Πρώτοι & Σύνθετοι αριθμοί
(Prime & Composite numbers)

Μαθαίνω

- Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτες το 1 και τον εαυτό του.
- **Πρώτος** λέγεται κάθε φυσικός αριθμός διάφορος του 1 που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1.
  π.χ. οι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, 13,... είναι πρώτοι.
- **Σύνθετος** λέγεται κάθε φυσικός αριθμός διάφορος του 1 που δεν είναι πρώτος.
  π.χ. οι αριθμοί 4, 6, 8, 24,56,... είναι σύνθετοι.
- Όλοι οι πρώτοι αριθμοί, με εξαίρεση τον αριθμό 2, είναι περιττοί.[1]
  Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος.[2]
- Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.
- Υπάρχουν **άπειροι** πρώτοι αριθμοί (Ευκλείδης 365 – 275 π.Χ)
- Κάθε φυσικός αριθμός διάφορος από το 1 μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών (Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Αριθμών).
  π.χ. $24 = 2\cdot 12 = 2\cdot(2\cdot 6) = 2^2\cdot(2\cdot 3) = 2^3\cdot 3$

Αλγόριθμος ανάλυσης φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Για να αναλύσουμε ένα αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, βρίσκουμε διαδοχικά τους πρώτους αριθμούς που είναι διαιρέτες του και εκτελούμε διαδοχικά διαιρέσεις

Παράδειγμα

Να αναλυθεί ο αριθμός 90 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

ή

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Οπότε: $90 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 2\cdot 3^2\cdot 5$

---

[1] **Περιττός** λέγεται ένας φυσικός αριθμός που διαιρούμενος με το 2 αφήνει υπόλοιπο 1. Κάθε περιττός αριθμός α γράφεται στη μορφή:
$\alpha = 2\cdot\nu + 1$, όπου ν φυσικός αριθμός (Ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)

[2] **Άρτιος** λέγεται ένας φυσικός αριθμός που διαιρείται με το 2. Στους άρτιους αριθμούς συμπεριλαμβάνεται και ο αριθμός μηδέν. Κάθε άρτιος φυσικός αριθμός α γράφεται στη μορφή:
$\alpha = 2\cdot\nu$, όπου ν φυσικός αριθμός

Το Κόσκινο του Ερατοσθένη[3]

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

[3] Το **Κόσκινο του Ερατοσθένη** είναι ένας απλός αλγόριθμος για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών μέχρι έναν συγκεκριμένο ακέραιο.Να χρησιμοποιήσετε την εφαρμογή «Κόσκινο του Ερατοσθένη» στην ιστοσελίδα http://www.vex.net/~trebla/numbertheory/eratosthenes.html

1. **Κυκλώστε τον αριθμό 2 και στη συνέχεια διαγράψτε όλα τα πολλαπλάσιά του που είναι $\leq$ 300.**

2. **Επαναλάβετε τη διαδικασία για τον επόμενο πρώτο αριθμό, δηλαδή τον αριθμό 3.**

3. **Ο 1^{ος} αριθμός στη λίστα μετά το 3 είναι το 5, οπότε διαγράφουμε τα πολλαπλάσιά του.**

4. **Επαναλαμβάνετε τη διαδικασία για τους αριθμούς 7, 11, 13 & 17. Ο επόμενος αριθμός στη λίστα μετά το 17 είναι το 19, αλλά $19^2 = 361 > 300$ επομένως η διαδικασία τελείωσε.**

5. **Η τελική λίστα αποτελείται από όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι από 300.**

Παρατηρήσεις:

- Η διαγραφή των πολλαπλασίων κάθε πρώτου αριθμού που εντοπίζεται μπορεί να αρχίζει από το τετράγωνο του, μιας και τα μικρότερα πολλαπλάσια έχουν ήδη διαγραφεί σε προηγούμενα βήματα.

- Όταν θέλουμε τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το ν, αρκεί να διαγράψουμε τα πολλαπλάσια όλων των πρώτων αριθμών p, για τους οποίους ισχύει $p^2 < ν$. (Στο παράδειγμά μας p=17, διότι $17^2=289<300$)

- Ο κατάλογος των πρώτων αριθμών μας βοηθά να διαπιστώσουμε πως καθώς οι αριθμοί μεγαλώνουν οι πρώτοι αραιώνουν. Ποτέ όμως δεν τελειώνουν. Ποτέ η αραίωση δεν φτάνει στο μηδέν. Το ξεκαθάρισε ο Ευκλείδης τον τρίτο π.Χ αιώνα:

- **ΔΕΝ υπάρχει ο μέγιστος πρώτος αριθμός.**

- Υπάρχει τύπος που να δίνει τους πρώτους αριθμούς; (άλυτο πρόβλημα)

- Οι πρώτοι αριθμοί που διαφέρουν κατά 2 (διαδοχικοί περιττοί αριθμοί), όπως οι 3,5 , οι 5,7 , οι 1.000.037, 1.000.039 κλπ ονομάζονται δίδυμοι. Υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι αριθμοί; (άλυτο πρόβλημα)

- Μέχρι τον **Σεπτέμβριο** του **2010**, ο **μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός** είναι ο: $\mathbf{2^{43.112.609} - 1}$. Ο αριθμός αυτός έχει **12.978.189** ψηφία (ο πρώτος

πρώτος αριθμός με πάνω από 10 εκατομμύρια ψηφία) και έχει την πρόσθετη ιδιότητα να είναι ο 45^{ος} **Μερσέν πρώτος** (Mersenne prime) που ανακαλύφθηκε. Ο 46^{ος} **Μερσέν πρώτος**, ο $\mathbf{2^{37.156.667} - 1}$, ανακαλύφθηκε δύο βδομάδες αργότερα είναι πρώτος, αλλά μικρότερος. Στο πρόσφατο παρελθόν, όλοι οι πρώτοι που ανακαλύφθηκαν ήταν **Μερσέν πρώτοι.**

- Στα **μαθηματικά** πρώτος Μερσέν ονομάζεται ένας **πρώτος αριθμός** της μορφής $\mathbf{2^p - 1}$. Ο νιοστός πρώτος αυτής της μορφής συμβολίζεται με $\mathbf{M_\nu}$. Οι αριθμοί αυτοί ονομάστηκαν έτσι προς τιμή του γάλλου θεολόγου και μαθηματικού **Μαρέν Μερσέν**.

- Όλοι οι πρώτοι αριθμοί στο **δεκαδικό σύστημα**, εκτός του 2 και του 5, έχουν ως τελευταίο ψηφίο ένα από τα 1, 3, 7 ή 9, διότι οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0, 2, 4, 6 και 8 είναι πολλαπλάσια του 2 ενώ οι αριθμοί που τελειώνουν σε 0 ή 5 είναι πολλαπλάσια του 5.

Οι εικασίες του Γκόλντμπαχ

- Είναι πολύ γνωστή η πρώτη **εικασία** που διατύπωσε ο **Κρίστιαν Γκόλντμπαχ**[4] **1690-1764**, η οποία σχετίζεται με τους πρώτους αριθμούς. Ο Γκόλντμπαχ υποστήριξε οτι **κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2, μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο πρώτων αριθμών**. Η απόδειξη της παραπάνω εικασίας ταλανίζει ακόμα και σήμερα τους **μαθηματικούς**, καθώς παράλληλα οι υπολογιστές επιβεβαιώνουν την εικασία για όλο και μεγαλύτερους αριθμούς. Το **1998**, η εικασία επιβεβαιώθηκε για αριθμούς μέχρις και της τάξης του $\mathbf{10^{14}}$.

- Η δεύτερη εικασία του Γκόλντμπαχ έγκειται στο ότι **κάθε περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 6 είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών**. Και αυτή η εικασία παραμένει αναπόδειχτη, αν και επιβεβαιώνεται από ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Τυχόν απόδειξη της πρώτης εικασίας του Γκόλντμπαχ θα αποδείκνυε αμέσως και τη δεύτερη εικασία.

[4] Σχετική βιβλιογραφία: «Ο θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ» του Απόστολου Δοξιάδη, Εκδόσεις ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ.