Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

β. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\ g'(x_0)$$

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f(\frac{3}{2})=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε f(1)=1. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x)= \int_{1}^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0\ ,$$

όπου $z=\alpha+\beta i \in C$, με α, $\beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g΄.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον f(2)=α>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

<u>ΘΕΜΑ 1^{o}</u>

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 260

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 213

Γ. $\alpha \to \Sigma$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Sigma$
<u>Παρατήρηση:</u> στο (γ) θεωρούμε ότι το x_o είναι πραγματικός αριθμός και εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f.

<u>ΘΕΜΑ 2^{o}</u>

α. Πρέπει $x > 0$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = (0\,,+\infty)$

$$f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \xleftrightarrow{x \neq 0} \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$ γιατί η $\varphi(x) = \ln x$ είναι 1 – 1.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$ γιατί η $\varphi(x) = \ln x$ ↗

	0	$\sqrt{\frac{1}{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{2} = 0 \quad (1)$$

$f(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}e^{-1}$ (2) τοπικό ελάχιστο

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2\ln x = +\infty$ (3) άρα από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

το $f(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}e^{-1}$ είναι ολικό ελάχιστο.

β. $f''(x)=[x(2\ln x+1)]'=2\ln x+1+x\dfrac{2}{x}=2\ln x+3$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x+3=0\Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

	0	$\sqrt{\dfrac{1}{e^3}}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	
$f(x)$			

Η f στο $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{e^3}}\right]$ στρέφει τα κοίλα κάτω

Η f στο $\left[\sqrt{\dfrac{1}{e^3}},+\infty\right)$ στρέφει τα κοίλα άνω

$f''(x)=0\Leftrightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$

$f(e^{-\frac{3}{2}})=(e^{-\frac{3}{2}})^2\ln e^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{3}{2}e^{-3}$ άρα σημείο καμπής $K\left(\sqrt{\dfrac{1}{e^3}},-\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)$

γ. Το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\dfrac{1}{2}e^{-1},+\infty\right)$ επειδή η f συνεχής στο $(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 3^{o}

α. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $g'(x)=e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=e^{x}(f(x)+f'(x))$.

Για την g στο $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$ είναι συνεχής και στο $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ παραγωγίσιμη.

Επιπλέον $g(0)=e^{0}f(0)=0=g(\dfrac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}f(\dfrac{3}{2})$.

Άρα από το θ. Rolle υπάρχει $\xi\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ώστε $g'(\xi)=0$

$$e^{\xi}\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)=0 \xleftrightarrow{e^{\xi}>0} f'(\xi)=-f(\xi)$$

β. $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} e^{x}(2x^2-3x)dx = ... = e^{\alpha}(-2\alpha^2+7\alpha-7)+7$ (δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση)

γ. $\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=\lim_{\alpha\to-\infty} e^{\alpha}(-2\alpha^2+7\alpha-7)+7=7$

ΘΕΜΑ 4ο

$g(x)=|z|\int_{1}^{x^3} f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0$. (g(1) είναι ολικό ελάχιστο = 0)

α. $g'(x)=|z|\cdot 3x^2 f(x^3)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$

β. Η g έχει ελάχιστο στο $\left(1,g(1)=0\right)$ άρα $g'(1)=0$ από θ. Fermat οπότε $|z|\cdot 3\xi(1)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0 \Leftrightarrow |z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

γ. $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow$

$z\cdot\bar{z}=z\cdot\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta i)^2+(\alpha-\beta i)^2+1=0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta i-\beta^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\alpha^2-\beta^2)=-1 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2}$.

Όμως $z^2=\left(\alpha+\beta i\right)^2=\underbrace{\alpha^2-\beta^2}_{Re(z^2)}+2\alpha\beta i$.

Άρα $Re\left(z^2\right)=-\frac{1}{2}$

δ. $\alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta^2=\alpha^2+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta=-\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{2}}$

Επειδή α > β άρα $\beta = -\sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{2}} < 0$

Η f στο $[2,3]$ συνεχής με f(2) = α > 0 και f(3) = β < 0 άρα $f(2) \cdot f(3) < 0$ οπότε από θ. Bolzano υπάρχει $x_o \in (2,3)$ ώστε $f(x_o) = 0$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Ν. Δακουτρός, Τ. Δρούτσας, Δ. Νικολάου,
Δ. Χατζόπουλος, Γ. Περδίκης