# ΕΝΑ ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

**ΑΡΕΤΗ ΠΑΠΑΔΟΓΙΑΝΝΑΚΗ- ΠΑΥΛΑΚΟΥ**
Μαθηματικός στο Καλλιτεχνικό Σχολείο Ηρακλείου
(Γ. Γεννηματά 21-71305-Ηράκλειο Κρήτης- p23pericles@yahoo.gr)

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**
Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια πρόταση διδασκαλίας των μαγικών τετραγώνων σε μαθητές γυμνασίου, προσφέροντας στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές την ευκαιρία να προσεγγίσουν τα Μαθηματικά με έναν καινούργιο και πολύπλευρο τρόπο. Η παρουσία των μαγικών τετραγώνων στην τέχνη, αλλά και παλαιότερα σε καθημερινές συνήθειες, καθώς και η απλότητά τους, δίνουν την δυνατότητα της πραγμάτωσης μιας διερευνητικής διαδικασίας από τους μαθητές, αφού φαντάζουν οικεία και ενδιαφέροντα, προσκαλώντας τον σε ένα παιχνίδι ανακάλυψης.

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Τι είναι τα Μαθηματικά; Δημιουργία ή ανακάλυψη; Υπάρχουν ανεξάρτητα από το ανθρώπινο μυαλό; Θα μπορούσαμε να τα προσεγγίσουμε ως την αναζήτηση κανονικότητας, πρόβλεψης του επόμενου βήματος, αναζήτηση και εξήγηση κανόνων που διέπουν τη φύση.

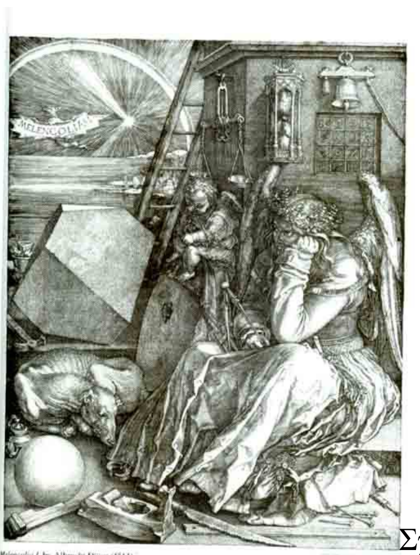
Στο σχολείο διδάσκονται τα μαθηματικά, όπως και τα υπόλοιπα μαθήματα του ωρολογίου προγράμματος, με τέτοιο τρόπο που απουσιάζει η περιπέτεια της σκέψης και της φαντασίας του ανθρώπου στη συνεχή προσπάθειά του για την εξέλιξη του πολιτισμού του. Οι μαθητές (όπου στο κείμενο γίνεται χρήση του αρσενικού γένους, όπως σ' αυτή την περίπτωση, εννοείται και το θηλυκό) δεν χρειάζονται πληροφόρηση-που στην εποχή μας τους κατακλύζει καθημερινά-αλλά εκπαίδευση. Η αναζήτηση της γνώσης είναι μια συναρπαστική ιστορία αναζήτησης. Βιώνοντας την περιπέτεια της γνώσης, γίνονται οι ίδιοι μέτοχοι αυτής της χιλιετούς ιστορίας κατανοώντας τη διαρκή κίνηση της ανθρώπινης νοημοσύνης που διαφοροποιείται και σημειώνει πρόοδο.

**ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Η συμβολή των Μαθηματικών στην εξέλιξη της νοημοσύνης είναι καθοριστική. Διδασκόμαστε σαν μαθητές έννοιες, τύπους, μεθόδους επίλυσης ασκήσεων, θεωρήματα, σ' ένα αυστηρό διδακτικό πλαίσιο

αποκομμένο από την αναγκαιότητα της ύπαρξης των Μαθηματικών, της περιγραφής της εξέλιξής τους και της χρησιμότητάς τους.
Κατά τον Ζαν Πιαζέ, η πρώτη από τις προϋποθέσεις που αναμφίβολα ισχύουν για κάθε διανοητική εκπαίδευση, αλλά είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη διδασκαλία στους διάφορους κλάδους των θετικών επιστημών, είναι η χρήση ενεργητικών μεθόδων που αποδίδουν μεγάλη σημασία στην αυθόρμητη έρευνα του παιδιού ή του εφήβου, και απαιτούν κάθε καινούργια αλήθεια ν' ανακαλύπτεται ή τουλάχιστον να τίθεται εκ νέου από το μαθητή και όχι απλώς να του μεταδίδεται, έχοντας τον εκπαιδευτικό όχι έναν απλό ομιλητή που περιορίζεται στη μετάδοση έτοιμων γνώσεων, αλλά έναν αρωγό στη δική του έρευνα και προσπάθεια.
Η ίδια η γλώσσα των Μαθηματικών με την αυστηρότητα της δομής της, την απόσταση της μαθηματικής έρευνας και τεχνολογίας από την καθημερινή ζωή, είναι υπεύθυνη για αντιδιαμετρικές στάσεις των ανθρώπων απέναντι στην επιστήμη των αριθμών και των σχημάτων.
Χαρακτηριστικά ο μεγάλος μαθηματικός Ανρί Πουανκαρέ (1854-1912) λέει: «Όταν η μαθηματική επιστήμη γίνεται αυστηρή, λαμβάνει έναν τεχνητό χαρακτήρα που εντυπωσιάζει τους πάντες. Λησμονεί τις ιστορικές ρίζες. Καταλαβαίνουμε πως είναι δυνατό ν' απαντώνται τα ερωτήματα δεν καταλαβαίνουμε όμως πλέον πως και γιατί τίθονται».
Η συμβολή της ιστορίας των Μαθηματικών στην κατανόηση του ρόλου τους στην κοινωνία είναι σημαντική, βοηθώντας επίσης στην καλλιέργεια θετικής στάσης των παιδιών απέναντι στα Μαθηματικά.

**ΤΟ ΜΑΓΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΩΣ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ**



*Melencolia I*, by Albrecht Dürer (1514).
Σχ.1

Ο Herbert J. Ryser στο βιβλίο του «Συνδυαστικά Μαθηματικά» παρουσιάζει το μαγικό τετράγωνο, γνωστό στην Κίνα αιώνες ήδη προ Χριστού, γράφοντας χαρακτηριστικά: «Πολλά από τα προβλήματα που μελετήθηκαν στο παρελθόν, επειδή παρουσίαζαν ψυχαγωγικό ή αισθητικό ενδιαφέρον, έχουν τεράστια αξία σήμερα στις θεωρητικές και εφαρμοσμένες επιστήμες. Η νέα τεχνολογία με τη ζωτική σημασία που δίνει στο διακριτό, έδωσε στα ψυχαγωγικά Μαθηματικά του παρελθόντος νέους σοβαρούς σκοπούς».

Θα παραθέσω αναλυτικά παρακάτω ένα σχέδιο μαθήματος που ήδη έχω διδάξει στη Β΄ τάξη του Καλλιτεχνικού Σχολείου Ηρακλείου, τη σχολική χρονιά 2007-2008, και σε πιο συνοπτική μορφή, στα ειδικά προαιρετικά μαθήματα του τοπικού παραρτήματος της Ε. Μ. Ε. στο Ηράκλειο Κρήτης για την προετοιμασία των υποψηφίων των διαγωνισμών: ΘΑΛΗ, ΕΥΚΛΕΙΔΗ και ΑΡΧΙΜΗΔΗ, τη σχολική χρονιά 2008-2009.

Θέμα του είναι το μαγικό τετράγωνο.

Πέρα από τις ασκήσεις εφαρμογής, όπου οι μαθητές καλούνται να επαναλάβουν αποκτημένες γνώσεις με στόχο την εμπέδωση και καλύτερη κατανόηση των γνώσεων αυτών, υπάρχουν τα προβλήματα. Ένας μαθητής αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν ζητάει μια λύση αλλά δεν υπάρχει προφανής τρόπος για να φτάσει στη λύση αυτή.

Ο μεγάλος μαθηματικός- παιδαγωγός G. Polya υποστηρίζει ότι το να λύνει κανείς προβλήματα είναι μια πρακτική επιδεξιότητα όπως για παράδειγμα το κολύμπι. Αποκτούμε κάθε πρακτική επιδεξιότητα με τη μίμηση και την εξάσκηση. Όταν προσπαθείτε να λύσετε προβλήματα πρέπει να παρατηρείτε και να μιμείστε αυτό που οι άλλοι κάνουν όταν λύνουν προβλήματα και τελικά μαθαίνετε να λύνετε προβλήματα λύνοντάς τα.

| | | |
|---|---|---|
| 103 | 79 | 37 |
| 7 | 73 | 139 |
| 109 | 67 | 43 |

Σχ.2

Τα Μαθηματικά θεωρούνται ως μέσο για την καλλιέργεια, την εξάσκηση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων. Γι' αυτό τον λόγο εξάλλου, υποστηρίζεται ότι η επίλυση προβλημάτων βρίσκεται στην καρδιά κάθε μαθηματικής δραστηριότητας. Στον περιορισμένο χρόνο του μαθήματος, στην πίεση της ύλης που πρέπει ο κάθε διδάσκοντας να ολοκληρώσει, η εικόνα που δίνεται στην τάξη όταν τίθεται ένα πρόβλημα είναι η άμεση λύση του. Ο χρόνος που απαιτείται, η προσπάθεια που καταβάλλεται, ο κόπος, τα λάθη αυτού που επιχειρεί να λύσει το πρόβλημα, απουσιάζουν, δίνοντας έτσι μια ψευδή εικόνα για την ίδια τη φύση του μαθήματος.

Ο Ανρί Πουανκαρέ το 1908 έγραψε ότι στηρίζεται στην ασυνείδητη σκέψη για τις ανακαλύψεις του. Χαρακτηριστικά έγραψε: «Στο υποσυνείδητο βασιλεύει ένα είδος ελευθερίας, αν μπορεί κανείς ν' αποκαλέσει έτσι την απουσία πειθαρχίας και την αταξία που γεννά το τυχαίο. Μόνο μέσα απ' αυτήν την αταξία μπορούν ν' αναδυθούν απροσδόκητοι συνδυασμοί». Ο Γάλλος ψυχολόγος Τουλούζ, αναλύοντας τη συμπεριφορά του μεγάλου μαθηματικού έφτασε στο συμπέρασμα ότι ο Πουανκαρέ είχε μάθει πότε ν' αφήνει κατά μέρος ένα πρόβλημα, αφού «θεωρούσε ότι κατά τη διάρκεια των διαλειμμάτων το ασυνείδητό του συνεχίζει την επεξεργασία». Το

άτομο, επιφανειακά δεν ασχολείται με το πρόβλημα αλλά όπως λέμε “κοιμάται επάνω στο πρόβλημα” διανύει δηλαδή το στάδιο της “επώασης”.
Η λέξη “ευρετικές” παράγεται από το ρήμα ευρίσκω και στη σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών σημαίνει στρατηγικές, μεθόδους ή συνήθειες οι οποίες είναι ανεξάρτητες από κάθε ειδικό θέμα ή τη φύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, και βοηθούν τον μαθητή να βρει ένα σωστό τρόπο για να προσεγγίσει, να κατανοήσει ένα πρόβλημα και να συνδυάσει αποτελεσματικά τις προγενέστερες γνώσεις του, μέχρι να φτάσει στη λύση του.
Το πρόβλημα, που παρουσιάζεται στο σχέδιο διδασκαλίας, είναι ένα ανοικτό πρόβλημα. Τα χαρακτηριστικά του ανοικτού προβλήματος είναι η συνήθως σύντομη εκφώνησή του σε καθημερινή ή μαθηματική γλώσσα, που δεν προδίδει άμεσα τη λύση ούτε το μαθηματικό εργαλείο που θα χρησιμοποιηθεί, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η λύση του βασίζεται σ’ έννοιες που οι μαθητές δεν είναι αρκετά εξοικειωμένοι. Τα ανοικτά προβλήματα θέτουν το μαθητή σε κατάσταση έρευνας, αναπτύσσοντας ικανότητες μεθοδολογίας και αναδεικνύοντας τις διαφορές ανάμεσά τους, διαφορές που συντελούν στην ποικιλία των ιδεών και μεθόδων κάνοντας την διδασκαλία βιωματική και επικοινωνιακή.

**ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ - ΤΟ ΜΑΓΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ**

M.C. ESCHER Σχ.3

Αυτό το μάθημα προτείνεται να διδαχθεί σε τέσσερα μέρη. Τα δύο πρώτα μέρη γίνονται στο τέλος δύο διδακτικών ωρών προετοιμάζοντας τη τάξη για τα επόμενα δύο μέρη που καλύπτουν όλη την ώρα διδασκαλίας, στο πλαίσιο πάντα της διαθεματικότητας στο μάθημα των Μαθηματικών.

**Μέρος 1ο**

Στη τάξη υπάρχει στον τοίχο Πίνακας Ανακοινώσεων Μαθηματικών όπου σε τακτά χρονικά διαστήματα αναρτώνται τόσο από τον διδάσκοντα όσο και από τους μαθητές υλικό με κύριο θέμα τα Μαθηματικά. Επίσης διατηρείται ένας φάκελος όπου φυλάσσεται το υλικό που εκτίθεται. Μπορούν ν’ αναρτηθούν βιογραφίες / φωτογραφίες μαθηματικών, ανέκδοτα και άρθρα από εφημερίδες, εργασίες παιδιών με θέματα από την τρέχουσα ύλη, παιχνίδια και διασκεδαστικά προβλήματα.

M.C. ESCHER Σχ.4

Ο καθηγητής φέρνει στην τάξη φωτοτυπίες για να μοιραστούν ανά ομάδα στην τάξη και αναρτεί από μία στον Πίνακα Ανακοινώσεων για να παραμείνουν στη τάξη κατά τη διάρκεια της προτεινόμενης διδασκαλίας.

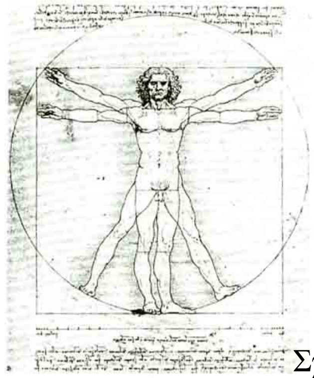
Ακολουθεί διάλογος με κύριο άξονα το συνοδευτικό σχόλιο ανά φωτοτυπία.

**Φωτοτυπίες**

1. Έργο του M. C. ESCHER ( Επικάλυψη-Σχ.3 )
   Έργο του M. C. ESCHER ( Ανέφικτο-Σχ.4 )
   Έργο του LEONARDO DA VINCI (Άνθρωπος-Σχ.5 )
2. Έργα του ALBRECHT DÜRER : «Melancolia I» ( 1514 ) και «Καλλιτέχνης που ζωγραφίζει ένα λαούτο» (Σχ.1,6).
3. ΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ (άρτιας και περιττής τάξης, πρώτων αριθμών, με ντόμινο, ομόκεντρα μαγικά τετράγωνα, Σχ.7,9,2,10,11)

**Συνοδευτικά σχόλια**

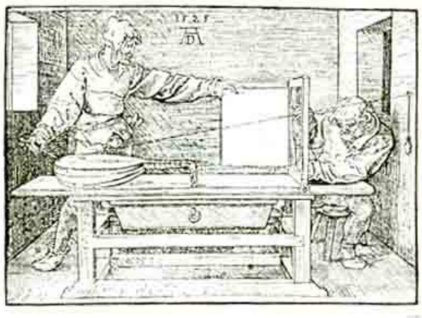
1. Τα Μαθηματικά είναι κυρίως λογική και η τέχνη απευθύνεται στο συναίσθημα. Αυτό όμως δεν αποτέλεσε εμπόδιο για αρκετούς καλλιτέχνες όπως οι M. C. Escher, Salvador Dali, Leonardo da Vinci, να χρησιμοποιήσουν ψηφιδωτά, πολύεδρα, ανέφικτα σχήματα, ταινίες Moebius, fractals, στηριζόμενοι σε νόμους συμμετρίας, προοπτικής, τοπολογίας και σύγχρονων γεωμετριών.



Σχ.5

*Leonardo da Vinci, «Οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος σύμφωνα με τον Βιτρούβιο»*

2. Ο Γερμανός ζωγράφος και χαράκτης Albrecht Dürer (1471-1528 ) είναι ο καλλιτέχνης που προχώρησε περισσότερο από όλους σε μαθηματική σύλληψη, συνδυάζοντας σωστά την προοπτική με τη γεωμετρία. Στο έργο του «Καλλιτέχνης που ζωγραφίζει ένα λαούτο» δίνει ένα μάθημα Προβολικής Γεωμετρίας ενώ χρησιμοποιεί μαθηματικά αντικείμενα ως σύμβολα στο έργο του «Μελαγχολία I». Αυτό το τελευταίο θεωρείται η πιο σύνθετη δουλειά του Dürer. Η ποικιλία των μικρών λεπτομερειών στο χαρακτικό αναστάτωσαν τους μελετητές για αιώνες. Γιατί ο Dürer τοποθέτησε ένα μαγικό τετράγωνο πάνω δεξιά; Οι μελετητές πιστεύουν ότι το χαρακτικό δείχνει την



Σχ.6

*A. Dürer, "Καλλιτέχνης που ζωγραφίζει ένα λαούτο"* ανεπάρκεια της ανθρώπινης γνώσης στην επίτευξη της θαυμάσιας σοφίας ή της διεισδυτικότητας στα μυστικά της φύσης.

3. Ένα μαγικό τετράγωνο είναι ένα τετράγωνο χωρισμένο σε μικρότερα τετράγωνα που περιέχουν διαφορετικούς αριθμούς με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα των αριθμών να είναι πάντοτε το ίδιο σε κάθε στήλη, γραμμή και διαγώνιο. Το άθροισμα ονομάζεται μαγικός αριθμός ή σταθερά του τετραγώνου. Το πλήθος των μικρών τετραγώνων λέγεται απόλυτη τιμή του τετραγώνου. Το τετράγωνο λέγεται διαστάσεων 3x3 ή τάξεως 3 (περιττή τάξη, Σχ. ), διαστάσεων 4x4 ή τάξεως 4 (άρτια τάξη, Σχ. ) ανάλογα με τον αριθμό των μικρότερων τετραγώνων που έχει χωριστεί ανά γραμμή και στήλη. Αντίστοιχα έχουμε τετράγωνα $ν^{ης}$ τάξης.

**Εργασία.**

Να βρείτε πληροφορίες για την ιστορική αναδρομή των μαγικών τετραγώνων.

**Μέρος 2$^{ο}$**

Στην τάξη διαβάζεται η τελική ομαδική εργασία των μαθητών που δούλεψαν ανατρέχοντας σε σχετική βιβλιογραφία ή μέσα από το διαδίκτυο με θέμα την ιστορία των μαγικών τετραγώνων. Ενδεικτικά αναφέρω την παρακάτω ιστορική αναδρομή :

Κανείς δεν γνωρίζει την προέλευση των μαγικών τετραγώνων. Η κατασκευή του σε παλιότερες εποχές αποτελούσε ενδιαφέρουσα απασχόληση για ανήσυχους ανθρώπους. Από τότε που οι αρχαίοι απέδωσαν μαγικές ιδιότητες σε μερικούς αριθμούς, ήταν πολύ φυσικό να προσδοθούν μαγικές ιδιότητες και σ’ αυτά. Καμωμένο το μαγικό τετράγωνο από ασήμι και κρεμασμένο στο λαιμό σε προφύλασε από την πανώλη, πίστευαν σε μερικές φυλές. Στην Ινδία το φορούσαν ως φυλακτό για προφύλαξη από σοβαρές ασθένειες. Αρχαίοι Πέρσες μάγοι οι οποίοι ειδικεύονταν και στην ιατρική υποστήριζαν ότι θεράπευαν ασθένειες με μαγικά τετράγωνα ακολουθώντας τον ιερό κανόνα Primum, non nocere (πρώτον, να μη βλάπτεις). Τα μαγικά τετράγωνα ήταν γνωστά τόσο στους Κινέζους από την εποχή του αυτοκράτορα Yu ( 2.200 π. χ. ) όσο και στους Ινδούς. Τον 9$^{ο}$ μ. Χ. αιώνα έγιναν γνωστά και στους Άραβες, διατηρώντας πάντα τον μυστικιστικό τους χαρακτήρα όπως περιγράφεται σε ινδικά και αραβικά κείμενα τουλάχιστον 1200 ετών. Τα αρχαιότερα μαγικά τετράγωνα βρίσκονται σ’ ένα κινεζικό κείμενο του 12$^{ου}$ αιώνα π. Χ., που πρόσφατα έγινε δημοφιλές στο ευρύ κοινό της Δύσης· το Ι – Τζινγκ ή το βιβλίο των αλλαγών. Μπορεί να γράφτηκε από τον Ουόν – ουάνγκ χωρίς να είναι στην πραγματικότητα ένα βιβλίο μαθηματικών, αλλά ένα βιβλίο που χρησιμοποιούνταν από τους Κινέζους επί χιλιετίες για να μαντέψουν ποια πορεία δράσης έπρεπε να ακολουθήσουν σε σημαντικά θέματα. Κατά πάσα πιθανότητα το Ι-Τζινγκ περιέχει γνώση αρχαιότερη, ίχνη της οποίας συναντάμε στην κινεζική μυθολογία. Στο δυτικό κόσμο, τα μαγικά τετράγωνα μελετούνται ως μέρος των Διασκεδαστικών Μαθηματικών, χωρίς υπερφυσικές ιδιότητες, μια και το σημερινό ορθολογικό πνεύμα έχει υπερνικήσει τις δοξασίες του παρελθόντος. Ο Βυζαντινός λόγιος Εμμανουήλ Μοσχόπουλος ( ~ 1265 - ~1315 ) φέρεται ως ο εισηγητής των μαγικών τετραγώνων στη Δύση, με το ολιγοσέλιδο σχετικό έργο του. Σκοπός του έργου του είναι η διατύπωση για πρώτη φορά κανόνων κατασκευής μαγικών τετραγώνων διαφόρων τάξεων, διατηρώντας τον όρο μαγικό μόνο στον τίτλο χωρίς ν' αποδίδει πουθενά μαγικές ιδιότητες σ' αυτά. Στη συνέχεια πολλοί ασχολήθηκαν μ' αυτά μεταξύ των οποίων και διάσημοι μαθηματικοί όπως ο Μπασέ, ο Όυλερ, ο Φερμά. Σήμερα υπάρχει πολύ μεγάλη ποικιλία από γνωστά μαγικά τετράγωνα με διάφορες επιπλέον μαθηματικές ιδιότητες. Το μαγικό τετράγωνο είναι ένα αρχέτυπο τόσο πλούσιο σε νοήματα και μυστικισμό, όσο το Ι-Τζινγκ. Είναι μία μαθηματική και οπτική αναπαράσταση, ένα φυσικό origami, ένα αστροποβόλημα φωτός.

**Βιβλία**

Στη τάξη ο καθηγητής δείχνει στους μαθητές δύο βιβλία. Το πρώτο ανήκει στη κατηγορία των βιβλίων που μπορούν να διαβαστούν σε μια Λέσχη Ανάγνωσης Μαθηματικής Λογοτεχνίας με μαθητές Γυμνασίου. Είναι τα «ΚΑΤΑΡΑΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ , Η ΑΛΙΚΗ ΣΤΗ ΧΩΡΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ» του Κάρλο Φραμπέτι, εκδόσεις Opera, όπου υπάρχει κεφάλαιο με τη συμπλήρωση του μαγικού τετραγώνου που θα ασχοληθούμε παρακάτω και εμείς.

Το δεύτερο βιβλίο ανήκει στην κατηγορία των βιβλίων που περιέχουν μαθηματικούς γρίφους και προβλήματα. Είναι το «LEWIS CARROLL'S GAMES AND PUZZLES» του Edward Wakeling, εκδόσεις DOVER PUBLICATIONS, INC., NEW YORK, εμπνευσμένο από την «Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων» του Lewis Carroll. Στο βιβλίο αυτό μπορούμε να δούμε το μαγικό ταχυδρομικό τετράγωνο που επινόησε ο μαθηματικός και συγγραφέας L. Carroll χρησιμοποιώντας τα ταχυδρομικά τέλη της εποχής του.

**Φωτοτυπίες**

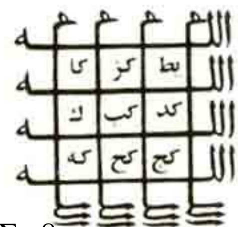
1. Το μαγικό τετράγωνο του πίνακα «Melancolia Ι»(Σχ.7) .
2. Το μαγικό τετράγωνο του Ισλάμ (Σχ.8)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Σχ.7

**Συνοδευτικά σχόλια**

1. Οι μαθητές αναζητούν ιδιότητες του μαγικού τετραγώνου. Είναι άρτιας τάξης 4. Τα δύο κεντρικά νούμερα στην τελευταία σειρά διαβάζονται 1514 τη χρονιά που ο καλλιτέχνης έκανε το χαρακτικό. Το μαγικό άθροισμα είναι 34 όπως είναι και το άθροισμα των αριθμών στα ακριανά τετράγωνα (16,13,4,1) και του μικρού κεντρικού τετραγώνου (10,11,6,7). Το άθροισμα των εναπομείναντων αριθμών είναι το διπλάσιο του 34.Μπορείτε να βρείτε και άλλες ομάδες αριθμών με άθροισμα 34. Μετατρέποντας τους αριθμούς 1,2,…16 στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης, το μαγικό τετράγωνο αποκτά επιπλέον γοητευτικές ιδιότητες συμμετριών.
2. Στο Ισλάμ ο αριθμός 66 αντιστοιχεί στην αριθμητική αξία της λέξης Allah. Στο Ισλαμικό μαγικό τετράγωνο, που εκφράζει τον αριθμό 66 σε κάθε κατεύθυνση όταν τα γράμματα μετατραπούν σε αριθμούς, το πλέγμα του τετραγώνου είναι διαμορφωμένο από τα γράμματα της λέξης Allah.



Σχ.8

**Ανοικτό πρόβλημα**

Φτιάξτε το μαγικό τετράγωνο τάξεως 3 και τοποθετήστε στα τετραγωνάκια όλους τους αριθμούς από τον 1 έως και το 9.

**Μέρος $3^{o}$**

<u>$1^{o}$ βήμα</u>: Ποιος είναι ο μαγικός αριθμός του μαγικού τετραγώνου;

Πρώτα βρίσκουμε το άθροισμα από το 1 έως το 9. Εδώ μπορούμε να θυμίσουμε το κόλπο του μικρού Gauss για το γρήγορο υπολογισμό ενός τέτοιου αθροίσματος. 1+2 +…+ 9 = $\frac{(9+1)9}{2}$ =45.

Δίνοντας τον ακόλουθο ορισμό: Αριθμητική πρόοδος είναι μία ακολουθία αριθμών που κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση πάντα του ίδιου αριθμού ω, μπορούμε να γενικεύσουμε: αν α ονομάσω τον πρώτο όρο μιας οποιαδήποτε αριθμητικής προόδου, β τον τελευταίο όρο και ν το πλήθος των όρων τότε το άθροισμα των όρων της δίνεται από τον τύπο: $\frac{(\alpha+\beta)\nu}{2}$.

Για να έχουμε και στις 3 γραμμές του τρίτης τάξεως πίνακα το ίδιο άθροισμα πρέπει ο μαγικός αριθμός να είναι 15, δηλαδή 45:3=15. Γενικεύοντας ο μαγικός αριθμός οποιουδήποτε μαγικού τετραγώνου είναι το πηλίκο του συνολικού αθροίσματος των αριθμών που τοποθετώ δια του αριθμού της τάξης του.

| | | |
|---|---|---|
| α | β | γ |
| δ | κ | ε |
| ζ | η | θ |

2<sup></sup>ο βήμα: Το τετράγωνο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του και άξονες συμμετρίας τις μεσοκάθετες των πλευρών του και τις διαγώνιές του. Λόγω συμμετρίας ξεκινάμε την τοποθέτηση των αριθμών από το κεντρικό τετραγωνάκι. Αν τοποθετήσουμε τον αριθμό κ στη κεντρική θέση και το μαγικό τετράγωνο συμπληρωθεί όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, έχουμε:

α+ κ+ θ= 15, δ+ κ+ ε= 15, ζ+ κ + γ= 15.

Παρατηρούμε ότι α+δ+ζ=15 και θ+ε+γ=15. Προσθέτοντας λοιπόν κατά μέλη τις 3 παραπάνω ισότητες, παίρνουμε: 15+3κ+15=45, δηλ. 3κ=15, δηλ. κ=5.

Άρα τοποθετούμε στο κεντρικό τετραγωνάκι τον αριθμό 5. Μπορούμε να γενικεύσουμε ότι για κάθε μαγικό τετράγωνο τάξεως 3, ο μαγικός αριθμός του είναι τριπλάσιος του αριθμού στην κεντρική θέση. Άραγε συμβαίνει το αντίστοιχο και στα υπόλοιπα μαγικά τετράγωνα περιττής τάξεως;

3ο βήμα: Πως συνεχίζουμε; Ας εξετάσουμε που θα τοποθετήσουμε το μικρότερο αριθμό μας, το 1. Λόγω συμμετρίας του τετραγώνου υπάρχουν δύο δυνατότητες. Σε ένα γωνιακό τετραγωνάκι ή στο μεσαίο κάποιας πλευράς του. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα εξετάσουμε μία μόνη θέση από κάθε περίπτωση. Θα κάνουμε την απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Δηλαδή, υποθέτοντας ότι η P δεν συνεπάγεται την Q, καταλήγουμε συνήθως σε κάτι άτοπο, οπότε είμαστε αναγκασμένοι να δεχτούμε ότι η P συνεπάγεται την Q. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το 1 δεν μπορεί να μπει στο μεσαίο τετραγωνάκι κάποιας πλευράς. Το 1 επομένως μπαίνει σ' ένα γωνιακό τετραγωνάκι, δηλαδή το 1 βρίσκεται σε τρία αθροίσματα των 15. Από τους αριθμούς που πρέπει να τοποθετήσουμε, μόνο δύο τριάδες που περιέχουν το 1 μας δίνουν άθροισμα 15, οι 1+5+9 και 1+8+6. Άτοπο, επομένως το 1 δεν μπορεί να μπει σε γωνιακό τετραγωνάκι. Άρα το 1 μπαίνει στο μεσαίο τετραγωνάκι μιας πλευράς.

4ο βήμα: Τέλος με απλούς υπολογισμούς αθροισμάτων ανά γραμμή, στήλη και διαγώνιο βρίσκουμε τους υπόλοιπους αριθμούς που πρέπει να τοποθετηθούν στο μαγικό τετράγωνο, παίρνοντας μοναδική λύση ως προς τις συμπλήρωση των τριάδων. Ακολουθούν τα βήματα στα παρακάτω σχήματα:

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| 1 | 5 | 9 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| | | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| | | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

Σχ.9

Παρατηρούμε ότι στο δεύτερο βήμα θα μπορούσαμε να εναλλάσσαμε τις θέσεις των 2 και 4, αλλά λόγω της αξονικής συμμετρίας του τετραγώνου κατά τις μεσοκαθέτους των πλευρών του, το μαγικό τετράγωνο που παίρνουμε δεν αποτελεί διαφορετική λύση. Οι μαθητές μπορούν να βρουν λόγω συμμετριών και άλλες λύσεις για το πρόβλημά μας, με περιστροφή ή αντιστροφή, όμως όλες είναι ίδιες. Τα διπλανά μαγικά τετράγωνα, είναι το ένα η εικόνα του άλλου μέσα στον καθρέπτη.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

**Προτεινόμενη άσκηση**

Να συμπληρωθούν τα παρακάτω μαγικά τετράγωνα:

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 8 | |
| | 12 | |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | | |
| 7 | 5 | 3 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 3 | |
| | | 13 |
| 8 | 15 | |

**Μέρος 4ο**

**Προβλήματα**

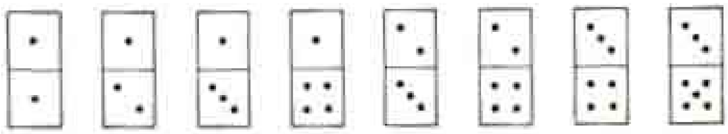
1. Στο διπλανό μαγικό τετράγωνο ο μαγικός αριθμός είναι 20 και οι δύο πρώτοι αριθμοί δίνονται. Μπορείτε να βρείτε τους υπόλοιπους;

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 3 | |
| | | |
| | | |

2. Στο κάτω σχήμα δίνεται ένας πίνακας με 9 τετράγωνα στα οποία έχουν τοποθετηθεί οι ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ και 0 (μηδέν). Το άθροισμα των αριθμών κάθε οριζόντιας γραμμής, κάθε κατακόρυφης στήλης και κάθε διαγωνίου ισούται με κ. Να αποδείξετε ότι κ=0. (Διαγωνισμός «Ο Ευκλείδης» της Ε. Μ. Ε, 1999)

| | | |
|---|---|---|
| α | β | γ |
| δ | 0 | ε |
| ζ | η | θ |

3. Σχηματίστε με τα παρακάτω 8 κομμάτια του ντόμινο ένα μαγικό τετράγωνο τάξεως 4.



**Ερώτημα**

Υπάρχει μαγικό τετράγωνο τάξεως 2;

<u>Υπόδειξη</u>: Η απάντηση δίνεται με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

**Άλλοι τρόποι κατασκευής μαγικών τετραγώνων**

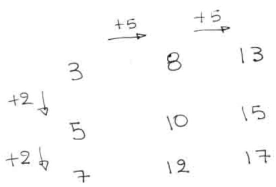
Με δεδομένο το μαγικό τετράγωνο που βρήκαμε σαν λύση στο πρόβλημά μας, μπορούμε να σχηματίσουμε και άλλα μαγικά τετράγωνα, αν για παράδειγμα αυξήσουμε όλους τους αριθμούς κατά ένα σταθερό αριθμό ή αν τους αντικαταστήσουμε με τους 9 αρχικούς περιττούς αριθμούς 1 ,…,17.

Δείτε τα σχήματα:

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 17 | 12 |
| 11 | 15 | 19 |
| 18 | 13 | 14 |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 13 | 3 |
| 1 | 9 | 17 |
| 15 | 5 | 7 |

Άλλος τρόπος είναι να διαλέξουμε έναν οποιοδήποτε αριθμό για να ξεκινήσουμε, π.χ. το 3 και μετά επιλέγουμε δύο άλλους αριθμούς, π.χ. το 2 και το 5(τυχαίους;), που θα προστεθούν στον αρχικό αριθμό σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία:




Κατόπιν αντικαθιστούμε τους αριθμούς 1 μέχρι 9 του αρχικού μαγικού τετραγώνου με τη σειρά 3,8,13,5,10,15,7,12,17. Το αποτέλεσμα είναι το διπλανό μαγικό τετράγωνο.

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 13 | 5 |
| 3 | 10 | 17 |
| 15 | 7 | 8 |

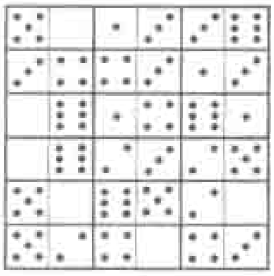
**Ερώτημα**

Μπορούμε να συμπληρώσουμε ένα μαγικό τετράγωνο, όπως του προβλήματός μας, όταν για το κάθε βήμα χρησιμοποιήσουμε τη κίνηση του αλόγου στη σκακιέρα;

Υπάρχουν άλλοι τρόποι να συμπληρωθεί;

**ΕΠΙΛΟΓΟΣ**

Ολοκληρώνοντας την εισαγωγική αυτή διδασκαλία για τα μαγικά τετράγωνα, προτείνουμε στους μαθητές την σχετική βιβλιογραφία που θα τους φανεί χρήσιμη στην περαιτέρω διερεύνηση του θέματος (π.χ. μέθοδος Μπασέ).



Σχ.10

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 1 | 2 | 20 | 19 |
| 22 | 16 | 9 | 14 | 4 |
| 5 | 11 | 13 | 15 | 21 |
| 8 | 12 | 17 | 10 | 18 |
| 7 | 25 | 24 | 6 | 3 |

Σχ.11

**ΒΙΒΛΙΑ - ΑΡΘΡΑ**


- B. Bolt: *Μαθηματικές Σπαζοκεφαλιές* (No 1,2,3), Κάτοπτρο, 1991
- C. Clawson: *Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών*, Κέδρος, 2005
- C. Pickover: *The Loom of God*, Plenum Publishing Corporation, 1997
- E. Wakeling: *Lewis Carroll's Games and Puzzles*, Dover, 1992
- E. Sabato: *Μια πολύπλοκη ύπαρξη*, Εκδόσεις του 21$^{ου}$ ,1996
- Γ. Κόταβας: *Προσεγγίσεις της έννοιας του ανοιχτού προβλήματος στην διδασκαλία των Μαθηματικών*, Ευκλείδης Νο 43, ΕΜΕ, 1995
- Ζ. Πιαζέ: *Το μέλλον της εκπαίδευσης*, Υποδομή, 1979
- G. Polya: *Πώς να το λύσω*, Σπηλιώτη
- Κ. Φραμπέτι: *Καταραμένα Μαθηματικά*, Opera, 2004
- M. Tahan: *Ο άνθρωπος που μετρούσε*, Κάτοπτρο, 2002
- M. Gardner: *Το πανηγύρι των Μαθηματικών*, Τροχαλία (β΄έκδοση)
- Μ. Θ. Δαυϊδόπουλος, Κ. Γ. Τολιόπουλος: *το σαλιγκαρ'και κι άλλα γριφώδη Μαθηματικά*, Γκατζούλης
- Μπάμπης Τουμάσης: *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Gutenberg, 1994
- *Σύγχρονες Διδακτικές Προσεγγίσεις για την Ανάπτυξη Κριτικής – Δημιουργικής Σκέψης (για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση)*, Ο. Ε. Π. Ε. Κ. , 2007
- *Τα Μαθηματικά Κλειδί Ανάπτυξης* , Πρακτικά 17$^{ου}$ Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, 2000
- *Διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών στην Εκπαιδευτική πράξη*, Ε. Μ. Ε. παράρτημα κεντρικής Μακεδονίας, Μαθηματική Εβδομάδα, 2007
- Y. Perelman: *Διασκεδαστικά Μαθηματικά (1$^{ο}$ μέρος)*, Κάτοπτρο, 2000



**ΑΡΕΤΗ ΠΑΠΑΔΟΓΙΑΝΝΑΚΗ- ΠΑΥΛΑΚΟΥ**

Μαθηματικός στο Καλλιτεχνικό Σχολείο Ηρακλείου