Διαφορικός Λογισμός

Γ Λυκείου

Παράγωγοι & Εξισώσεις

Κωνσταντίνος Γεωργίου

Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Ο Ι & Ε Ξ Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ

➢ ΧΡΗΣΙΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- ✓ **ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO:** Αν f συνεχής στο [α, β] και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε *η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα* στο (α,β).

- ✓ **ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE:** Αν f συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε *η εξίσωση f΄(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β).*

- ✓ **ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ:** Αν f συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε *η εξίσωση*
$$f'(x)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$
έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β).

- ✓ **ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ:** Αν f συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε *η εξίσωση f(x) = κ, όπου f(α) < κ < f(β), έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).*

❑ Σε συνδυασμό με το

- ✓ **ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ/ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ:** Αν f συνεχής στο [α, β] και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f, τότε *η εξίσωση f(x) = κ,* όπου $m\le k\le M$ *, έχει τουλάχιστον μια λύση στο [α, β].*

➢ ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

- **Κάθε πολυωνυμική εξίσωση** *περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.*
- **Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση** *έχει το πολύ μια ρίζα.*
- **Αν $f\ /\ A$ και $f(A)$ το σύνολο τιμών της, τότε αν το $0\in f(A)$, η εξίσωση f(x) = 0** *έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο Α,* **ενώ αν $0\notin f(A)$, η εξίσωση είναι** *αδύνατη.*
- **Σύμφωνα με το Θ. Rolle, μεταξύ δύο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης,** *υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.*

➢ ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

(1η): Ν.Δ.Ο. η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β)

→ **Εφαρμόζουμε το *Θ. Bolzano*.**
Αν αυτό δεν είναι δυνατό, εφαρμόζουμε το *Θ. Rolle* για την συνάρτηση F, που είναι τέτοια ώστε: $F' = f$ (F: παράγουσα της f).

→ **Η ύπαρξη της ρίζας μπορεί να αποδειχτεί και με την βοήθεια του συνόλου τιμών της f, εφόσον το $0 \in f(A)$.**

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: **Για να βρούμε το $f(A)$ θα πρέπει να γνωρίζουμε τη μονοτονία της f.**

Π.χ.
Αν f συνεχής και $x+1 \le f(x) \le e^x$ (1) για κάθε $x \in \Re$ ν.δ.ο. η εξίσωση: $f(x) = e^2 \cdot x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση
→ **Θέτουμε $g(x) = f(x) - e^2 \cdot x,\ x \in \mathbb{R}$.**
→ **Από την (1) προκύπτει ότι: $x+1 \le f(x) \le e^x \Leftrightarrow x+1-e^2 \cdot x \le f(x) - e^2 \cdot x \le e^x - e^2 \cdot x \Leftrightarrow$**
$x+1-e^2 \cdot x \le g(x) \le e^x - e^2 \cdot x$ (2)
→ **Για χ = 1, από την (2) έχουμε: $2-e^2 \le g(1) \le e - e^2$, άρα: $g(1) < 0$**
→ **Για χ = 0, από την (2) έχουμε: $1 \le g(0) \le 1$, άρα: $g(0) = 1 > 0$**
→ **Επομένως: $g(0) \cdot g(1) < 0$ και g συνεχής στο $[0,1]$, άρα από το Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1), άρα και στο $\mathbb{R}$ για την εξίσωση: $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^2 \cdot x$.**

Π.χ.
Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^3 - x \cdot \eta\mu x + 10^5 = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση
→ **Έστω $f(x) = x^3 - x \cdot \eta\mu x + 10^5,\ x \in \mathbb{R}$.**

→ **Τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x^2} + \frac{10^5}{x^3}\right) = (-\infty)(1-0+0) = -\infty$**
Άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1) < 0$ (1).

→ **Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_2) > 0$ (2).**

→ **Από (1), (2) είναι $f(x_1) \cdot f(x_2) \prec 0$ και f : συνεχής στο $[x_1, x_2]$. Άρα από το Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) άρα και στο $\mathbb{R}$ για την $f(x) = 0$.**

Π.χ.

Αν $f(x)=\frac{x^3}{16}-\eta\mu\pi\chi+7,\ \ x\in[-4,4],$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{7}{2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-4,4).

Λύση

→ **f συνεχής στο [-4,4], ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.**

→ $f(-4)=\frac{-64}{16}-\eta\mu(-4\pi)+7=-4+7=3$

→ $f(4)=\frac{64}{16}-\eta\mu 4\pi+7=4+7=11$

→ **Σύμφωνα με το Θ. Ενδιαμέσων τιμών επειδή $f(-4)<\frac{7}{2}<f(4)$ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(-4,4): f(x_o)=\frac{7}{2}$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=\frac{7}{2}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (-4,4).**

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: **Η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να λυθεί εφαρμόζοντας Θ. Bolzano στη συνάρτηση $g(x)=\frac{x^3}{16}-\eta\mu\pi\chi+7-\frac{7}{2}$, στο [-4,4].**

Π.χ.

Δείξτε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $5\chi^4-8\chi^3-\lambda\chi+\lambda=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,2).

Παρατήρηση:

Εξετάζουμε αν το Θ. Bolzano εφαρμόζεται για την $f(x)=5\chi^4-8\chi^3-\lambda\chi+\lambda$ στο [0, 2].
Είναι: $f(0)\cdot f(2)=\lambda\cdot(16-\lambda)$, που για κάποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι θετικό και για άλλες αρνητικό, άρα δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano.

Έτσι εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την $F(x)=x^5-2x^4-\frac{\lambda}{2}x^2+\lambda\chi$,

όπου : $F\rightarrow$ παράγουσα της f $(F'=f)$.

Λύση

Έστω $F(x)=x^5-2x^4-\frac{\lambda}{2}x^2+\lambda\chi,\ \ x\in[0,2]$

Τότε F : συνεχής στο [0, 2], ως πολυωνυμική.
F : παραγωγίσιμη στο (0, 2) ως πολυωνυμική.

$$\left.\begin{array}{l}F(0)=0\\ F(2)=0\end{array}\right|\Rightarrow F(0)=F(2).$$

Άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle η εξίσωση $F'(x)=0\Leftrightarrow 5x^4-8x^3-\lambda\chi+\lambda=0$, έχει τουλάχιστον μία λύση στο (0, 2).

($2^{η}$): Ν.Δ.Ο. η εξίσωση f(x) = 0 έχει το πολύ μια ρίζα στο (α, β)

→ **Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνήσια μονότονη στο (α, β). Αν αυτό δεν είναι εφικτό, υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει 2 ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$ στο (α, β) με $ρ_1<ρ_2$, οπότε με τη βοήθεια του Θ. Rolle καταλήγουμε σε άτοπο!! (** ***άτοπο – Rolle*** **).**

Π.χ.

Δείξτε ότι η εξίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 7x-3$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω: $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x - 7x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

Για $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{3} - 7<0$, άρα $f:\ \downarrow$ *στο* $\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Π.χ.

Δείξτε ότι η εξίσωση: $2x^3+3ax^2+6a^2x+\beta=0,\ a\neq 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

- **Έστω: $f(x)=2x^3+3ax^2+6a^2x+\beta,\ x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6x^2+6ax+6a^2$.**
- **Υποθέτουμε πως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $ρ_1$, $ρ_2$ με $ρ_1<ρ_2$. Τότε $f(ρ_1) = f(ρ_2) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[ρ_1, ρ_2]$, άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+6ax+6a^2=0$ θα έπρεπε να έχει ρίζα στο $(ρ_1, ρ_2)$, άτοπον, αφού $Δ = -3α^2 < 0$.**

($3^{η}$): Ν.Δ.Ο. η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο (α , β)

→ **Αποδεικνύουμε ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα ($1^{η}$ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ) και μετά ότι έχει το πολύ μια ρίζα ($2^{η}$ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ).**

Π.χ.

Ν.Δ.Ο. η εξίσωση: $\ln x + 2x = 0$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Λύση

→ **Έστω: $f(x) = \ln x + 2x,\ \ x > 0$**

→ **Για $x > 0: f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$, άρα $f:\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.**

Τότε: $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty,\ +\infty) = \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι το $0 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,+\infty)$ που θα είναι <u>μοναδική</u> διότι $f:\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

Π.χ.

Ν.Δ.Ο. η εξίσωση: $x \cdot e^x = 2$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1).

Λύση

→ **Έστω $f(x) = x \cdot e^x - 2,\ \ x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού και στο [0,1], όπου**

$f(0)\cdot f(1) = -2\cdot(e-2) < 0$, έτσι σύμφωνα με το Θ. Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο (0,1)

→ **Για $x \in (0,1): f'(x) = e^x \cdot (x+1) > 0$, άρα $f:\uparrow$ στο [0,1]**

Οπότε θα έχει το πολύ μια ρίζα σ' αυτό και επειδή έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1) αυτή είναι και μοναδική!!

Π.χ.

Ν.Δ.Ο. η εξίσωση $x \cdot e^x = 2$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω: $\underline{f(x) = x \cdot e^x - 2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = e^x + x\cdot e^x = e^x\cdot(x+1)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -1}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	-2	$\searrow$	min $-\frac{1}{e}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

• **Για χ = -1 η f παρουσιάζει ελάχιστο, το** $f(-1)=-\frac{1}{e}-2<0$.

• **Βρίσκουμε τις οριακές τιμές της f στο** $\pm\infty$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^x-2)=(+\infty)\cdot(+\infty)-2=+\infty.$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^x-2\right)=-2.$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\cdot e^x\overset{(-\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\frac{1}{e^x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{e^x}{\left(e^x\right)^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1}{e^x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=-0=0.$$

Τότε αν:

$$\Delta_1=\left(-\infty,-1\right]\to f\left(\Delta_1\right)=\left[-\frac{1}{e}-2,-2\right]$$

$$\Delta_2=\left[-1,+\infty\right)\to f\left(\Delta_2\right)=\left[-\frac{1}{e}-2,+\infty\right)$$

Παρατηρούμε ότι το $0\notin f(\Delta_1)$, **άρα η εξίσωση** $f(x)=0$, **δεν έχει ρίζα στο** Δ_1. **Επίσης το** $0\in f(\Delta_2)$, **άρα η εξίσωση** $f(x)=0$ **έχει ρίζα στο** Δ_2 **και μάλιστα μοναδική αφού:** $f\uparrow$ **στο** Δ_2.

(4η): Ν.Δ.Ο η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστο κ ρίζες στο (α, β)

→ **Χωρίζουμε το (α, β) σε κ διαστήματα και εφαρμόζουμε την «μεθοδολογία» της 1ης ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ ΣΕ ΚΑΘΕΝΑ ΑΠΟ ΑΥΤΑ.**

($5^{η}$): Ν.Δ.Ο η εξίσωση f (x) = 0 έχει το πολύ κ ρίζες στο (α, β)

→ **Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει (κ+1) ρίζες στο (α, β) και με διαδοχικές εφαρμογές του Θ. Rolle καταλήγουμε σε άτοπο! (άτοπο – Rolle).**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το παραπάνω θέμα μπορεί να αντιμετωπισθεί με την βοήθεια της μονοτονίας της f.

☼ **Ειδικότερα αν f: πολυωνυμική συνάρτηση κ – βαθμού, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ κ – ρίζες.**

Π. χ.

Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x^2 + x + 3$ έχει το πολύ τρείς άνισες ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = e^x - x^2 - x - 3,\ x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε πως η εξίσωση

$f(x)=0$ έχει τέσσερις ρίζες τις $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, οπότε: $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = f(\rho_4) = 0$.

Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$.

Τότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα :

$[\rho_1, \rho_2],\ [\rho_2, \rho_3],\ [\rho_3, \rho_4]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2),\ \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3),\ \xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$

ώστε: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$, όπου $f'(x) = e^x - 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$

Αντίστοιχα η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα:

$[\xi_1, \xi_2],\ [\xi_2, \xi_3]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $x_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ ώστε: $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$

όπου $f''(x) = e^x - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Τέλος η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει

$x_0 \in (x_1, x_2)$: $f^{(3)}(x_0) = 0$ άτοπον, διότι $f^{(3)}(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $f(x) = 0$

έχει το πολύ τρείς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(6η): Ν.Δ.Ο η εξίσωση f(x) = 0 έχει κ ρίζες στο (α ,β)

→ **Εφαρμόζουμε την μεθοδολογία της 4ης και της 5ης κατηγορίας .**

Π.χ.

Να δειχτεί ότι η εξίσωση: $x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ **έχει ακριβώς δύο ρίζες στο** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, **η οποία είναι συνεχής στα διαστήματα** $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, **με** $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$,

άρα $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0) < 0$ **και** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0) < 0$. **Έτσι σύμφωνα με το Θ. Bolzano, η** f **έχει από μια τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα:** $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ *και* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, **άρα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο** $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$: $f'(x) = x\cdot(2-\sigma\upsilon\nu x)$. **Τότε:** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, **διότι** $\sigma\upsilon\nu x \neq 2$.

χ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f :\downarrow$ **στο** $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, **οπότε η** $f(x) = 0$ **έχει το πολύ μια ρίζα σ' αυτό.**

Για $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f :\uparrow$ **στο** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **οπότε η** $f(x) = 0$ **έχει το πολύ μια ρίζα σ' αυτό.**

Έτσι η f έχει το πολύ 2 ρίζες στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ **και επειδή έχει τουλάχιστον δύο ρίζες αυτές θα είναι μοναδικές.**

(7η): Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της f(x) = 0

→ **Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολής της f και με την βοήθεια των συνόλων τιμών των επιμέρους διαστημάτων στα οποία χωρίζεται το πεδίο ορισμού της f προσδιορίζουμε το πλήθος των ριζών της.**

Π. χ.

Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $3x^4+8x^3-6x^2-24x+5=0$.

Λύση

Έστω $f\left(x\right)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+5,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Για $x\in\mathbb{R}$: $f'\left(x\right)=12x^3+24x^2-12x-24$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-2\ \text{ ή }\ x=-1\ \text{ ή }\ x=1.$$

χ	- ∞		-2		-1		1		+ ∞
f ′(x)		–	0	+	0	–	0	+	
f(x)	+ ∞	↘	13 τ.ε	↗	18 τ.μ	↘	-14 τ.ε	↗	+ ∞

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=+\infty$

Αν: $\Delta_1=\left(-\infty,-2\right],\ \ \Delta_2=\left(-2,-1\right],\ \ \Delta_3=\left(-1,1\right],\ \ \Delta_4=\left(1,+\infty\right)$

Τότε: $f\left(\Delta_1\right)=\left[13,+\infty\right),\ f\left(\Delta_2\right)=\left(13,18\right],\ f\left(\Delta_3\right)=\left[-14,18\right),\ f\left(\Delta_4\right)=\left(14,+\infty\right)$

Παρατηρούμε ότι: το $0\notin f\left(\Delta_1\right)$ και $0\notin f\left(\Delta_2\right)$ οπότε η $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2. Όμως $0\in f\left(\Delta_3\right)$ οπότε η $f(x)=0$ έχει ρίζα στο Δ_3 και μάλιστα μοναδική αφού $f:\downarrow$ στο Δ_3

Ομοίως το $0\in f\left(\Delta_4\right)$ κατά συνέπεια η $f(x)=0$ έχει ρίζα και στο Δ_4 και μάλιστα μοναδική αφού $f:\uparrow$ στο Δ_4.

Συμπέρασμα: Η εξίσωση $3x^4+8x^3-6x^2-24x+5=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Π.χ.

Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $x^4 - 4x + \lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

- **Θεωρούμε τη συνάρτηση** $f(x) = x^4 - 4x + \lambda,\ x \in \mathbb{R}$

- **Για** $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 - 4$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(x^4 - 4x + \lambda) = +\infty$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f(x)	↘		↗
		min	

- **Έστω:** $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ **τότε** $f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = [\lambda - 3, +\infty)$

  και $\Delta_2 = (1, +\infty)$ **τότε** $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (\lambda - 3, +\infty)$

- **Αν:** $\lambda - 3 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 3$ **τότε:** $0 \notin f(\Delta_1)$ *και* $0 \notin f(\Delta_2)$ **άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο** $\mathbb{R}$.

- **Αν:** $\lambda - 3 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 3$ **τότε:** $0 \in f(\Delta_1)$ **οπότε η εξίσωση** $f(x) = 0$ **έχει μοναδική ρίζα στο** Δ_1 **(αφού** $f :\downarrow$ **στο** Δ_1**). Όμοια έχει μοναδική ρίζα και στο** Δ_2**, έτσι η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες στο** $\mathbb{R}$.

- **Αν** $\lambda = 3$**, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο** $\mathbb{R}$ **την** $\chi = 1$ **αφού** $f(\Delta_1) = [0, +\infty)$ **και** $f(\Delta_2) = (0, +\infty)$.

(8$^{\eta}$): Να λυθεί στο $\Re$ η εξίσωση $f(x)=0$

→ **Βρίσκουμε τις προφανείς ρίζες της εξίσωσης και αποδεικνύουμε ότι είναι μοναδικές**

Π.χ

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $\ln(x-1)+x^2+x-6=0$.

ΛΥΣΗ

- **Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)+x^2+x-6,\ \ x>1$. Παρατηρούμε ότι για χ = 2: $f(2)=0$ άρα ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.**
- **Για χ > 1: $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}+2x+1>0$, άρα $f:\uparrow$ στο $(1,+\infty)$ οπότε το 2 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$.**

Π.χ

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $3^x+4^x=5^x$.

ΛΥΣΗ

- **Η εξίσωση γράφεται: $\dfrac{3^x}{5^x}+\dfrac{4^x}{5^x}=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1=0$**

  Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$

  Παρατηρούμε ότι για χ = 2: $f(2)=0$, άρα ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης

  Για $x\in\Re$: $f'(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x\ln\dfrac{3}{5}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x\cdot\ln\dfrac{4}{5}<0$, άρα $f:\downarrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε το 2 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$.

Π.χ

Λύστε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση: $4^x+5^x=3^x+6^x \quad (1)$

ΛΥΣΗ

Η $(1)\Leftrightarrow 5^x-3^x=6^x-4^x \quad (2)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(t)=x\cdot t^{x-1}$

Τότε f παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[3,5]$ και $[4,6]$ οπότε από Θ. Μ. Τ

υπάρχουν $\xi_1\in(3,5)$ και $\xi_2\in(4,6)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(5)-f(3)}{5-3}\Leftrightarrow x\cdot\xi_1^{\,x-1}=\frac{5^x-3^x}{2}\Leftrightarrow 2x\xi_1^{\,x-1}=5^x-3^x$$

και $$f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(4)}{6-4}\Leftrightarrow x\cdot\xi_2^{\,x-1}=\frac{6^x-4^x}{2}\Leftrightarrow 2x\xi_2^{\,x-1}=6^x-4^x$$

Τότε η $(2)\Leftrightarrow 2x\xi_1^{\,x-1}=2x\xi_2^{\,x-1}\Leftrightarrow 2x\left(\xi_1^{\,x-1}-\xi_2^{\,x-1}\right)=0\Leftrightarrow x=0$ **ή** $\xi_1^{\,x-1}=\xi_2^{\,x-1}\Leftrightarrow x=0$

ή $\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1\Leftrightarrow x=0$ **ή** $x=1$.