt{5}$ και $-\sqrt{5}$.

•Η εξίσωση: $(x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)=0$ με σύνολο αναφοράς το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών έχει τη μοναδική λύση: $x=1$. Ενώ, με σύνολο αναφοράς το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις, τις: $x=1$ και $x=\sqrt{3}$. Επίσης, με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{Z}$, η παραπάνω εξίσωση και η εξίσωση: $(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ είναι ισοδύναμες. Ενώ, με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$ δεν είναι ισοδύναμες.

4) Ταυτοτικές και αόριστες εξισώσεις.

• Έστω η εξίσωση: $\sqrt{x^3-x}=\sqrt{x-x^3}$. Όπως βρίσκουμε εύκολα, το σύνολο ορισμού της είναι: $D=\{-1,0,1\}$ και το σύνολο λύσεων είναι: $S=\{-1,0,1\}$. Άρα $S=D$ και συνεπώς η εξίσωση αυτή είναι ταυτοτική ως προς x (αλλά δεν έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή δεν είναι αόριστη).

• Έστω η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu x=1$. Το σύνολο ορισμού της είναι $D=\mathbb{R}$ και το σύνολο λύσεων είναι: $S=\{2\kappa\pi \mid \kappa\in\mathbb{Z}\}$. Άρα η εξίσωση αυτή είναι αόριστη (έχει άπειρες λύσεις, αλλά δεν είναι ταυτοτική ως προς x).

• Έστω η εξίσωση: $|x|=x$. Το σύνολο ορισμού της είναι $D=\mathbb{R}$ και το σύνολο λύσεων είναι: $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}=[0,+\infty)$. Άρα η εξίσωση αυτή είναι αόριστη (έχει άπειρες λύσεις, αλλά δεν είναι ταυτοτική ως προς x).

• Η εξίσωση: $0\cdot x=0$ είναι αόριστη και ταυτοτική ως προς x.

5) Σχετικά με το βαθμό μιας εξίσωσης.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, μιλάμε για βαθμό μιας εξίσωσης μόνο όταν η εξίσωση αυτή είναι ακέραια. Έτσι , δεν έχει νόημα να ρωτάμε ποίου βαθμού είναι, για παράδειγμα οι εξισώσεις: $\frac{x-3}{x+1}-\frac{1}{x}=3$, $\sqrt{x+3}-x=1$.

• Η πρώτη εξίσωση, στο σύνολο ορισμού της $D=\mathbb{R}-\{-1,0\}$, όπως βρίσκουμε εύκολα, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $2x^2+7x+1=0$, η οποία βεβαίως είναι δεύτερου βαθμού.

• Η επίλυση της δεύτερης εξίσωσης, στο σύνολο ορισμού της $D=[-3,+\infty)$, όπως βρίσκουμε εύκολα, ανάγεται στην επίλυση ενός συστήματος, το οποίο περιέχει μια εξίσωση δεύτερου βαθμού.

6) Εξαφάνιση του αγνώστου.

Όταν λύνουμε μια εξίσωση δεν πρέπει να εξαφανίζουμε τον άγνωστο x, γιατί **εξίσωση χωρίς άγνωστο δεν έχει νόημα** . Για παράδειγμα, είναι λάθος να γράφουμε:

$$2x-3=2x+1 \Leftrightarrow -3=1.$$

Το σωστό είναι:

$$2x-3=2x+1 \Leftrightarrow 2x-2x=3+1 \Leftrightarrow 0\cdot x=4 \text{ (αδύνατη)}.$$

7) Απορία ενός μαθητή.
Κάποτε ένας μαθητής με είχε ρωτήσει το εξής: « Γιατί όταν λύνουμε για παράδειγμα την εξίσωση: $(x-1)(x-2)=0$ λέμε ότι αυτή ισοδυναμεί με: $(x=1$ ή $x=2)$, ενώ όταν μας λένε ποιες είναι οι λύσεις της λέμε: $x=1$ και $x=2$ ». Δηλαδή η απορία του ήταν γιατί το «ή» τη δεύτερη φορά έγινε «και». Η απάντηση βέβαια είναι ότι όταν μας ρωτάμε ποιες είναι οι λύσεις μιας εξίσωσης, ουσιαστικά μας ρωτάνε ποια είναι τα στοιχεία του συνόλου λύσεων αυτής. Στο παράδειγμά μας ποια είναι τα στοιχεία του συνόλου $\{1,2\}$. Και η απάντηση φυσικά είναι 1 και 2. Γι' αυτό λέμε ότι οι λύσεις είναι: $x=1$ και $x=2$.

8) Άθροισμα συντελεστών 0.
Είναι χρήσιμο να επισημάνουμε ότι αν σε μία εξίσωση:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

ισχύει: $\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + ... + \alpha_1 + \alpha_0 = 0$, τότε (και αντιστρόφως) η εξίσωση αυτή έχει ρίζα τον αριθμό 1. Ειδικότερα, αν σε μια εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\alpha \neq 0$, ισχύει: $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε οι ρίζες της είναι 1 και $\frac{\gamma}{\alpha}$.

9) Ακέραιες εξισώσεις στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.
Η γενική μορφή των ακέραιων εξισώσεων στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, ν βαθμού, είναι:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad , \qquad (1)$$

όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ μιγαδικοί αριθμοί .με $\alpha_\nu \neq 0$.

Για τις εξισώσεις αυτές ισχύουν τα εξής θεωρήματα:

<u>**Θεώρημα 1**</u> **(D'Alembert-Gauss). Κάθε εξίσωση της μορφής (1), βαθμού $\nu \geq 1$ ($\alpha_\nu \neq 0$), έχει μία τουλάχιστον ρίζα (στο $\mathbb{C}$)**
(θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας).

<u>**Θεώρημα 2.**</u>**Κάθε εξίσωση της μορφής (1), βαθμού $\nu \geq 1$ ($\alpha_\nu \neq 0$), έχει το λιγότερο μια και το πολύ ν διαφορετικές ρίζες (στο $\mathbb{C}$).**

<u>**Θεώρημα 3.**</u>**Κάθε εξίσωση της μορφής (1), βαθμού $\nu \geq 1$ ($\alpha_\nu \neq 0$), έχει ν ακριβώς ρίζες (στο $\mathbb{C}$), με τη συνθήκη ότι κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές όσος είναι ο βαθμός πολλαπλότητας αυτής.**

10) Σχετικά με το βαθμό πολλαπλότητας μια ρίζας.
Ισχύουν τα παρακάτω θεώρημα, στα οποία f είναι μια πολυωνυμική μη μηδενική συνάρτηση και κ ένας φυσικός αριθμός με $\kappa \geq 2$:

<u>**Θεώρημα 1.**</u>

$$\begin{pmatrix} \rho \text{ απλή ρίζα} \\ \text{της f(x)=0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \text{ ρίζα της f(x)=0 και} \\ \text{ρ όχι ρίζα της f}'\text{(x)=0} \end{pmatrix}$$

<u>**Θεώρημα 2.**</u>

$$\begin{pmatrix} \rho \text{ ρίζα της f(x)=0} \\ \text{με βαθμό πολ/τος κ} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \text{ ρίζα της f(x)=0 και ρ ρίζα της} \\ \text{f}'\text{(x)=0 με βαθμό πολ/τος κ-1} \end{pmatrix}$$

<u>Θεώρημα 3.</u>

$$\begin{pmatrix} \rho \text{ ρίζα της f(x)=0} \\ \text{με βαθμό πολ/τος κ} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(\rho)=f'(\rho)=f''(\rho)=...=f^{(\kappa-1)}(\rho)=0 \\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{f}^{(\kappa)}(\rho)\neq 0 \end{pmatrix}$$

- Σύμφωνα με τους ορισμούς που έχουμε δώσει παραπάνω, ο βαθμός πολλαπλότητας μιας ρίζας έχει νόημα μόνο για τις ακέραιες (πολυωνυμικές) εξισώσεις (όπως και για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις). Σε προηγούμενα θεωρήματα χρησιμοποιήσαμε την έννοια αυτή.

Σημείωση 8. Ο Θ. Ν. Καζαντζής (1937-1999) στο βιβλίο του «ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ» (εκδόσεις Σπηλιώτη, Αθήνα 1994) στη σελίδα 122 γράφει σε μια σημείωση:

« Με βάση την παραπάνω πρόταση (εννοεί το παραπάνω θεώρημα 3, το οποίο έχει αναφέρει προηγουμένως) μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της πολ/λής ρίζας και σε συναρτήσεις όχι πολυωνυμικές. Συγκεκριμένα, συμφωνούμε να θεωρούμε ότι ο ρ είναι ρίζα της συνάρτησης f (κ τουλάχιστον φορές παραγωγίσιμης), βαθμού πολ/τας κ, τότε και μόνο, όταν είναι: $f(\rho)=f'(\rho)=...=f^{(\kappa-1)}(\rho)=0$ και $\mathrm{f}^{(\kappa)}(\rho)\neq 0$**».**

Στη συνέχεια (σελίδα 124) αποδεικνύει ότι ο αριθμός ρ=0 είναι διπλή ρίζα της συνάρτησης: $f(x)=x-\eta\mu x-(1-\sigma\upsilon\nu x)$.

11. Σχετικά με τις διαδοχικές ρίζες μιας εξίσωσης.

Αν μια εξίσωση ή μια συνάρτηση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες δεν έχει πάντοτε νόημα να μιλάμε **για διαδοχικές ρίζες** αυτής ακόμα και αν οι ρίζες δεν αποτελούν διάστημα. Για παράδειγμα:

- Η εξίσωση: $|x|=x$ έχει σύνολο λύσεων το διάστημα $S=[0,+\infty)$ και άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για διαδοχικές ρίζες.
- Η εξίσωση f(x)=0, όπου $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{x}, & \text{αν x} \neq 0 \\ 0 & \text{, αν x=0} \end{cases}$ έχει σύνολο λύσεων:

$$S=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{\kappa\pi} \mid \kappa\in\mathbb{Z}^*\right\}.$$

Το σύνολο αυτό δεν είναι ένα διάστημα. Παρατηρούμε ότι η ρίζα 0 με καμία από τις άλλες δεν μπορούν να θεωρηθούν διαδοχικές, αφού μεταξύ τους υπάρχει πάντοτε άλλη ρίζα (παρατηρήστε ότι η συνάρτηση αυτή f είναι ορισμένη και συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Το παράδειγμα αυτό είναι από ένα μήνυμα στο mathematica του καθηγητή του πανεπιστημίου Κρήτης κ. Μιχάλη Λάμπρου).

12. Εξισώσεις και Μαθηματική Ανάλυση.

Η Μαθηματική Ανάλυση μας παρέχει τρόπους με τους οποίους, πολλές φορές , μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη πραγματικών ριζών μιας εξίσωσης (θεώρημα Bolzano, θεώρημα Rolle κτλ.). Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις , κατά τις οποίες μπορούμε να λύσουμε μια εξίσωση με τη βοήθεια των θεωρημάτων της Ανάλυσης.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^2\sqrt{x^4+1}+(2x-3)\sqrt{4x^2-12x+10}=0. \qquad (1)$$

Λύση. Όπως βρίσκουμε εύκολα, το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$(1)\Leftrightarrow x^2\sqrt{(x^2)^2+1}+(2x-3)\sqrt{(2x-3)^2+1}=0\,(2).$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο προσθετέοι του πρώτου μέλους της εξίσωσης αυτής, προκύπτουν από την συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$, θέτοντας, για τον πρώτο προσθετέο, όπου x το x^2 και για τον δεύτερο, όπου x το 2x-3. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι $1-1$.
Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή, δηλαδή ισχύει; $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$(2)\Leftrightarrow f(x^2)+f(2x-3)=0\Leftrightarrow f(x^2)=-f(2x-3)\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=f(-2x+3)$$

$$\Leftrightarrow x^2=-2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow (x=1\ \text{ή}\ x=-3).$$

Άρα, οι ρίζες της δοσμένης εξίσωσης είναι 1 και -3.

Παράδειγμα 2. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{x^2-2x+5}+x\ln x=x+1.$$

Λύση. Όπως βρίσκουμε εύκολα, το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι το $A=(0,+\infty)$. Έστω ότι $\rho\in A$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης αυτής, οπότε θα ισχύει:

$$\sqrt{\rho^2-2\rho+5}=\rho+1-\rho\ln\rho. \qquad (1)$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ και $g(x)=x+1-x\ln x$, με σύνολο ορισμού καθεμιάς το Α. Έτσι έχουμε, λόγω της (1):

$$f(\rho)=g(\rho). \qquad (2)$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο Α με:

$$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\begin{cases}>0, & \text{αν x>1}\\ =0, & \text{αν x=1}\\ <0, & \text{αν 0<x<1}\end{cases} \quad \text{και} \quad g'(x)=-\ln x\begin{cases}>0, & \text{αν 0<x<1}\\ =0, & \text{αν x=1}\\ <0, & \text{αν x>1}\end{cases}$$

Συμπεραίνουν ότι:

- Η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή στο x=1, ίση με f(1)=2 και άρα ισχύει $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in A$,με το = μόνο για x=1.
- Η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή στο x=1, ίση με g(1)=2 και άρα ισχύει $f(x)\leq 2$, για κάθε $x\in A$,με το = μόνο για x=1.

Έτσι έχουμε, λόγω και της (2):

$$2\leq f(\rho)=g(\rho)\leq 2\Rightarrow 2\leq f(\rho)\leq 2\Rightarrow f(\rho)=2\Rightarrow \rho=1.$$

Αντιστρόφως. Όπως βρίσκουμε εύκολα, ο αριθμός 1 είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης και άρα αυτός είναι η μοναδική της ρίζα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Θ. Ν. Καζαντζή: «ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ».
2. Σ. Γ. Κανέλλου: «ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ»
3. Α. Κ. Κυριακόπουλου: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ»
4. Α. Κ. Κυριακόπουλου: «ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ».
5. Α. Κ. Κυριακόπουλου: «ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ»
6. Π. Ν. Μάγειρα: «ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ».
7. Σχολικό βιβλίο Μαθηματικών, Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Γ΄ Λυκείου (έκδοση 2009).
8. V.V.Vavilov, I. I. Melnikov, S. N. Olekhnik, P. I. Pasichenko: «EQUATIONS AND INEQUALITIES».
9. G. Dorofeev, M. Potapov, N. Rozov: «ELEMENTARY MATHEMATICS».
10. John. M. H. Olmsted: «THE REAL NUMBER SYSTEM».
11. www.mathematica.gr

Αθήνα 15/11/2011