

## Ταυτότητες

1. Να υπολογίσετε από μνήμης τις παραστάσεις

$$\begin{array}{ll} \alpha) & 15^2 - 5^2 = \dots & \beta) & 12^2 - 8^2 = \dots \\ & 105^2 - 95^2 = \dots & & 102^2 - 98^2 = \dots \\ & 1005^2 - 995^2 = \dots & & 1002^2 - 998^2 = \dots \end{array}$$

2. Σκεφτείτε ένα διψήφιο αριθμό και βρείτε το τετράγωνό του.

Βρείτε στη συνέχεια το τετράγωνο του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού που σκεφτήκατε και αφαιρέστε τα δυο αποτελέσματα.

Ο αριθμός που βρήκατε διαιρείται ακριβώς με το 9. Μπορείτε να το εξηγήσετε;

3. Να αποδείξετε ότι:

- $5^2 - 4^2 = 5 + 4$
- $12^2 - 11^2 = 12 + 11$
- $65^2 - 64^2 = 65 + 64$
- $134^2 - 133^2 = 134 + 133$

➤ Με βάση τις προηγούμενες ισότητες να συμπληρώσετε τη φράση:  
«Η διαφορά των τετραγώνων δύο..... φυσικών αριθμών ισούται με το..... των αριθμών αυτών.»

• Να συμπληρώσετε την ισότητα

$$4568^2 - \dots = \dots + \dots$$

4. Ο τηλεφωνικός κατάλογος μιας πόλης περιέχει 9991 ονόματα γραμμένα σε λιγότερες από 100 σελίδες και κάθε σελίδα περιέχει τον ίδιο αριθμό ονομάτων. Ο Γιώργος δεν μπόρεσε να προσδιορίσει πόσες ακριβώς σελίδες περιέχει ο κατάλογος. Ο Δημήτρης όμως παρατήρησε ότι ο αριθμός  $9991 = 10000 - 9$  και με απλούς συλλογισμούς προσδιόρισε ακριβώς τον αριθμό των σελίδων του καταλόγου. Μπορείτε να βρείτε τους συλλογισμούς που έκανε ο Δημήτρης;

5. Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = (\sqrt{2} + 1)^3$

$$B = (\sqrt{2} - 1)^3$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A , B

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης  $\Gamma = A \cdot B$  είναι ίση με 1

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i.  $(a + 1)^3$

ii.  $(2a + 3)^3$

iii.  $(1 + 3a)^3$

iv.  $(a + 5\beta)^3$

v.  $(2 + 3\sqrt{2})^3$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i.  $(-a + 1)^3$

ii.  $(-a - 1)^3$

iii.  $(\chi\psi - 3)^3$

iv.  $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^3$

v.  $(\chi^2\psi - \psi^2)^3$

8. Αν  $\alpha^8 = \beta^8 + 2010$ , να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου:  
 $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)$

9. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 99^2 + 100^2 - 2 \cdot (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 99 \cdot 100)$$

10. Αν είναι  $A = 2^{2010} + 2^{-2010}$  και  $B = 2^{2010} - 2^{-2010}$

να υπολογίσετε την παράσταση  $A^2 - B^2$ .

11. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$4 + 11^2 + 101^2 + 1001^2 + 10001^2 + 100001^2 - (9^2 + 99^2 + 999^2 + 9999^2 + 99999^2)$$

**12. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:**

i.  $\alpha\beta = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2$

ii.  $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$

iii.  $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$

**13. Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

i.  $(\chi + 3)(\chi - 3)$

ii.  $(\chi - 1)(\chi + 1)$

iii.  $(2\chi - 5)(2\chi + 5)$

iv.  $(1 - 3\chi)(1 + 3\chi)$

v.  $(2\chi + 5\psi)(2\chi - 5\psi)$

vi.  $\left(\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\psi}{\beta}\right) \cdot \left(\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta}\right)$

vii.  $(8\chi^2 - 5\chi)(5\chi + 8\chi^2)$

viii.  $(\chi + \psi - \zeta)^2$

ix.  $(2\alpha - 3\beta - 1)^2$

x.  $(\chi - 1 + \sqrt{2})^2$

