

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

ΤΑΞΗ : Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών

Μονάδες 9

A2. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα (1-1);

Μονάδες 5

A3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 3h)] = 0$

Μονάδες 5

A5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις :

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 3$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 3$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -3$ γ) Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α, β) τότε το σύνολο τιμών της f είναι $(f(\alpha), f(\beta))$ Μονάδες $2 \times 3 = 6$ Θέμα ΒΔίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1} = 5$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται απότο σημείο $M(0,3)$.B1. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \sqrt{x^2 + 3}}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 10

B3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x) = x^2 - 1$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Μονάδες 10

Θέμα Γ

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} για την οποία ισχύει $2 + f(2) \cdot i = \frac{7 + f(1) \cdot i}{2 - i}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(2) = 3$ και $f(1) = 4$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι υπάρχει η f^{-1}

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(|x|+1)-x) - f(2-x) < 0$

Μονάδες 7

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(e^x + 2012x + 2) = 2$

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $|2z - 3i| = |6z - i|$ και η συνάρτηση $f(x) = |z|^x + e^{1-x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $|z| = \frac{1}{2}$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

Μονάδες 6

Δ3. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο \mathbb{R}

Μονάδες 7

Καματερό 9 Ιανουαρίου 2012

Οι Καθηγητές

Σεφερλής Γεώργιος

Ιωαννίδης Νικόλαος

Ρέγκλης Δημήτριος