



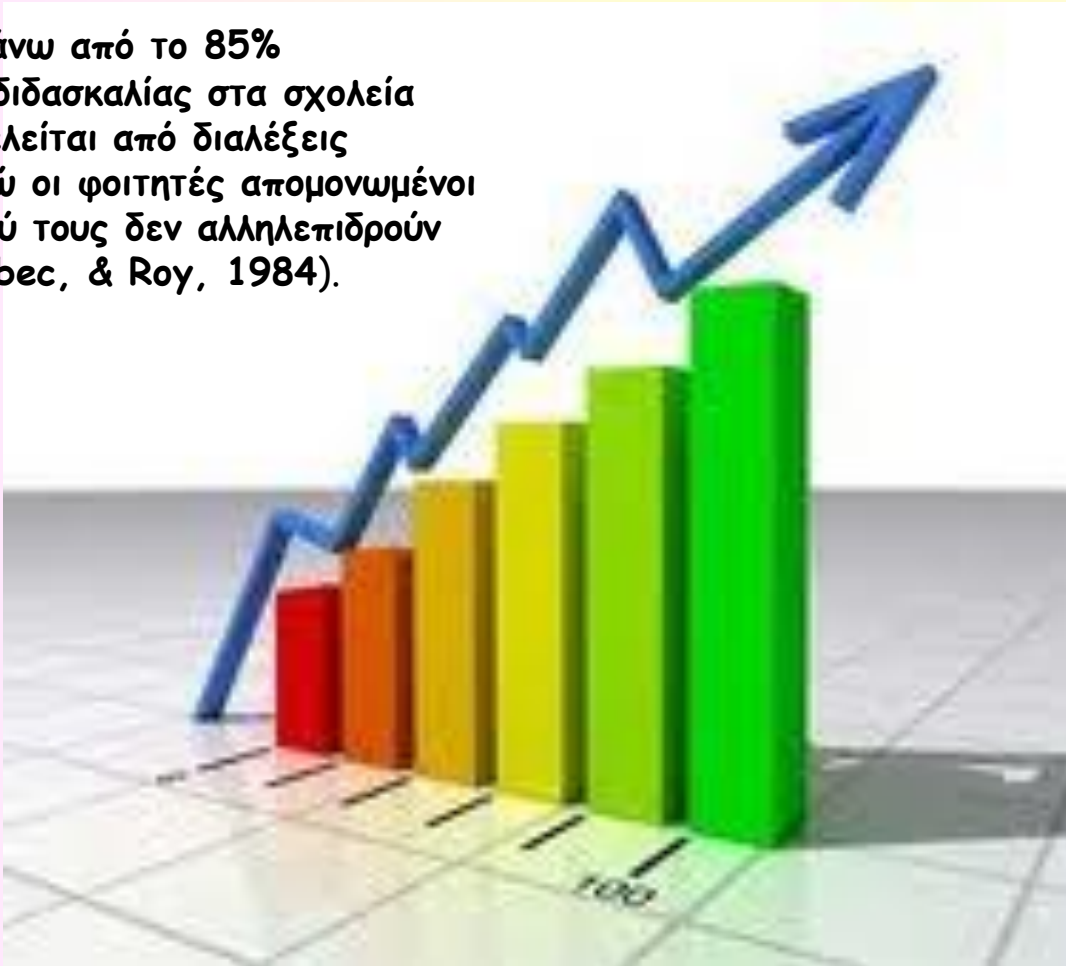
# Η συνεργατική μάθηση των Μαθηματικών



Στεφανίδης Γιάννης.

# η ατομική μάθηση πετάει...μπόι

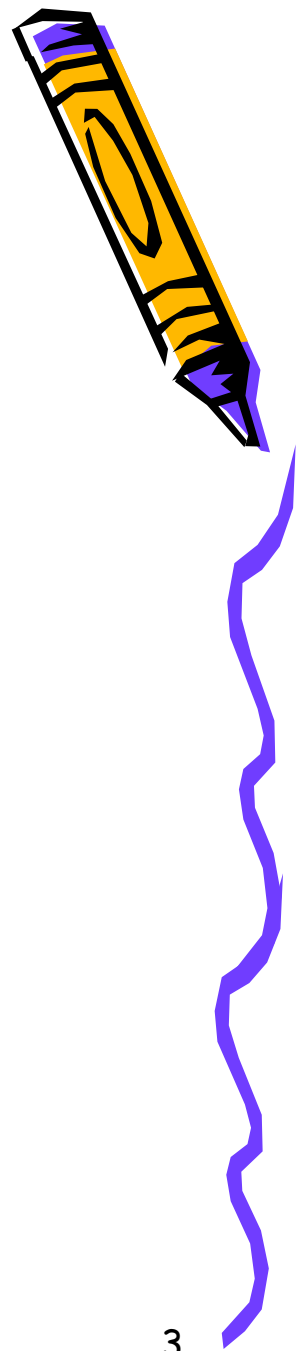
« Πάνω από το 85% της διδασκαλίας στα σχολεία αποτελείται από διαλέξεις ,...ενώ οι φοιτητές απομονωμένοι μεταξύ τους δεν αλληλεπιδρούν (Holubec, & Roy, 1984).



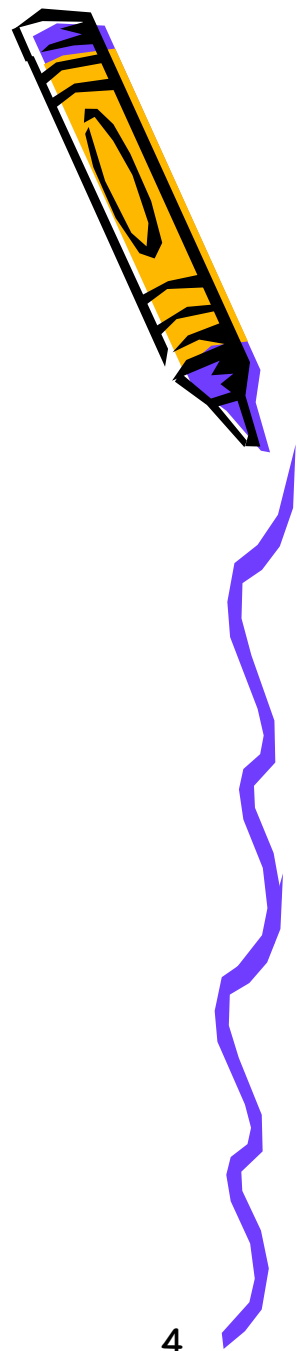
«η συνεργατική μάθηση ως διδακτική προσέγγιση σήμερα χρησιμοποιείται λιγότερο συχνά»  
(Johnson & Johnson, 1991).

# *Κάποιοι ερευνητές επισημαίνουν.*

- τα πλεονεκτήματα  
της συνεργατικής  
μεθόδου δεν είναι  
πάντοτε ορατά.*



# η συνεργατική μέθοδος δεν έχει πάντα θετικά αποτελέσματα



Τα συμπεράσματα κάποιων ερευνητών:

- οι μαθητές δεν έχουν μάθει να συνεργάζονται:
- δεν έχουν αναπτύξει κατάλληλες δεξιότητες επικοινωνίας
- λειτουργούν ανταγωνιστικά
- παραγκωνίζονται κάποια μέλη της ομάδας
- οι λύσεις που προτείνουν συνεργαζόμενοι δεν έχουν επιστημολογική εγκυρότητα.



# αρκετοί ερευνητές παρουσιάζονται επιφυλακτικοί

- Salomon & Globerson (1987): « Η συνεργασία μεταξύ των παιδιών, συχνά -αποτελέσματα ΟΧΙ επιτυχή».
- Ματσαγγούρας (2000): « Οι μαθητές στερούνται δεξιοτήτων ,  
- **ανάγκη από άμεσες υποδείξεις**
  - ευκαιρίες συνεχούς εξάσκησης σ' αυτές»
- Sfard ( 2001), :
  - οι επικοινωνιακές δεξιότητες των σπουδαστών θα πρέπει να διδαχθούν.
  - **Δάσκαλος: προσεχτικός όταν αποφασίζει ποιος πρέπει να είναι ο συνεργάτης ενός δεδομένου παιδιού στη συνεργατική μάθηση των μαθηματικών. »**



## Οι έρευνες καρποφόρησαν ας "σταχυολογήσουμε τα ερωτήματα:

- ❖ Ποιες είναι **οι επικοινωνιακές δεξιότητες** για τις οποίες μιλά η Sfard; κατά πόσο αυτές διαφοροποιούνται στα μαθηματικά και με ποιον τρόπο μπορούν να διδαχθούν στους μαθητές;
- ❖ Ποια η διαδικασία :  
**οι λύσεις** που προτείνουν οι μαθητές συνεργαζόμενοι σε μαθηματικές δραστηριότητες να έχουν **επιστημολογική εγκυρότητα**;
- ❖ Ποιος είναι **ο ρόλος του εκπαιδευτικού** αλλά και **οι ρόλοι των μαθητών** Όταν η μάθηση στηρίζεται στην αλληλεπίδραση;
- ❖ Πώς μπορεί **να παρατηρηθεί η αύξηση του ατομικού επίπεδου μάθησης** με το να αφήνουμε τους μαθητές να εργάζονται σε μικρές ομάδες σε ένα μαθηματικό πρόβλημα;

## Συνεργατική διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών.

- έκθεση της διεθνούς επιτροπής της Ουνέσκο :

Ο τρίτος πυλώνας της εκπαίδευσης για τον 21ο αιώνα,

είναι να μάθουμε τους μαθητές **να υπάρχουν μαζί** και **να συνεργάζονται**

πως μεγαλώνει

το δέντρο αυτό....



- (Johnson, Johnson, & Holubec, 1986): « Σε μια συνεργατική μάθηση των μαθηματικών οι μαθησιακοί στόχοι επιτυγχάνονται ευκολότερα..»
- .. οι μαθητές συζητούν το θέμα, βοηθούν ο ένας τον άλλο να μάθουν, και ενθαρρύνουν κάθε μέλος της ομάδας
- (Mc Keachie ,1986): « Οι μαθητές έχουν περισσότερες πιθανότητες να αποκτήσουν κριτική σκέψη και μεταγνωστικές στρατηγικές μάθησης, όπως το πώς να μαθαίνουν, όταν εργάζονται σε μικρές ομάδες, σε αντίθεση με το να ακούν διαλέξεις».
- Galton & Williamson (1992) « η ομαδική εργασία βελτιώνει την αυτό -εκτίμηση καθώς και την παρακίνηση (τα κίνητρα) των μαθητών



# συναισθήματα και μαθηματικά..



Thompson και Thompson (1989): διερευνώντας τη **συναισθηματική κατάσταση** των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, διαπίστωσαν ότι κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων υπήρχε ένα **ευχάριστο κλίμα** στην τάξη, το οποίο βοήθησε να ελαττωθεί **το άγχος** και τα αρνητικά συναισθήματα για τα μαθηματικά.

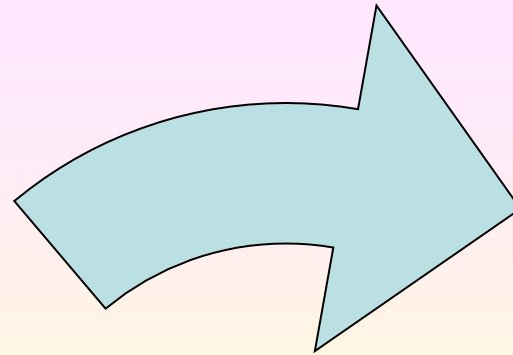
- **Αλληλεπίδραση και αυτορρυθμιζόμενη μάθηση.**

- νεότερες μελέτες (**Schunk and Zimmerman, 1998**) και (**Zimmerman, 1998**)

χαρακτηριστικά των μαθητών που επιτυγχάνουν μια αυτορρυθμιζόμενη μάθηση:

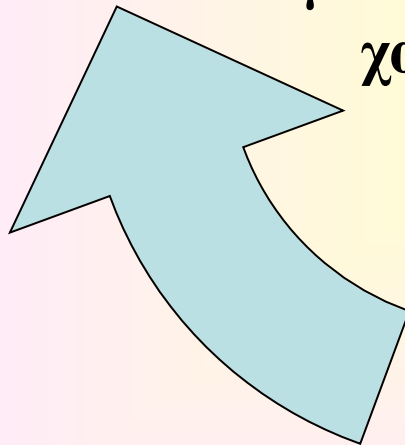
- ο **γνωρίζουν** πώς να χρησιμοποιήσουν  
μια σειρά **γνωστικών στρατηγικών**
- ο Ξέρουν πώς να διαχειρίζονται, τις άμεσες διανοητικές διαδικασίες – **μεταγνώση.**
- ο **Σχεδιάζουν και ελέγχουν το χρόνο,**
- ο Ξέρουν πώς να αναζητήσουν βοήθεια από τους καθηγητές και τους συμμαθητές

συμμετέχουν  
όλο  
και περισσότερο  
στη  
συνεργατική  
μάθηση

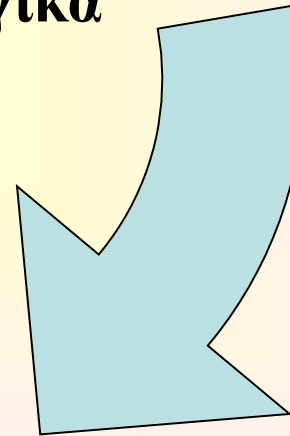


όλο και  
μεγαλύτερο  
επίπεδο  
αυτονομίας,

διεξάγουν  
διαλόγους  
με πιο επιστημολογικά  
χαρακτηριστικά.



μεγαλύτερο  
επίπεδο  
αυτορρύθμισης



# Θεωρητική Θεμελίωση..

## Θεωρία του κονστρουκτιβισμού

- (εποικοδομιστές) : **Jean Piaget (1896-1980)**
- **η μάθηση** : ενεργός διαδικασία στην οποία οι μαθητές κατασκευάζουν τη γνώση με ενεργητικό τρόπο.
- **η διδασκαλία** : μέσω της διερεύνησης καταστάσεων από τους ίδιους τους μαθητές.
- **Έργο του δασκάλου** : να προσφέρει ευκαιρίες στους μαθητές δίνοντάς τους να **επιλύσουν προβλήματα** για τη λύση των οποίων η έννοια που θέλει να διδάξει αποτελεί το **βασικότερο εργαλείο**.

# ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΗ Θεωρία

## Lev Vygotsky(1836-1934):

### ❖ **V Y G O T S K Y :**

❖ η κοινωνική αλληλεπίδραση θεμελιώδη ρόλο στην ανάπτυξη της γνώσης

❖ η μάθηση - είναι ο δρόμος για να εισαχθεί το άτομο σε μια υπάρχουσα κουλτούρα.

❖ Η συμβολή των συμβόλων στην ανάπτυξη των ανώτερων νοητικών λειτουργιών είναι καθοριστική

❖ «ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης» τονίζει τη σημασία της συνεργατικής μεθόδου και της αλληλεπίδρασης με πιο ικανούς ενήλικες ή συμμαθητές

η δύναμη  
της γλωσσικής επικοινωνίας  
και των συμβόλων  
για τη μετάδοση της σκέψης

# Θεωρία της αλληλεπίδρασης ( Interactionism )

❖ η έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών εστιάζει πλέον στο κοινωνικό πλαίσιο της αίθουσας διδασκαλίας των μαθηματικών

• *Voigt 1994, Steinbring 1998, Wood 1997, Sfard 1998, Bartolini Bussi 1998, Kieren 1997*

• οι αλληλεπιδράσεις στη σχολική τάξη

• αλληλεπίδραση = ανάπτυξη.

• είδος της γνώσης = είδος της επικοινωνίας

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο πραγματοποιείται η **διαπραγμάτευση** των μαθηματικών εννοιών και δημιουργείται η **μαθηματική σκέψη**.

• Κατά τη **διαπραγμάτευση** των μαθηματικών εννοιών **κοινά νοήματα** : όρους, σύμβολα, σχέσεις, σχεδιαγράμματα κλπ

# Sierpinska (1998) : μια διαφορετική διαπραγμάτευση θα μαθευτεί σε κάθε τάξη των μαθηματικών.

το είδος των μαθηματικών που θα μαθευτούν στη σχολική τάξη

=

το είδος της διαπραγμάτευσης των μαθηματικών εννοιών

$$3X+12=X+18$$

επίλυση εξίσωσης:

Αναγωγή ομοίων όρων:

( μεταφέρω γνωστούς δεξιά και αγνώστους αριστερά. Κάθε όρος που μεταφέρεται αλλάζει πρόσημο) :

$$3x-x= 18-12$$

$$\text{Οπότε: } 2x=6$$

$$3X+12=X+18$$

επίλυση εξίσωσης:

Αναγωγή ομοίων όρων: απαλείφω όρους διατηρώντας την ισότητα:

$$3x+12-12 = x+18-12$$

$$3x=x+6 \text{ και } 3x-x=(x-x)+6$$

$$\text{Οπότε: } 2x=6$$

# τα σύμβολα

( Martin Hughes 1981 )

- ❖ σημασία και στους δυο τρόπους αναπαράστασης, των συγκεκριμένων και των συμβολικών
  - ❖ να υπάρχουν σημαντικές διασυνδέσεις ανάμεσά τους

❖ Piaget : απορρίπτει την επιβολή του μαθηματικού συμβολισμού στους μικρούς μαθητές.

□ προτιμότερο : δικής τους επινόησης αναπαραστάσεις που έχουν νόημα για τους ίδιους

❖ Vygotsky: Η συμβολή των συμβόλων είναι καθοριστική για την ανάπτυξη των ανώτερων νοητικών λειτουργιών



# συνοψίζοντας:

Σύγχρονες επιστημολογικές θεωρήσεις για τη μάθηση των μαθηματικών

- ❑ Κονστрукτιβισμός,
- ❑ Κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις
- ❑ Ιντεραξιονισμός

Κοινή θέση:

Έργο του σύγχρονου δασκάλου των μαθηματικών:

προτεραιότητα στον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές.

Η μαθηματική γνώση στη σύγχρονη τάξη των μαθηματικών

οι μαθητές έχουν πλέον καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή του μαθηματικού νοήματος .

# 1. ΟΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΕΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ:

Yackel , Cobb ( 1996 ) : διάκριση ανάμεσα  
στους κανόνες επικοινωνίας:  
γενικοί κοινωνικοί κανόνες \* mathematical Κανόνες

## κοινωνικοί κανόνες

- συγκέντρωση στα λεγόμενα
- ακούω προσεχτικά τους άλλους
- σέβομαι τη γνώμη τους
- ρωτώ αφού έχω προσπαθήσει αρκετά
- χαμηλός τόνος φωνής κ.α

- σκέφτομαι πάνω σε μια έννοια
- εξηγώ τη σκέψη μου στους άλλους
- αιτιολογώ πάντα τις ενέργειές μου
- συγκρίνω τις σκέψεις-ενέργειές μου
- προσαρμόζω τη δράση μου

## μαθηματικοί κανόνες

- Τι μετράει ως μαθηματικώς :
- διαφορετικό
- αποδεκτό
- αποτελεσματικό
- εξελεγμένο
- (πρωτότυπες λύσεις.)

# Ρόλος δασκάλου.

- (Von Glasersfeld 1995): « Ο δάσκαλος πρέπει να ακούει το μαθητή, ο οποίος εξηγεί τι κάνει και τι λέει, και να προσπαθεί να φτιάξει ένα μοντέλο των δομών της σκέψης του μαθητή. ... είναι σημαντικό να θεωρεί ότι αυτά που κάνει και αυτά που λέει ο μαθητής όταν λύνει ένα πρόβλημα είναι όλα όσα εκείνη τη στιγμή έχουν κάποιο νόημα στη σκέψη του μαθητή.»
- ( Wood 1995 ) :«..οι δάσκαλοι θα χρειαστούν ευκαιρίες προκειμένου να μάθουν για τις κατασκευές των μαθητών τους. Για να το επιτύχουν αυτό πρέπει να δημιουργούν τις κατάλληλες συνθήκες που ενθαρρύνουν σε νοητική δραστηριότητα παρέχοντας κοινωνικές καταστάσεις όπως η συζητήσεις με όλη την τάξη, η επίλυση προβλήματος με συνεργασία με μικρές ομάδες στα μαθηματικά, στις οποίες η επικοινωνία μπορεί να επιτευχθεί»

# Στην τάξη των μαθηματικών

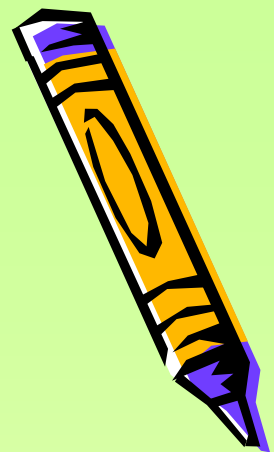
Οι κανονιστικές ρυθμίσεις (νόρμες) που είναι αναγκαίες για μια μαθηματική συζήτηση:

- ❖ Εμπλουτίζονται συνεχώς με τις συνεχείς αλληλεπιδράσεις μέσα από της διαδικασία της διαπραγμάτευσης

Οι συζητήσεις στην τάξη είναι εποικοδομητικές για το δάσκαλο

- ❖ ακούει τις διαφορετικές λύσεις των μαθητών
- ❖ ενημερώνεται για τις εννοιολογικές τους δυνατότητες ,
- ❖ επικυρώνει τις επιστημολογικά σωστές εκφράσεις
- ❖ τονίζει τις πραγματικά αναπτυξιακά εξελιγμένες λύσεις
- ❖ κατανοεί την εννοιολογική ανάπτυξη των μαθητών

« Αυτό αναδεικνύει την αμφίδρομη σχέση μεταξύ της ίδρυσης κανόνων *sociomathematical* και της αύξησης της κατανόησης του καθηγητή για το μαθηματικώς διαφορετικό , την εξελιγμένη λύση και την αποτελεσματικότητα.» ( Erna Yackel, Paul Cobb , 1996)



# Ο ρόλος του δασκάλου στην εγκατάσταση των κανόνων

**Το πρόβλημα:**

5 κατοικίες

3 όροφοι-3 διαμερίσματα-3 τζαμόπορτες

100 ευρώ η τζαμόπορτα

μαθηματικώς διαφορετικό

μαθηματικώς εξελιγμένο

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 100 &= \\ 15 \cdot 9 \cdot 100 &= \\ 15 \cdot 900 &= \mathbf{13.500} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 100 &= \\ 5 \cdot 27 \cdot 100 &= \\ 135 \cdot 100 &= \mathbf{13.500} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 100 &= \\ 5 \cdot 3^3 \cdot 100 &= \\ 5 \cdot 27 \cdot 100 &= \\ 5 \cdot 2.700 &= \mathbf{13.500} \end{aligned}$$

**Το πρόβλημα:**

(νοερά)

$$13+14+3=$$

διαφορετικό

εξελιγμένο

$$\begin{aligned} 13+14+3 &= \\ 23+4+3 &= \\ 27+3 &= \mathbf{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10+10+4+3+3 &= \\ 20+10 &= \mathbf{30} \end{aligned}$$

$$13+7+7+3=$$

$$20+10=30$$

(Sierpinska 1998 ):

- Ο δάσκαλος: διακριτικό και όχι παρεμβατικό τρόπο -
- οι εκφράσεις μέρος ενός διαλόγου -διαπραγμάτευσης
- οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη νέα γλώσσα
- επικοινωνώντας τις σκέψεις τους να κατανοήσουν τη σημασία της.

# Οι ρόλοι που αναλαμβάνουν οι μαθητές καθώς συνεργάζονται

- Τάτσης και Κολέζα (2006): μελέτησαν ζεύγη μαθητών καθώς εργάζονταν συνεργατικά σε επίλυση προβλημάτων τέσσερις χαρακτηριστικούς ρόλους:
  - τον κυρίαρχο εκκινητή,
  - τον εμπνευστή της συνεργασίας,
  - τον αξιολογητή της συνεργασίας
  - τον ανασφαλή μεσολαβητή.





## Συνεργατικές δυάδες μοντέλα παρατήρησης ατομικού επίπεδου μάθησης

### Πλεονεκτήματα:

- ✓ ευέλικτο σχήμα
- ✓ ελεγχόμενες συμπεριφορές
- ✓ ελεγχόμενοι οι ρόλοι των μαθητών
- ✓ εύκολη παρατήρηση ατομικού επιπέδου μάθησης

Sfard ( 2001 ) : ανάλυση των διαλόγων:  
ερμηνεία για την επικοινωνία σε  
object -level και σε meta-level επίπεδο.

Dekker και Elshout- Mohr (1998):  
μοντέλο διαδικασία :  
τέσσερις βασικές δραστηριότητες:

- ✓ να δείξει την εργασία του
- ✓ να εξηγήσει την εργασία
- ✓ να δικαιολογήσει την εργασία
- ✓ να συγκρίνει και να ανακατασκευάσει την εργασία

# “το έργο” ένα βασικό εργαλείο

- ❖ **VAN BOXTEL** : Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη της συνεργατικής μάθησης, είναι η προσεκτική κατασκευή του έργου.
- ❖ βασικά χαρακτηριστικά ενός αποτελεσματικού έργου:
  - ❖ το μαθηματικό περιεχόμενο,
  - ❖ οι πολλαπλές παραστάσεις,
  - ❖ η γενίκευση των προτύπων με τρόπο ώστε να απαιτεί οι μαθητές να ανακαλύπτουν, να εξηγούν και να δικαιολογούν
  - ❖ η παράλληλη ύπαρξη δομημένων - αδόμητων ανοικτών ερωτήσεων
  - ❖ η χρήση πινάκων και διαγραμμάτων.



# Η έννοια του αριθμού $N$

1 <sup>ος</sup> αριθμός	2 <sup>ος</sup> αριθμός	3 <sup>ος</sup> αριθμός	4 <sup>ος</sup> αριθμός	15 <sup>ος</sup> αριθμός	$\nu$ <sup>ος</sup> αριθμός
1	2	3	.....	.....	.....

100 <sup>ος</sup> αριθμός	101 <sup>ος</sup> αριθμός	102 <sup>ος</sup> αριθμός	103 <sup>ος</sup> αριθμός	110 <sup>ος</sup> αριθμός	$\nu$ <sup>ος</sup> αριθμός
100+1	101+1	102+1	.....	.....	.....+.....

100 <sup>ος</sup> αριθμός	101 <sup>ος</sup> αριθμός	102 <sup>ος</sup> αριθμός	103 <sup>ος</sup> αριθμός	110 <sup>ος</sup> αριθμός	$\nu$ <sup>ος</sup> αριθμός
100-1	101-1	102-1	.....	.....	.....-.....

● **Το έργο της αναδίπλωσης του Εμβαδού:**

• **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η**

Την πρώτη μέρα του Δεκέμβρη μια μεγάλη δεξαμενή πετρελαίου ήταν γεμάτη ως τη μέση. Κάθε μέρα αδειάζει **το μισό της περιεχόμενο**. Συμπληρώστε τον πίνακα του δείκτη της δεξαμενής:

( δίνεται:  $2^{15} = 32.768$  )

1η	2η	3η	4η	15η	νη
1/2	1/4	1/..	.....	....	X
$1/2^1$	$1/2^2$	.....	.....	.....	$\frac{1}{\dots}$

• **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η**

Την πρώτη μέρα του Ιανουαρίου η μεγάλη δεξαμενή πετρελαίου ήταν γεμάτη. Κάθε μέρα αδειάζει το μισό της περιεχόμενο.

Συμπληρώστε πάλι τον πίνακα του δείκτη της δεξαμενής:

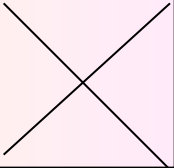
1η	2η	3η	4η	15η	νη
■	1/2	1/4	1/.	....	X
■	$1/2^1$	$1/2^2$	.....	.....	$\frac{1}{\dots}$

• **16.384**

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Το φύλλο που σας δίνεται έχει διαστάσεις :  $\alpha = 30$  εκ το μήκος και  $\beta = 20$  εκ το πλάτος .

1. Βρείτε το **εμβαδόν** του φύλλου και ονομάστε το: **Εμβαδόν Ε1**
2. **Αναδιπλώστε** το φύλλο στη μεγαλύτερη πλευρά και **βρείτε το Εμβαδόν Ε2**
3. **Αναδιπλώστε πάλι** το φύλλο στη μεγαλύτερη πλευρά και βρείτε το **Εμβαδόν Ε3**
4. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα και παρατηρήστε **τους λόγους των Εμβαδών:**

Ορθογώνιο	Διαστάσεις ορθογωνίου		Εμβαδόν ορθογωνίου	Διαστάσεις ορθογωνίου		Εμβαδόν ορθογωνίου (με γράμματα )	Λόγοι Εμβαδών
E1	30 εκ	20 εκ	E1=....	$\alpha$	$\beta$	E1=....	
E2	.....	.....	E2=.....	.....	.....	E2=.....	$\frac{E2}{E1} = -$
E3	.....	.....	E3=.....	.....	.....	E3=.....	$\frac{E3}{E1} = -$

-Παρατηρώντας τους λόγους των Εμβαδών στον πίνακα υπολογίστε :  
 Το Εμβαδόν Ε5 που δημιουργείται με την 5η αναδίπλωση; .....

-Βασιστείτε στα συμπεράσματά σας για να υπολογίσετε  
 το Εμβαδόν της εκατοστής αναδίπλωσης Ε100: .....

-Υπολογίστε το Εμβαδόν της νιοστής αναδίπλωσης Ε<sub>ν</sub> ( .....

- η συνεργατική μάθηση στα μαθηματικά δεν μπορεί να είναι αποτελεσματική αν:
  - πρώτα οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί :
    - ✓ επικοινωνιακές δεξιότητες για το πώς πρέπει να μιλούν και να επιχειρηματολογούν για τα μαθηματικά
    - ✓ ποιους ρόλους οφείλουν να αναλάβουν και ποιους να αποφύγουν όταν συνεργάζονται
    - ✓ Πως να εργάζονται τόσο ατομικά όσο και συλλογικά με σχετική αυτονομία.
  - η στάση του εκπαιδευτικού στην τάξη εμποδίζει την ανάπτυξη της αυτόνομης μάθησης των μαθητών
  - το είδος του έργου δεν έχει σχεδιαστεί κατάλληλα