Υπάρχουν λάθη στα Μαθηματικά που είναι σχεδόν αδύνατο να τα αποφύγουν οι μαθητές;

Τσικοπούλου Στάμη, Φερεντίνος Σπύρος
stsikop@otenet.gr, sferent@otenet.gr

τ. Σχολικοί Σύμβουλοι Μαθηματικών

Περίληψη. Αρχικά θα αναφερθούμε στις δύο βασικές θεωρίες μάθησης που ερμηνεύουν τα λάθη στα μαθηματικά (παραδοσιακές και νεώτερες διδακτικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις). Στη συνέχεια, επειδή τα λάθη στα μαθηματικά οφείλονται κυρίως στα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της μάθησης, θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των εμποδίων που συνδέονται με τη μαθησιακή διαδικασία (εμπόδια συναισθηματικού και κοινωνικού τύπου, καθώς και εμπόδια οντογενετικής, διδακτικής και επιστημολογικής προέλευσης). Στη μελέτη αυτή θα επικεντρωθούμε κυρίως στα εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης, τα οποία οφείλονται στην ίδια τη φύση του μαθηματικού αντικειμένου και χαρακτηρίζονται από την επανεμφάνισή τους τόσο στην ιστορία των μαθηματικών όσο και στη μάθηση των μαθηματικών από το άτομο και τα οποία είναι σχεδόν αδύνατο να τα αποφύγουν οι μαθητές. Ακόμη, θα επιχειρηθεί μια κατάταξη των επιστημολογικών εμποδίων, θα παρατεθούν ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα και θα δοθούν κάποιες ερμηνείες για την προέλευσή τους.

Λέξεις κλειδιά: επιστημολογικά εμπόδια, λάθη στα μαθηματικά, αναλογικός και προσθετικός συλλογισμός, υπεργενίκευση.

Εισαγωγή

Πολύ συχνά παρατηρούμε τους μαθητές μας, όταν λύνουν μια άσκηση ή ένα πρόβλημα, να “παραμορφώνουν” μαθηματικούς τύπους, να γενικεύουν μεμονωμένες περιπτώσεις και να δημιουργούν δικούς τους κανόνες, με αποτέλεσμα να κάνουν “τραγικά” λάθη, όπως τα παρακάτω :

$$2^3=6,\ \frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{3}{7},\ x^{\cancel{2}}=6\cancel{x},\ (a+b)^2=a^2+b^2,\ \sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b},\ a^2=b^2 \Rightarrow a=b,\ \log(a+b)=\log a+\log b$$

Τα λάθη των μαθητών μας ενοχλούν. Τα ίδια και τα ίδια λάθη εμφανίζονται συνεχώς, αντιστέκονται στις «διορθώσεις» λες και η διδασκαλία παρ’ όλες τις προθέσεις μας, διδάσκει λάθη. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον υπολογισμό του 2^3. Ανάμεσα στις λανθασμένες απαντήσεις συναντάμε συχνότερα την $2^3=6$. Σε πολλές περιπτώσεις αρκεί να πούμε στους μαθητές που κάνουν το λάθος αυτό «είσαι σίγουρος;» και τότε θα τους δούμε να αλλάζουν την απάντησή τους και να μας δίνουν τη σωστή $2^3 = 8$. Λάθος από βιασύνη θα πουν πολλοί. Όμως είναι πιθανό, εάν μετά από ένα διάστημα οι ίδιοι μαθητές ερωτηθούν πόσο κάνει 2^4 να απαντήσουν 8. Και πάλι βιάζονται;

Σύμφωνα με τον Freud (1959) και το παραμικρό λάθος έχει την εξήγησή του. Οι μαθητές σπάνια δίνουν τυχαίες απαντήσεις. Οι απαντήσεις τους συνήθως σχετίζονται με τις γνώσεις που χρησιμοποιούν για να λύσουν το πρόβλημα. Σε πολλές περιπτώσεις, η υπάρχουσα γνώση, είναι ελλιπής ή μπορεί να έχει δομηθεί με εσφαλμένο τρόπο. Τα λάθη που κάνουν οι μαθητές μας σε όλες τις περιπτώσεις μαρτυρούν τη χρήση από την πλευρά τους μιας λογικής. Αλλά ποια είναι αυτή κάθε φορά; Πολλοί εκπαιδευτικοί για παράδειγμα, αποδίνουν την παραπάνω απάντηση, 2^3=6, σε «σύγχυση» ανάμεσα στο 2^3 και το 2×3. Είναι όμως πειστική αυτή η εξήγηση;

Από τις διάφορες έρευνες που κατά καιρούς δημοσιεύονται (π.χ. De Bock et al., 1998; Freudenthal, 1983; Borasi, 1996; Tall, 1989; Modestou & Gagatsis, 2007; κ.ά.), διαπιστώνεται ότι, μεγάλος αριθμός μαθητών από διαφορετικές χώρες, κάνουν στα μαθηματικά τα ίδια λάθη. Επιπλέον, ακολουθούν την ίδια διαδικασία σκέψης και δημιουργούν τις ίδιες στρατηγικές για τη λύση των ίδιων προβλημάτων. Όλα αυτά είναι μια ένδειξη ότι, πέρα από παράγοντες όπως η γεωγραφική περιοχή, η πολιτισμική παράδοση, το οικογενειακό και σχολικό περιβάλλον, η μέθοδος διδασκαλίας κ.λπ., που οπωσδήποτε συντελούν στη μάθηση, τα παιδιά που συμμετείχαν στις έρευνες αυτές, μαθαίνουν ακολουθώντας τις ίδιες γνωστικές διαδικασίες και δομούν τη γνώση με τρόπους που οδηγούν στους ίδιους τύπους λαθών. Από τη μελέτη των λαθών που κάνουν πολλοί και διαφορετικοί μαθητές, προκύπτουν σημαντικές ενδείξεις για τη φύση της επεξεργασίας των πληροφοριών από το μαθητή. Γιατί τα λάθη συχνά υποδηλώνουν την εγκατάσταση και χρησιμοποίηση ενός, συνήθως του ίδιου, λαθεμένου πλαισίου γνώσης.

Τα λάθη στα μαθηματικά οφείλονται σε πολλούς παράγοντες, όπως για παράδειγμα σε αβλεψία, έλλειψη ενδιαφέροντος, έλλειψη συγκέντρωσης, βιαστική επίλυση ή το γεγονός ότι δεν παρατηρήθηκε ένα βασικό χαρακτηριστικό σε ένα πρόβλημα, κ.λπ. Η σύγχρονη διδακτική αναγνωρίζει ένα πλήθος παραγόντων που καλλιεργούν τις συνθήκες για την εμφάνιση του λάθους, συμπεριλαμβανομένων γνωστικών και συναισθηματικών παραγόντων. Η διερεύνηση των αιτιών του λάθους, αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για μια σωστή διάγνωση και διαχείρισή τους από τον εκπαιδευτικό.

Λάθος και θεωρίες μάθησης

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα γιατί οι μαθητές κάνουν λάθη στα μαθηματικά, χρειαζόμαστε να τα εντάξουμε σε μια θεωρία μάθησης. Δύο εναλλακτικές θεωρίες μπορούν να εξηγήσουν τα λάθη:

Σύμφωνα με το ***παραδοσιακό μοντέλο*** (μοντέλο μετάδοσης ή μεταφοράς της γνώσης), η διδασκαλία των μαθηματικών περιορίζεται στην επίλυση τυποποιημένων ασκήσεων που λύνονται μηχανικά με τεχνικές απομνημόνευσης, ενώ παράλληλα αποδοκιμάζεται κάθε αποτυχία επίτευξης της «μοναδικής» ορθής λύσης (Χαιρέτη, 2009). Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, το λάθος είναι ένδειξη μιας ατελούς εργασίας του μαθητή, ο οποίος δεν έχει ακόμη συσσωρεύσει μια «επαρκή ποσότητα γνώσης» ώστε να το αποφύγει. Για την αντιμετώπιση του λάθους αρκεί να υποδειχθεί από τον δάσκαλο το σωστό και να δοθούν στο μαθητή προς εξάσκηση πολλές ασκήσεις της ίδιας μορφής. Το λάθος έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργεί στο μαθητή συναισθήματα απογοήτευσης και αποθάρρυνσης και αυτός να εντείνει τη προσπάθειά του για την αποφυγή του λάθους τόσο πολύ, ώστε πολλές φορές να αποφεύγει να ασχοληθεί με την επίλυση του προβλήματος (Ernest, 1996).

Σύμφωνα με τις νεώτερες διδακτικές και παιδαγωγικές προσεγγίσεις, όπως ***η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων*** (Brousseau, 1997), τα λάθη είναι απαραίτητα στη διαδικασία μάθησης, και ο δρόμος της μάθησης είναι αναγκαίο να διέλθει από την (προσωρινή) κατασκευή λανθασμένων γνώσεων, επειδή η συνειδητοποίηση των λόγων για τους οποίους αυτή η γνώση είναι λανθασμένη είναι απαραίτητη στην κατασκευή και την κατανόηση της νέας γνώσης. Τα λάθη μπορούν από τη φύση τους να δημιουργήσουν μια κατάσταση γνωστικής σύγκρουσης που να οδηγήσει τους μαθητές σε μια κριτική επεξεργασία των διαδικασιών που εφάρμοσαν με στόχο να αποκτήσουν πιο πολλές πληροφορίες ή ακόμα και να “αναπροσαρμόσουν τις θεωρίες τους”(Borasi, 1996). Σύμφωνα με την Κολέζα (2009), το λάθος είναι γνώση. Επομένως η ανάλυση των λαθών είναι δυνατό να καταστεί χρήσιμο εργαλείο στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών. Εξ άλλου όπως τονίζει και ο Cipra (1985), «Όποιος ασχολείται με την επιστήμη ξέρει καλά ότι η δύναμή του δεν προέρχεται από το αλάνθαστο, αλλά αντίθετα από την ικανότητά του για συνεχή αυτοδιόρθωση».

Όλοι οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας, καταγωγής και επίδοσης έχουν βιώσει σε κάποια φάση της ζωής τους μια μικρή ή μεγάλη αποτυχία στα μαθηματικά. Έτσι, ήταν πολύ φυσικό, τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και για τους ψυχολόγους, να δείξουν από πολύ νωρίς ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο θέμα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία πολλών θεωριών για τη φύση των λαθών στα μαθηματικά, για την ερμηνεία τους, καθώς και για πιθανούς τρόπους αντιμετώπισής τους (Μοδέστου, 2006) .

Εμπόδια και λάθη

Τα λάθη στα μαθηματικά οφείλονται κυρίως στα εμπόδια που συναντούν οι μαθητές κατά τη διαδικασία της μάθησης και τα οποία σχετίζονται με διάφορους παράγοντες.

Α. Αν προσπαθήσουμε να ταξινομήσουμε τα εμπόδια με βάση την πηγή προέλευσής τους, εξετάζοντας συναισθηματικούς και κοινωνικούς παράγοντες, τότε θα διακρίναμε τα εξής εμπόδια:

Εμπόδια ψυχολογικής προέλευσης

Τα εμπόδια ψυχολογικής προέλευσης είναι διαφόρων ειδών, αλλά η πλήρης ανάπτυξή τους ξεφεύγει από το στόχο του συγκεκριμένου άρθρου. Γι΄αυτό θα γίνει αναφορά μόνο σε ένα από αυτά, που συνδέεται με τη φύση των μαθηματικών. Για πολλούς μαθητές τα μαθηματικά μοιάζουν ως ένα σύνολο αυστηρών και απαράβατων κανόνων και εντολών που είναι υποχρεωμένοι να εκτελέσουν. Οι κανόνες των μαθηματικών δεν επιδέχονται καμία εξαίρεση. Ο χαρακτήρας αυτών των κανόνων είναι πολύ περισσότερο αυστηρός από αυτών, για παράδειγμα, της ορθογραφίας. Η έλλειψη σεβασμού στους κανόνες της ορθογραφίας (το λάθος ή η παράλειψη) δεν σημαίνει πάντοτε και σημαντική αλλοίωση του νοήματος. Επίσης εάν σε ένα κείμενο ιστορίας ξεχαστούν ορισμένες λεπτομέρειες ή κάποιες χρονολογίες είναι δυνατό να γίνει αντιληπτό το ευρύτερο νόημα. Όμως η ανυπακοή στους κανόνες των μαθηματικών καθιστά αδύνατη τη χρήση τους και συχνά διαστρέφει πλήρως το νόημα των μαθηματικών εκφράσεων. Στους μαθητές τα μαθηματικά συχνά φαντάζουν ως μια επιστήμη του «όλα ή τίποτα», γιατί ένα λάθος μπορεί να κοστίσει πολύ μεγαλύτερη απώλεια βαθμών σε σχέση με ένα λάθος σε άλλα μαθήματα. Δεν είναι τυχαία η φράση που συχνά ακούγεται μετά από ένα διαγώνισμα ή τεστ στα Μαθηματικά «το έλυσα» ή «δεν το έλυσα», σε αντίθεση με άλλα μαθήματα που ακούγεται η φράση «στο τάδε ερώτημα ή ζήτημα πήγα αρκετά καλά». Τα λάθη στα μαθηματικά προκαλούν αρνητικά συναισθήματα και δημιουργούν σε πολλές περιπτώσεις μαθηματικοφοβία.

Εμπόδια κοινωνικής προέλευσης

Όπως και για τα εμπόδια ψυχολογικής προέλευσης, θα γίνει ενδεικτική αναφορά μόνο σε ένα από αυτά, που αφορά τη γλώσσα, γιατί είναι προφανές ότι, η διαδικασία μάθησης στα μαθηματικά, αλλά και στα άλλα μαθήματα, δεν εκτελείται στο κενό, αλλά σε ένα περιβάλλον με συγκριμένες κοινωνικές παραμέτρους, όπου κυρίαρχο ρόλο παίζει η γλωσσική μάθηση η οποία αποτελεί το όχημα για την εκμάθηση των επί μέρους διδακτικών αντικειμένων. Σύμφωνα με τον Bernstein (1981) τα παιδιά εκτίθενται από μικρά σε διαφορετικά πρότυπα γλωσσικής μάθησης. Τα διαφορετικά συστήματα λόγου, ο «επεξεργασμένος» ή ο «περιορισμένος» γλωσσικός κώδικας που χρησιμοποιούν, ανάλογα με το κοινωνικό πλαίσιο που βιώνουν, καθορίζουν εν πολλοίς το είδος και την ποιότητα της μάθησής τους. Οι μαθητές που έχουν εκτεθεί για παράδειγμα, από μικρή ηλικία, σε πλούσιες εμπειρίες στη μέτρηση ή στο χειρισμό αφηρημένων εννοιών τοποθετούνται καλύτερα στα μαθηματικά στο πλαίσιο του σχολείου απ’ τους συμμαθητές τους που οι εμπειρίες είναι φτωχότερες. Η Κοινωνιολογία της Εκπαίδευσης υποστηρίζει ότι η σχολική επίδοση σχετίζεται και με την κοινωνική και οικονομική προέλευση των μαθητών/ -τριών.

Β. Αν προσπαθήσουμε να ταξινομήσουμε τα επόδια με βάση την πηγή προέλευσης τους, εξετάζοντας το υποσύστημα (δάσκαλος-μαθητής-γνώση), τότε θα διακρίναμε τα εξής εμπόδια:

Εμπόδια οντογενετικής προέλευσης

Τα εμπόδια οντογενετικής προέλευσης οφείλονται στα χαρακτηριστικά της διαδικασίας εξέλιξης των νοητικών ικανοτήτων του ατόμου και είναι αυτά που παρουσιάζονται εξαιτίας των ορίων του μαθητή (νευροφυσιολογικά κ.ά) κατά τη διάρκεια της εξέλιξής του. Δηλαδή, ο μαθητής αναπτύσσει τις γνώσεις του σύμφωνα με τις ικανότητές και τους σκοπούς της συγκεκριμένης κάθε φορά ηλικίας του. Η γενετική επιστημολογία του Piaget, παρέχει αποδείξεις των σταδίων εξέλιξης των νοητικών ικανοτήτων (προσαρμογή και αφομοίωση) τα οποία μοιάζουν με τα στάδια εξέλιξης των εννοιών (Χαιρέτη, 2009). Για παράδειγμα, οι μαθητές που βρίσκονται στο Επίπεδο 1 του μοντέλου ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης κατά van Hiele (Γ΄– Στ΄ δημοτικού) μπορούν να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων και να τα ταξινομούν με βάσει τις ιδιότητές τους. Μπορούν όταν τους δοθούν ορθογώνια σχήματα, να παρατηρήσουν ότι αυτά έχουν ορθές γωνίες και ότι οι απέναντι πλευρές τους είναι ίσες. Δεν μπορούν όμως να αντιληφθούν τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και να δουν τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα. Οι σχέσεις αυτές είναι χαρακτηριστικές του Επιπέδου 2 (Ε΄ δημοτικού – Γ΄ γυμνασίου) (Φιλίππου, κ.ά, 2002). Όταν επομένως, στα παιδιά του γυμνασίου, που η γεωμετρική τους σκέψη βρίσκεται ακόμα στο Επίπεδο 1, τους δοθούν δραστηριότητες από το Επίπεδο 2, επειδή αντιμετωπίζουν εμπόδια στην κατανόηση, κάνουν λάθη. Όμοια, για να περάσουν οι μαθητές του λυκείου, στο επίπεδο της παραγωγικής σκέψης (Επίπεδο 3), πρέπει να έχουν κατακτήσει το προηγούμενο Επίπεδο 2, αλλιώς συναντούν εμπόδια.

Εμπόδια διδακτικής προέλευσης

Τα εμπόδια διδακτικής προέλευσης οφείλονται στο αναλυτικό πρόγραμμα (τον επιμερισμό της ύλης των μαθηματικών ανά τάξη), στις επιλογές των μαθησιακών δραστηριοτήτων, στα σχολικά εγχειρίδια, στις μεθόδους διδασκαλίας κ.ά. Για παράδειγμα, οι δεκαδικοί αριθμοί εξαιτίας της χρησιμότητάς τους παρουσιάστηκαν με τέτοιο τρόπο που τελικά συνδέθηκαν με το σύστημα μέτρησης και τους ακέραιους αριθμούς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα σήμερα, για τους μαθητές οι δεκαδικοί να είναι ακέραιοι αριθμοί με μία υποδιαστολή. Αυτό αποτελεί αργότερα ένα εμπόδιο για την σωστή κατανόηση των πραγματικών αριθμών, γιατί οι μαθητές προσπαθούν να εφαρμόσουν, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, το πλήθος των γνώσεων που έχουν για τους ακέραιους (Χαιρέτη, 2009).

Εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης

Τα εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης σχετίζονται με την εξέλιξη των επιστημών και τη διαδικασία ανάπτυξης της γνώσης. Τα εμπόδια επιστημολογικής προέλευσης οφείλονται στην ίδια τη φύση του αντικειμένου και χαρακτηρίζονται από την επανεμφάνισή τους τόσο στην ιστορία των μαθηματικών όσο και στη μάθηση των μαθηματικών από το άτομο. «Παραδοσιακά μέσα στη σχολική τάξη μια έννοια διδάσκεται μόνο στο βαθμό που είναι χρήσιμη και αποτελεσματική. Έτσι η γνώση αντλεί τελικά το νόημά της μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα, στα οποία η εφαρμογή της είναι επιτυχημένη, και τα οποία κατ’επέκταση συνιστούν την περιοχή εφαρμογής της συγκεκριμένης γνώσης. Αν λοιπόν η γνώση χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για αρκετό χρονικό διάστημα, παίρνει μια αξία που η διαφοροποίηση ή η απόρριψή της είναι πολύ δύσκολη. Αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο αντιστέκεται σε κάθε προσπάθεια απόρριψής του» (Μοδέστου, 2006).

Ένα επιστημολογικό εμπόδιο αποτελεί στην ουσία την πηγή ενός επαναλαμβανόμενου και μη τυχαίου λάθους το οποίο εμφανίζεται όταν τα άτομα προσπαθούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα (Radford et al., 2000). Σύμφωνα με την θεωρία των διδακτικών καταστάσεων η νέα γνώση προκύπτει από και σε σύγκρουση (ή αντιπαράθεση) με την προηγούμενη γνώση. Η αντιπαράθεση προκαλείται από τα εμπόδια. Ένα εμπόδιο είναι μια αντίληψη, πιθανώς μια γνώση η οποία ενώ ήταν αποτελεσματική στην επίλυση ενός τύπου προβλημάτων, αποτυγχάνει στην επίλυση ενός άλλου τύπου. Λόγω της προηγούμενης επιτυχίας “αντιστέκεται” σε προσπάθειες τροποποίησης ή απόρριψης με αποτέλεσμα να γίνεται εμπόδιο στην ανάπτυξη νέας γνώσης. Ως επιστημολογικό εμπόδιο χαρακτηρίζεται επομένως, μια αυθεντική γνώση η οποία αντιστέκεται στην κατασκευή κάποιας νέας γνώσης, αλλά είναι τέτοια ώστε η υπέρβαση αυτής της αντίστασης να αποτελεί μέρος της πλήρους κατανόησης της νέας γνώσης (Balacheff στο Θωμαΐδης 1995). Σύμφωνα με τον Brousseau (1997) **τα εμπόδια που θεωρούνται επιστημολογικά είναι αυτά που δε μπορούν και δεν πρέπει να αποφευχθούν,** επειδή έχουν πολύ σημαντικό ρόλο στη μάθηση, ενώ ακόμη μπορούν να εντοπιστούν και στην ιστορική εξέλιξη των ίδιων των εννοιών.

Ο Tall (1989) χρησιμοποιεί, με την ίδια σημασία, αντί του όρου επιστημολογικό, τον όρο ***γνωστικό εμπόδιο*** και υποστηρίζει ότι το γνωστικό εμπόδιο είναι μια γνώση που κάποτε υπήρξε ικανοποιητική για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων, με αποτέλεσμα να σταθεροποιηθεί στο μυαλό ενός μαθητή, αλλά στο μέλλον αποδεικνύεται ανεπαρκής και δεν μπορεί να προσαρμοσθεί. Κατά την Sierpinska (1994) “Τα επιστημολογικά εμπόδια δεν είναι εμπόδια στη "σωστή" κατανόηση: είναι εμπόδια στην αλλαγή του νοητικού πλαισίου”. Αυτή η ψυχολογική άποψη συμφωνεί με την φιλοσοφία του Bachelard (1938/1983), για τον οποίο, η "διανοητική μετάνοια" είναι αναγκαία για την "εύρεση της αλήθειας", όταν ο μαθητής χρειασθεί να αντιμετωπίσει καινούργια προβλήματα.

Στα παιδικά μυαλά αποτυπώνονται από πολύ νωρίς, βασικά μοντέλα που έχουν να κάνουν με τους φυσικούς αριθμούς και τα οποία είναι αρχικά η πρόσθεση, στη συνέχεια η αφαίρεση (όπου ο μειωτέος είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αφαιρετέο), ο πολλαπλασιασμός όπου σύμφωνα με την καθημερινότητα των μικρών παιδιών η λέξη «πολλαπλασιασμός» συνδέεται με κάτι μεγαλύτερο, η τέλεια διαίρεση όπου βιώνεται κυρίως ως μοίρασμα (ή και αφαίρεση) και το υπόλοιπο είναι μικρότερο από το διαιρέτη. Επίσης στο παιδικό μυαλό εγκαθίστανται διάφοροι κανόνες που σχετίζονται με το ρόλο και τη συσχέτιση των πράξεων στους φυσικούς αριθμούς. Στη συνέχεια καθώς το παιδί μεγαλώνει έρχεται σε επαφή με νέα μαθηματικά αντικείμενα, δεκαδικούς, κλάσματα, αρνητικούς ακεραίους κ.λπ., καθώς και με νέους ρόλους παλιών αντικειμένων (π.χ ο ρόλος των γραμμάτων στα μαθηματικά, η προτεραιότητα των πράξεων, ο ρόλος του πολλαπλασιασμού και ως διαδικασία μείωσης κ.λπ.) και σε μεγαλύτερες τάξεις με ακόμα συνθετότερες μαθηματικές διαδικασίες όπως η έννοια της απόδειξης σε αντίθεση με αυτήν της απλής διαπίστωσης (ισχύει γιατί το βλέπω), η έννοια του απείρου που εισβάλλει έμμεσα πολύ νωρίς. Στις περιπτώσεις αυτές το παιδί βιώνει συχνά έντονα, τη γνωστική σύγκρουση μεταξύ των αρχικών γνώσεων και δομών και των επόμενων γνώσεων. Δηλαδή έρχεται αντιμέτωπο με τα λεγόμενα επιστημολογικά εμπόδια, ο ρόλος των οποίων θα αναλυθεί αμέσως παρακάτω.

Τα επιστημολογικά εμπόδια συνδέονται κυρίως με δύο πυλώνες σκέψης –συλλογισμού, τον προσθετικό και τον αναλογικό συλλογισμό. Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά στα δύο αυτά βασικά είδη συλλογισμού, όχι μόνο στις μαθηματικές τους εκφράσεις, αλλά και στη γενικότερη σχέση τους με τις γνωστικές επιστήμες (ψυχολογία, θεωρίες μάθησης κ.λπ.).

Προσθετικός και αναλογικός συλλογισμός

Η ικανότητα συναγωγής λογικών συμπερασμάτων είναι ένα χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης. Σύμφωνα με τη Λογική, συλλογισμός είναι μια διαδικασία της σκέψης με την οποία καταστρώνεται μια σειρά αλληλένδετων προτάσεων-κρίσεων για να αποδειχθεί η αλήθεια μιας απόφανσης. Οι τρόποι συλλογισμού-επιχειρηματολογίας αποτελούν πολύ σημαντικό πεδίο μελέτης για τη Διδακτική των Μαθηματικών για το λόγο ότι οι μαθητές καλούνται συχνά να αιτιολογήσουν και να αποδείξουν την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης. Δύο είναι τα κύρια είδη των συλλογισμών: ο παραγωγικός και ο επαγωγικός.

Παραγωγικός είναι ο συλλογισμός, που σχετίζεται με την απόφαση για το τι είναι αληθές βάσει των κανόνων της λογικής και κάποιων δεδομένων καταστάσεων και γεγονότων. Ο παραγωγικός συλλογισμός έχει ως αφετηρία του το γενικό και αφηρημένο (έναν κανόνα, μια υπόθεση που θεωρείται γενικά αληθής) και ως κατάληξη το ειδικό και το συγκεκριμένο (μια ειδική περίπτωση).

Αντίθετα στον **επαγωγικό** συλλογισμό αρχίζουμε με παρατηρήσεις, μετρήσεις, πειραματικά δεδομένα, γεγονότα και περιστατικά - δηλαδή από συγκεκριμένες περιπτώσεις – και όταν κρίνουμε ότι το δείγμα είναι ικανοποιητικό, γενικεύουμε διατυπώνοντας το γενικό συμπέρασμα.

Δύο βασικά είδη επαγωγικού συλλογισμού είναι ο προσθετικός και ο αναλογικός:

Στον προσθετικό συλλογισμό η αύξηση μιας ποσότητας χ συνεπάγεται αντίστοιχη προσθετικού τύπου, αύξηση μιας ποσότητας ψ που συνδέεται με τη χ. Από πολύ νωρίς τα παιδιά εξοικειώνονται με τις προσθετικές σχέσεις μεταξύ αριθμών, οι οποίες είναι θεμελιώδεις στο σύστημα των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα: 0, 0+1, 1+1, 2+1, 3+1, 4+1, … αλλά και ο επόμενος και ο προηγούμενος φυσικός αριθμός, 5+2=7, 7+2, … ή 7-5=2 …

Αναλογικός συλλογισμός (να μη γίνει σύγχυση με το μαθηματικό αναλογικό ή γραμμικό μοντέλο ($f(x)=a\cdot x$, $a\neq 0$) που αποτελεί μια από τις μαθηματικές εκφράσεις της κατ' αναλογία σκέψης) είναι η παραδοχή ότι αν οι διαδικασίες και οι μηχανισμοί ενός συστήματος Α (σύνολο, φαινόμενο, πρόβλημα, κ.ά.) αντιστοιχίζονται με κάποιο τρόπο με τα αντίστοιχα στοιχεία ενός συστήματος Β τότε οι συνέπειες (τα συμπεράσματα, οι επεξηγήσεις, οι λύσεις, κ.λπ.) που αφορούν το σύστημα Α μπορούν να μεταφέρονται και στο σύστημα Β. Για παράδειγμα όπως αναφέρει η Βοσνιάδου (2001) το ηλιακό σύστημα με τον ήλιο να έλκει τους πλανήτες οι οποίοι περιστρέφονται γύρω του, μας βοηθά να σκεφτούμε το άτομο, με τον πυρήνα να έλκει τα ηλεκτρόνια που περιστέφονται γύρω του. Ο συλλογισμός αυτός στηρίζεται στα κοινά στοιχεία των δύο καταστάσεων και αγνοεί τις διαφορές τους.

Ο όρος «αναλογικός συλλογισμός» χρησιμοποιείται σε ένα πλαίσιο που είναι γενικότερο από το μαθηματικό και αποτελεί έναν από τους κυριότερους μηχανισμούς της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου (Vosniadou & Ortony, 1989). Ως επαγωγικός μηχανισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή/βάση) σε ένα άλλο (στόχο) (Modestou & Gagatsis, 2007). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς που χαρακτηρίζουν τα δύο συστήματα. Τα συστήματα αυτά μπορεί να συνιστούν έννοιες, θεωρίες ή προβληματικές καταστάσεις, ενώ παράλληλα, στις περισσότερες των περιπτώσεων, ανήκουν σε διαφορετικά πεδία με περίπου όμοια όμως δομή.

Κατά τη διαδικασία του αναλογικού συλλογισμού, οι άνθρωποι κτίζουν εννοιολογικές γέφυρες μεταξύ αντικειμένων και ιδεών που αλλιώς θα παρέμειναν στην εμπειρία ή στη σκέψη ως ξεχωριστές, διαχωρισμένες οντότητες. Σύμφωνα με τον English (2004), ο αναλογικός συλλογισμός είναι η ικανότητα συλλογισμού με μοτίβα και περιλαμβάνει τον εντοπισμό και την αναγνώριση της επανεμφάνισης του μοτίβου ανεξάρτητα από τη διαφοροποίηση των στοιχείων που περιλαμβάνει. Ο αναλογικός συλλογισμός και ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός σχετίζονται με τις ικανότητες του ατόμου να αναγνωρίζει και να γενικεύει μοτίβα και σχέσεις είτε αυτά αφορούν αντικείμενα είτε αφηρημένες έννοιες. Γιατί η εύρεση του μοτίβου δεν διαφέρει από την εύρεση της σχέσης ανάμεσα στους όρους της τυπικής αναλογίας.

Σύμφωνα με τον Vergnaud (1983) η κατανόηση απλών αναλογικών σχέσεων συνδέεται με το μοντέλο του ισομορφισμού των μέτρων.

Ο Polya (1954) θεωρεί ότι η μαθηματική αναλογία αποτελεί ειδική περίπτωση του αναλογικού συλλογισμού.

Για να μπορέσει κάποιος να περάσει από την προσθετική στην αναλογική λογική πρέπει να οικοδομήσει διαφορετικούς τρόπους κατανόησης σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων. Η εγκατάσταση της αναλογικής επιχειρηματολογίας επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές εκτεθούν στην έννοια της αναλογίας (Harel & Sowder, 2005 στο Χερουβείμ, 2010).

Στις μέρες μας δίνεται μεγάλη έμφαση στις αναλογικές σχέσεις μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών τόσο της δημοτικής όσο και της μέσης εκπαίδευσης. Γιατί η έννοια της αναλογίας υπάρχει μέσα σε όλο το μαθηματικό οικοδόμημα, ξεκινώντας από την ιδέα της μέτρησης ποσοτήτων, την έννοια των λόγων και την εφαρμογή του κανόνα των τριών στο δημοτικό και φτάνοντας μέχρι τη γραμμική άλγεβρα και τη χρήση γραμμικών μοντέλων στον απειροστικό λογισμό και τη στατιστική στη μέση εκπαίδευση (Μοδέστου, 2006).

Σύμφωνα με τον Ausubel (1968) η σημαντικότερη παράμετρος που συνδέεται με τα επιστημολογικά εμπόδια είναι ο τρόπος που οι μαθητές κατασκευάζουν τη γνώση, ο οποίος τρόπος κυρίως εξαρτάται από τις προηγούμενές τους γνώσεις και την εμπειρία τους. Ο Kuhn (1962) υποστηρίζει ότι τα άτομα προσκολλώνται σε ένα νοητικό εργαλείο που έλυσε πολλά προβλήματα στο παρελθόν και φαίνεται απλούστερο και κομψότερο από τα υπόλοιπα. Ο Rouche (2001) θεωρεί πως «λόγω της απλότητάς τους, οι αναλογικές ή γραμμικές σχέσεις εμφανίζονται αμέσως στο μυαλό του ανθρώπου» και εάν από την έκφραση αυτή αφαιρέσουμε τη φράση «οι γραμμικές σχέσεις εμφανίζονται αμέσως στο μυαλο του ανθρώπου» και κρατήσουμε τη φράση «λόγω της απλότητάς», θα έχουμε ένα σημαντικό κλειδί ερμηνείας του φαινομένου της ύπαρξης των επιστημολογικών εμποδίων.

Εδώ μπαίνει το ερώτημα «με ποιο τρόπο ο μαθητής ενεργοποιεί την προσθετική και την αναλογική σκέψη». Οι απαντήσεις είναι πολλές, ανάλογα με το θεωρητικό πλαίσιο που κινείται ο κάθε ερευνητής. Σύμφωνα με τη δική μας άποψη ο μαθητής παλινδρομεί με τη βοήθεια του μηχανισμού της υπεργενίκευσης σε παλαιότερα μοντέλα σκέψης που ενδεχομένως είναι πιο οικεία ή πιο ισχυρά.

Ο όρος **Υπεργενίκευση**, όπως και ο αναλογικός συλλογισμός έλκει την καταγωγή του από την Ψυχολογία και τις γνωστικές επιστήμες. Σύμφωνα με τον ψυχίατρο Καλημέρη (2013) “Υπεργενίκευση είναι η τάση να προκύπτει, χωρίς στοιχειοθέτηση, ένα γενικό συμπέρασμα μετά από θεώρηση ενός μεμονωμένου γεγονότος ή να χαρακτηρίζεται μια ολόκληρη ομάδα ατόμων από πράξεις ενός μικρού τμήματος της ομάδας αυτής” π.χ.“Οι δημόσιοι υπάλληλοι είναι τεμπέληδες”.

Στο πεδίο των μαθηματικών, μια περίπτωση υπεργενίκευσης είναι για παράδειγμα η άποψη πολλών μαθητών ότι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης είναι πάντα «μονοκοντυλιά». Σύμφωνα με τον Radatz (1979) βασική πηγή λαθών είναι η λανθασμένη εφαρμογή κανόνων, συνήθως μέσω του μηχανισμού της υπεργενίκευσης. Με την άποψη αυτή συμφωνεί και η Κολέζα (2012), η οποία ισχυρίζεται ότι όταν ο μαθητής, όταν βρεθεί αντιμέτωπος με επιστημολογικά εμπόδια παλινδρομεί με τη βοήθεια του μηχανισμού της υπεργενίκευσης σε παλαιότερα μοντέλα σκέψης (συνήθως παράγωγα της προσθετικής και της κατ’ αναλογία σκέψης) που ενδεχομένως ήταν πιο οικεία ή πιο ισχυρά. Χαρακτηριστικό, είναι το παράδειγμα που αναφέρει, όπου το λάθος : $x^2 -10x+ 21=12$ ή $(x-7)(x-3) =12$ ή $x-7=12$, ή $x-3=12$, ... βασίζεται πάνω στο περισσότερο οικείο και ισχυρό σχήμα: $x^2-5x+6=0$ ή $(x-3)(x-2)=0$ ή $x-3=0$, ή $x-2=0$, το οποίο γενικεύεται με λάθος τρόπο.

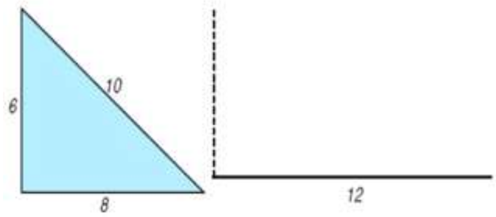
Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε ενδεικτικές, στα πλαίσια του διατιθεμένου χώρου για το άρθρο, περιπτώσεις επιστημολογικών εμποδίων.

Α. Εφαρμογή του Προσθετικού μοντέλου εκεί που αυτό δεν ισχύει

Οι μαθητές εφαρμόζουν προσθετικές στρατηγικές καθώς λύνουν προβλήματα αναλογιών. Ο λόγος που προτιμάται η προσθετική λογική είναι αυτός που έκφρασε ο Kuhn (1962), δηλαδή ότι τα άτομα προσκολλώνται σε ένα νοητικό εργαλείο που έλυσε πολλά προβλήματα στο παρελθόν και φαίνεται απλούστερο. Προφανώς η πρόσθεση είναι απλούστερη του πολλαπλασιασμού και ειδικότερα της αναλογίας ως ισότητα λόγων. Κλασσικό παράδειγμα εφαρμογής του προσθετικού μοντέλου είναι όταν σε μια κατάσταση προβλήματος, ένα μέγεθος Α αυξάνεται κατά μια ορισμένη ποσότητα ορισμένοι μαθητές πιστεύουν ότι ένα άλλο μέγεθος Β που συνδέεται με το Α αυξάνεται επίσης (με προσθετικό και όχι πολλαπλασιαστικό τρόπο) κατά την ίδια ποσότητα

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η παρακάτω δραστηριότητα που τέθηκε προς διαπραγμάτευση, από τους γράφοντες, σε μαθητές της Α΄ Γυμνασίου και η οποία περιέχεται στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Α΄ γυμνασίου, σελ 90.

"Σχεδίασε το ορθογώνιο τρίγωνο μεγεθυσμένο, έτσι ώστε η πλευρά μήκους 8 να αντιστοιχεί στο νέο σχήμα σε πλευρά μήκους 12. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές των δύο τριγώνων; "



Αρκετοί μαθητές θεωρώντας ότι, στο υπό κατασκευή τρίγωνο η πλευρά 12 προέκυψε από τη αντίστοιχη πλευρά του αρχικού τριγώνου, μετά από πρόσθεση σε αυτή του 4 (12=8+4), κατέληξαν ότι η άλλη πλευρά του υπο κατασκευή τριγώνου θα είναι 10 (6+4).

Σε έρευνα των Φράγκου, κ.ά (2006) δόθηκε σε μαθητές το παρακάτω ερώτημα :

"Στην διπλανή αναλογία προσπάθησε να βρεις τη χέση που υπάρχει στο πρώτο ζευγάρι (άνω γραμμή του πίνακα) και να συμπληρώσεις το κενό επιλέγοντας έναν από τους αριθμούς 17, 18 ή 19 στο δεύτερο ζευγάρι".

10	12
15	…

Οι περισσότεροι μαθητές συμπλήρωσαν το κενό επιλέγοντας το 17, θεωρώντας ότι το 12 στην άνω γραμμή του πίνακα, προέρχεται από την πρόσθεση του 2 στον αριθμό 10, παρότι η εκφώνηση τους καθοδηγούσε στην αναλογική σχέση των αριθμών. Σύμφωνα με τους ερευνητές οι μαθητές επέλεξαν την προσθετική στρατηγική αντί της αναλογικής.

Σε μαθησιακό επίπεδο, η εκπαιδευτική έρευνα έχει δείξει ότι, η προσθετική επιχειρηματολογία υπερισχύει των περιστασιακών αντιφάσεων που μπορεί να προκαλέσει και οι μαθητές εξακολουθούν να τη χρησιμοποιούν ακόμα και αν διαπιστώσουν την ανικανότητά της σε κάποιες περιπτώσεις (Χερουβείμ, 2010).

Β. Εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου εκεί που αυτό δεν ισχύει (γραμμικά λάθη, κατάχρηση της γραμμικότητας)

Η γραμμικότητα-αναλογία, η συσχέτιση δηλαδή δυο μεγεθών μέσω μιας γραμμικής συνάρτησης $f(x) = a \cdot x$ με $a \neq 0$ είναι μια βασική έννοια για τη μαθηματική εκπαίδευση, και από εκείνες που διδάσκονται οι μαθητές από νωρίς. Οι όροι «γραμμικά λάθη» και «κατάχρηση της γραμμικότητας» αναφέρονται σε περιπτώσεις που κάποιο από τα χαρακτηριστικά της γραμμικότητας, εφαρμόζεται από τους μαθητές σε μη κατάλληλες καταστάσεις. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις λαθών, ένεκα λανθασμένης εφαρμογής του γραμμικού μοντέλου, οι μαθητές χρησιμοποιούν, παρότι αυτό δεν ισχύει, το εξής μοντέλο: όταν η μια ποσότητα πολλαπλασιασθεί με κάποιον αριθμό, τότε και η άλλη ποσότητα που συνδέεται με την πρώτη πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

Σύνηθες σφάλμα γραμμικότητας είναι το εξής : αν ημΑ=$\frac{1}{3}$ τότε ημ2Α=$\frac{2}{3}$, όπου οι μαθητές θεωρούν ότι εφόσον η γωνία Α πολλαπλασιάζεται επί κάποιον αριθμό, πρέπει και η τιμή του ημιτόνου της να πολλαπλασιασθεί με τον ίδιο αριθμό. «*Η γραμμικότητα είναι μια τόσο* *δελεαστική ιδιότητα συσχέτισης, ώστε εύκολα να μπορεί κάποιος να πέσει στην πλάνη, να αντιμετωπίσει οποιαδήποτε αριθμητική σχέση σαν να είναι γραμμική*» (Freudenthal, 1983).

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να ξεκαθαρισθεί ότι σύμφωνα με τον De Bock et al (2007) και πολλούς άλλους ερευνητές, η συνάρτηση f(x)=ax+b δεν θεωρείται ως γραμμική παρόλο που παριστάνεται γραφικά με ευθεία. O De Bock όπως και πολλοί άλλοι ερευνητές, ονομάζουν σχέση αναλογίας μόνο την f(x)=a·x, a ≠0 (πολλαπλασιαστικό μοντέλο) καθώς υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στη γραμμικότητα και στις έννοιες του λόγου και της αναλογίας.

Η αναλογία σύμφωνα με τους Φράγκου κ.ά, (2006) ταυτίζεται με τη μέθοδο των τριών και αποτελεί ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο για το χειρισμό φαινομένων στη φυσική, την χημεία, τα οικονομικά, την αστρονομία κλπ. Βέβαια εδώ μπαίνει το ερώτημα που χρήζει διερεύνησης : παρότι στα μαθηματικά η αναλογία ταυτίζεται με τη μέθοδο των τριών, η ταύτιση αυτή ισχύει για τα μυαλά των μαθητών ή οι μαθητές παλινδρομούν στη μέθοδο των τριών, επειδή δυσκολεύονται να χειρισθούν την αναλογία με πιο προχωρημένες μαθηματικές διαδικασίες π.χ ισότητα λόγων.

Για παράδειγμα ο Κοντογιαννόπουλος (2010) αναφέρει ότι ένα τυπικό αναλογικό πρόβλημα όπως: *"12 αυγά κοστίζουν 2€. Ποια είναι η τιμή 36 αυγών;"* μπορεί να λυθεί με τον υπολογισμό της άγνωστης τιμής x από την αναλογία $\frac{12}{2}=\frac{36}{x}$. Όμως εάν το πρόβλημα αυτό τεθεί σε μια σχολική τάξη, το πιο πιθανό είναι η πλειοψηφία των μαθητών, να μη σχηματίσει την αναλογία. Αλλά, είτε θεωρώντας ότι η άγνωστη τιμή αφορά τριπλάσιο αριθμό αυγών, να πολλαπλασιάσει το 2€ επί 3, είτε να εφαρμόσει την μέθοδο των τριών.

Παρά την ευρεία εφαρμογή των αναλογιών στην καθημερινή ζωή, στα μαθηματικά, τις επιστήμες και την εκπαίδευση, η έννοια της αναλογίας είναι μια δύσκολη έννοια. Εκτεταμένες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν από το 1985 (Hart, 1994; Tourniaire & Pulos, 1985, αναφορά στο Ταξίδης, 2008), αποκάλυψαν ότι η επίλυση προβλημάτων αναλογιών είναι ένα από τα πολύ δύσκολα καθήκοντα για τους μαθητές/τριες. Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών χρησιμοποιούν την αναγωγή στη μονάδα για να λύσουν προβλήματα αναλογιών (Ταξίδης, 2008) ή την μέθοδο των τριών που έμαθαν στο Δημοτικό και η οποία σύμφωνα με τον Freudenthal (1983) συχνά τους ακολουθεί σε ολόκληρη τη ζωή τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις **λανθασμένης εφαρμογής του γραμμικού μοντέλου.**

1. «Ψευδοαναλογία» αποκαλείται η ισχυρή τάση για την προφανή εφαρμογή του γραμμικού προτύπου, εκεί που δεν υπάρχει καμμία λογικομαθηματική σχέση μεταξύ των μεγεθών και πιθανά δεν υπάρχει λύση με οποιοδήποτε μοντέλο. Παραδείγματος χάριν στην ερώτηση: *"Ένας μαθητής χρειάζεται 30 λεπτά για να μελετήσει μια συγκεκριμένη σελίδα ενός μαθηματικού βιβλίου. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να μελετήσει 20 σελίδες του ίδιου βιβλίου;"*, για αρκετούς μαθητές η προφανής απάντηση είναι 600 λεπτά. Ουσιαστικά πρόκειται για πρόβλημα που το πιο πιθανό είναι να μην επιδέχεται λύση αφού ο μαθητής δεν διαβάζει συνεχώς με τον ίδιο ρυθμό.

Κλασσικά παραδείγματα ψευδοαναλογίας είναι και τα παρακάτω λάθη: "αν ένα παιδί 8 ετών έχει βάρος 25 κιλά, όταν θα γίνει 16 ετών το βάρος του θα είναι 50 κιλά" επειδή οι μαθητές θεωρούν ότι η σχέση βάρος-ηλικία είναι αναλογική ή *"αν μια ράφτρα ράβει ένα φόρεμα σε 50 λεπτά, τότε θα ράψει 4 ίδια φορέματα σε 200 λεπτά"*. Το τελευταίο λάθος γίνεται επειδή οι μαθητές αλλά και οι εκπαιδευτικοί που δίνουν το πρόβλημα αυτό στους μαθητές τους, δεν σκέφτονται ότι η ράφτρα δεν λειτουργεί ως μια μηχανή που δεν κουράζεται, δεν πεινάει κλπ. Ακόμη και σε διαφορετικές ημέρες να ράβεται το κάθε φόρεμα δεν είναι βέβαιο ότι πάντα θα υπάρχει ο ίδιος ρυθμός εργασίας. Μόνο μια μηχανή μπορεί αυτό να το πετύχει.

Η αναλογικότητα σύμφωνα με τον Freudenthal (1983), φαίνεται να είναι σε τέτοιο βαθμό ενσωματωμένη στον τρόπο σκέψης των μαθητών που κάποιος μπορεί πολύ εύκολα να παραπλανηθεί και να χειρίζεται κάθε αριθμητική σχέση ως αναλογική, χωρίς να δίνει σημασία στο περιβάλλον της προβληματικής κατάστασης και στους περιορισμούς που αυτό μπορεί να έχει. Αυτό αιτιολογεί και τις μη-ρεαλιστικές απαντήσεις των μαθητών οι οποίοι υποστηρίζουν τη γραμμική αύξηση του ύψους και του βάρους ή ακόμα και την ικανότητα των αθλητών να τρέχουν με την ίδια ταχύτητα τα 100 και τα 1000 μέτρα (Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994).

2. Εκθετικό ή λογαριθμικό μοντέλο ή συναρτήσεις του τύπου $y= a.x^n$ ($n\geq 2$) που από αρκετούς μαθητές αντιμετωπίζονται ως γραμμικά. Για παράδειγμα στην ερώτηση: *"εάν ένα φυτό μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή έχει ύψος 10cm και το ύψος του* αυξάνεται *50%* κάθε *εβδομάδα, τι ύψος θα έχει μετά από 4 εβδομάδες;"* αρκετοί μαθητές σκεπτόμενοι γραμμικά και όχι εκθετικά, σχετικά με την αύξηση του ύψους συναρτήσει του χρόνου, απαντούν 30cm ($10 + 4\cdot 5 = 30$).

3. Κλασσικός χώρος λανθασμένης εφαρμογής γραμμικών μοντέλων είναι η Γεωμετρία. Χαρακτηριστικό πεδίο τέτοιων λαθών αποτελεί η επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με την επίδραση της αύξησης των μηκών των πλευρών ενός γεωμετρικού σχήματος στο εμβαδόν και τον όγκο του. Το ίδιο λάθος κάνει και ο δούλος στο διάλογο του Πλάτωνα «*Μένων*» (Fowler, 1999), όταν ο Σωκράτης, του ζητά να σχεδιάσει ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν σε σχέση με κάποιο αρχικό τετράγωνο, ο δούλος προτείνει τον διπλασιασμό των πλευρών του αρχικού, θεωρώντας ότι υπάρχει στο τετράγωνο, γραμμική σχέση μεταξύ του μήκους της πλευράς και του εμβαδού.

4. Χαρακτηριστικό παράδειγμα λανθασμένης εφαρμογής της γραμμικότητας, είναι η πεποίθηση αρκετών μαθητών πως η πιθανότητα επιτυχίας σε ένα τυχερό παιχνίδι, είναι ανάλογη με τον αριθμό των δοκιμών, γεγονός που διαψεύδεται από την περίπτωση της διωνυμικής κατανομής (κ επιτυχίες σε ν επαναλήψεις δοκιμών Bernoulli). Για παράδειγμα η πιθανότητα να φέρουμε 1 κορώνα σε 5 ρίψεις ενός νομίσματος, σύμφωνα με την πεποίθηση αρκετών μαθητών, είναι $\frac{1}{2}\cdot 5=2,5$, ενώ σύμφωνα με τη διωνυμική κατανομή η πιθανότητα να έχουμε 1 επιτυχία (Κορώνα) σε 5 ρίψεις ενός (αμερόληπτου) νομίσματος είναι 0,15625. Με αντίστοιχο συλλογισμό έγινε και το λάθος από τον Ιταλό μαθηματικό Cardano. Θεωρώντας ότι η πιθανότητα να φέρει 2 άσσους σε ταυτόχρονη ρίψη δυο ζαριών είναι $\frac{1}{36}$, νόμισε ότι χρειάζονται 18 ρίψεις ώστε η πιθανότητα να φέρει 2 άσσους να γίνει 50% (Székely, 1986, από Van Dooren κ.α., 2003).

Με το λάθος αυτό σχετίζεται και ένα ιστορικό παράδειγμα, το «πρόβλημα με τα ζάρια», που έγινε αφορμή να διατυπωθεί από τον Πασκάλ η θεωρία των πιθανοτήτων. O Chevalier de Méré, πασίγνωστος παίκτης του 17ου αιώνα, θεώρησε πως θα ήταν εξ ίσου επωφελές να στοιχηματίσει για «μια τουλάχιστον φορά εξάρες σε 24 ρίψεις δυο ζαριών» και «τουλάχιστον μια φορά 6 σε 4 ρίψεις ενός δίκαιου ζαριού», αφού $\frac{4}{6}=\frac{24}{36}$. Ο έμπειρος de Méré σύντομα διαπίστωσε πως στοιχηματίζοντας στο πρώτο ενδεχόμενο, δεν είχε το ίδιο οικονομικό όφελος με το δεύτερο. Συμβουλεύθηκε τελικά τον φίλο του Pascal, ο οποίος του εξήγησε ότι η πιθανότητα για να πάρει τουλάχιστον μια φορά έξι σε 4 δοκιμές είναι ίση με 1 - $(\frac{5}{6})^4$= 0,52, δηλαδή λίγο μεγαλύτερη του μισού, ενώ η πιθανότητα για μια τουλάχιστον φορά εξάρες σε 24 ρίψεις δύο ζαριών, είναι 1 - $(\frac{1}{3})^{24}$ = 0,49 , η οποία είναι λίγο μικρότερη του μισού (αναφορά στο Κοντογιαννόπουλος, 2011). O Freudenthal (από De Bock κ.α 2003), σχολίασε με οξύτητα αυτόν τον προβληματικό συλλογισμό του de Méré: «… εφάρμοσε τα μαθηματικά που ήξερε, εκείνο το είδος των μαθηματικών που στην παιδική μου ηλικία ονομαζόταν απλή μέθοδος των τριών… Ίσως θα είχε αποδώσει καλύτερα εάν δεν είχε μάθει ποτέ μαθηματικά!».

5. Όταν σε μια κατάσταση προβλήματος, ένα μέγεθος Α παραμένει σταθερό, οι μαθητές σκέπτονται πως και κάποιο άλλο μέγεθος Β που συνδέεται με το Α δεν μεταβάλλεται. Για παράδειγμα : «*τα τρίγωνα με την ίδια περίμετρο έχουν και το ίδιο εμβαδόν*».

<u>Παρατήρηση</u>: Για διαφορετικούς ερευνητές, παραδείγματα όπως τα παρακάτω μπορεί να συνδέονται με διάφορα μοντέλα όπως προσθετικά, γραμμικά, κ.λ.π ανάλογα με την οπτική του κάθε ερευνητή π.χ

$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $|a+b|=|a|+|b|$, log(a+b)=loga+logb, ημ(α+β)=ημα+ημβ

Το ίδιο λάθος π.χ $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, που η κυρίαρχη κατά την αποψή μας ερμηνεία του είναι η λανθασμένη εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας, μπορεί να ερμηνευθεί με διάφορους τρόπους και να αποδοθεί σε διάφορους παράγοντες, αλλά αυτό που έχει σημασία είναι η απάντηση στο βασικό ερώτημα: «Το λάθος που παρουσιάζεται στο παράδειγμα πάνω σε ποιο επιστημολογικό εμπόδιο χτίστηκε;». Σε ορισμένες περιπτώσεις η απάντηση μπορεί να μην είναι μονοσήμαντη, γιατί εξαρτάται και από την οπτική γωνία του εκάστοτε ερευνητή, αλλά το σημαντικό είναι να επιλέξει ο εκπαιδευτικός να χτίσει την προς θεραπεία δραστηριότητα (διδακτική κατάσταση) με βάση την απάντηση που θεωρεί ότι προσιδιάζει περισσότερο στους μαθητές του. Ακόμη δεν είναι πάντα εύκολος ο διαχωρισμός μεταξύ επιστημολογικού και διδακτικού εμποδίου. Σύμφωνα με τον Brousseau (1997, σ.86) «… *αυτά τα εμπόδια μπορεί να οφείλονται σε πολλές αιτίες. Είναι δύσκολο να τα αποδώσουμε σε ένα μόνο από τους εμπλεκόμενους παράγοντες …*». Έτσι, η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου τείνει, σε ορισμένες περιπτώσεις, να παίρνει τη θέση του λάθους στη διδασκαλία, ή της αδυναμίας του μαθητή, ή της εσωτερικής δυσκολίας της γνώσης.

Γ. Κανόνες που βιώθηκαν σε προηγούμενα στάδια μεταφέρονται λανθασμένα σε μεταγενέστερα (συνήθως μέσω του μηχανισμού της υπεργενίκευσης)

Το συγκεκριμένο εμπόδιο είναι το γενικότερο όλων και έχει ένα πολύ μεγάλο αριθμό εφαρμογών, γιατί κυρίως λειτουργεί είτε απευθείας μέσω του αναλογικού συλλογισμού, κατ΄αναλογία αλλά όχι γραμμικά, είτε μέσω της γραμμικής αντίληψης που αποτελεί υποπερίπτωση του αναλογικού συλλογισμού. Κλασσικό παράδειγμα υπεργενίκευσης αποτελεί η πεποίθηση πολλών μαθητών ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη. Το συγκεκριμένο παράδειγμα, όπως και αρκετά άλλα παραδείγματα επιστημολογικών εμποδίων συνδέονται, τουλάχιστον εν μέρει, και με την ιστορική ανάπτυξη της αντίστοιχης έννοιας.

Επίσης στην παλινδρόμηση σε πρωθύστερους κανόνες, μέσω του μηχανισμού της υπεργενίκευσης, οφείλεται πληθώρα από παραδείγματα που αφορούν επιστημολογικά εμπόδια. Για παράδειγμα ο μαθητής έμαθε στους φυσικούς αριθμούς ότι ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία είναι και ο μεγαλύτερος, π.χ έμαθε ότι το 565 είναι μεγαλύτερο από το 92, επομένως είναι δυνατό, κατ΄αναλογία, να θεωρήσει ότι και το 0,565 να είναι μεγαλύτερο από το 0,92. Ακόμη το παιδί έμαθε ότι, το 0 στην πρόσθεση δεν επηρεάζει τίποτα, δεν μεταβάλλει τίποτα. Με βάση την παραπάνω λογική είναι δυνατό να θεωρήσει, κατ΄αναλογία, ότι και στο πολλαπλασιασμό δεν μεταβάλλει τίποτα και να οδηγηθεί στο λάθος $3\cdot0\cdot7=21$. Στην ερώτηση «ποιος είναι ο επόμενος του 1,7» απαντούν το 1,8 με τη λογική ότι στους φυσικούς αριθμούς ο επόμενος του 3 είναι το 4. Ακόμη λάθη όπως ημ(x+y)=ημx+ημy, λογ(α+β)=λογα+λογβ, οφείλονται στην παλινδρόμηση, μέσω του μηχανισμού της υπεργενίκευσης, στην κατ’ αναλογία χρήση του μοντέλου του επιμερισμού α(β+γ) = αβ + αγ (όπου α για το μαθητή είναι το ημ ή το λογ).

Στην κατ’ αναλογία χρήση είναι δυνατό να οφείλονται λάθη όπως: $[f(x)\cdot p(x)]'=f'(x)\cdot p'(x)$, που μπορεί να θεωρηθεί ότι οφείλονται στην λανθασμένη χρήση της ιδιότητας $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα παλινδρομήσεων (με επιφύλαξη πάντα ως προς το μονοσήμαντο των ερμηνειών) είναι :

- $(\alpha\pm\beta)^2 = \alpha^2+ \beta^2$, όπου η παλινδρόμηση συνδέεται με το $(\alpha\cdot\beta)^2 =\alpha^2\cdot\beta^2$
- ημα / ημβ = α /β, όπου η παλινδρόμηση συνδέεται με το κα /κβ = α /β
- $[(3x+1)2]'=2(3x+1)$, όπου η παλινδρόμηση συνδέεται με το $(x^n)'= n\cdot x^{n-1}$

Συμπεράσματα - Προτάσεις

Το λάθος και η αναζήτηση των αιτιών του είναι αναπόσπαστο κομμάτι της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών. Τα λάθη και οι παρανοήσεις πρέπει να έχουν το ρόλο τους μέσα στη σχολική τάξη και να αποτελούν κομμάτι της διδασκαλίας. Αν στόχος μας είναι η βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης, η ενασχόλιση με τα λάθη των μαθητών και η κατανόηση των παρανοήσεών τους είναι ένα πρώτο βήμα. Υπάρχει συνεπώς η ανάγκη να περάσουμε από τις πρακτικές της παραδοσιακής διδασκαλίας, οι οποίες συνεχίζουν να εφαρμόζονται στην σχολική τάξη, στο διδακτικό μοντέλο της έρευνας, θεωρώντας τα μαθηματικά ως μια ανθρωπιστική επιστήμη και όχι σαν ένα σώμα το οποίο αποτελείται μόνο από κανόνες και τεχνικές. Μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο είναι ανάγκη να δεχτούμε το λάθος ως εγγενές συστατικό της ανθρώπινης σκέψης και να περάσουμε από τη συνηθισμένη αντίληψη του λάθους ως αποτέλεσμα παρερμηνείας, στην αντίληψη ότι το λάθος είναι γνώση (Κολέζα, 2009).

Σε επίπεδο διδακτικής πράξης, η πρώτη ενέργεια που θα έπρεπε να γίνει για να αντιμετωπισθεί το οποιοδήποτε «λάθος» που οφείλεται σε επιστημολογικό εμπόδιο είναι να απαντηθεί το ερώτημα: «Το λάθος πάνω σε ποια προηγούμενη αντίληψη δομήθηκε;» και στη συνέχεια προκειμένου να αντιμετωπισθεί, να αρθεί δηλαδή το επιστημολογικό εμπόδιο, θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να δημιουργήσει μια διδακτική κατάσταση μέσω της οποίας ο μαθητής να οδηγείται μόνος του (ή με τη διακριτή βοήθεια του) σε γνωστική σύγκρουση η οποία να τον αναγκάζει να αμφισβητήσει και εν τέλει να απορρίψει, από μόνος του, το μοντέλο που επέλεξε ως κατάλληλο. Με τη δημιουργία μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις ή δραστηριότητες, γνωστικής σύγκρουσης (σύγκρουση της νέας πληροφορίας με τις αρχικές θεωρίες των μαθητών) επιδιώκεται να προκληθεί αναδιοργάνωση του ισχύοντος εννοιολογικού πλαισίου, δηλαδή εννοιολογική αλλαγή. Στην ουσία εφαρμόζεται η κλασσική συνταγή κάθε θεραπείας, που είναι αρχικά η διάγνωση και στη συνέχεια η λήψη του κατάλληλου φαρμάκου ή εν γένει της κατάλληλης αγωγής. Απαραίτητη προϋπόθεση βέβαια, για να μετατραπούν τα λάθη σε «εργαλείο μάθησης», είναι να τα χειριστεί κατάλληλα ο εκπαιδευτικός. Οι δραστηριότητες που θα επιλέξει πρέπει να αναδεικνύουν την ανεπάρκεια των προηγουμένων «σχημάτων», οπότε οι μαθητές να τα εγκαταλείψουν. Στο πλαίσιο λοιπόν της θεώρησης σύμφωνα με την οποία το λάθος παίζει δυναμικό ρόλο στη διδακτική πράξη, η ανακάλυψη από τον εκπαιδευτικό αυτών των λαθών-«εμποδίων» (γνωστικών ή γλωσσικών) αποτελεί σημαντικό «εργαλείο» για να οργανώσει τις διδακτικές του παρεμβάσεις (Σφυρόερα, 2007).

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι, ο βασικότερος ίσως ρόλος του δασκάλου είναι να δημιουργεί, να εφευρίσκει ή να ανακαλύπτει καταστάσεις που ευνοούν μια "σύγκρουση γνώσεων". Κάτι τέτοιο, δεν είναι καθόλου εύκολο. Κατ' αρχήν, γιατί για τη δημιουργία καταστάσεων "ρήξης" πρέπει να γνωρίζει τα μοντέλα που διαθέτουν οι μαθητές για τη συγκεκριμένη κατάσταση. Επιπλέον, εάν η σύγκρουση δεν είναι πραγματικά εντυπωσιακή τότε στη χειρότερη περίπτωση το λανθασμένο μοντέλο που έχει δημιουργήσει το παιδί, κινδυνεύει να μείνει ακλόνητο, ενώ στην καλύτερη το καινούργιο μοντέλο έρχεται να συγκατοικήσει με το παλιό, οπότε πρέπει να ξαναπροσπαθήσουμε.

Για να βοηθηθούμε λοιπόν στην αλλαγή της πρακτικής της διδασκαλίας μας, προς τη κατεύθυνση της ενσωμάτωσης του λάθους στη μαθησιακή διαδικασία, σε πολλές περιπτώσεις δεν φτάνει μόνο η προσωπική μας επιθυμία για αλλαγή, ούτε είναι εύκολο στον καθένα να βρίσκει τις κατάλληλες καταστάσεις σύγκρουσης για κάθε λάθος. Μια τέτοια εργασία είναι ευκολότερη και πλουσιότερη αν σχεδιαστεί συλλογικά. Προς τη κατεύθυνση αυτή, σημαντικό ρόλο, μπορούν να παίξουν οι θεσμοί της επιμόρφωσης, οι παιδαγωγικές ενώσεις κ.λπ. οργανώνοντας τακτικές επιμορφωτικές συναντήσεις, ανταλλαγές απόψεων και ημερίδες όπως αυτές που διοργάνωσε ο Όμιλος Μαθηματικών της ΠΑΠΕΔΕ(4 Φεβρ. 2017 και 8 Απρ. 2017)

Αναφορές

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A cognitive view*. London: Holt, Reinhart, & Winston.

Bachelard, G. [1938/1983]: La Formation De l' Esprit Scientifique, Paris: Presses Universitaires de France, p.14.

Bernstein, B. (1961). Κοινωνική τάξη και γλωσσική ανάπτυξη: Μια θεωρία της κοινωνικής μάθησης. Στο Φραγκουδάκη Α., 1985, Κοινωνιολογία της Εκπαίδευσης, Θεωρίες για την κοινωνική ανισότητα στο σχολείο (σελ. 393-431). Αθήνα: Παπαζήσης.

Bernstein, B. (1961). Social structure, language and learning. Educational Research, 3, 163.

Borasi, R. (1996). *Reconveining mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ : Ablex publishing corporation.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R Sutherland & V. Warfielf, Eds & Transl.). Mathematics Education Library (vol.19), p.86-87. Kluwer Academic Publishers.

Cipra, B. (1985). Erreures, Paris, Intereditions.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D Verschaffel, L., & Janssens, D. (2007). The Illusion of Linearity From Analysis to Improvement (Mathematics Education Library). New York: Springer.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. Educational Studies in Mathematics, 35, 65–83.

English, L. D. (2004). Mathematical and analogical reasoning in early childhood. In English, L. D. (Ed.), Mathematical and analogical reasoning of young learners (pp. 1-22). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ernest, P.(1996). The nature of mathematics and teaching. Philosophy of mathematics education, 9.

Fowler, D. [1999]: *The mathematics of Plato's Academy*. Oxford: Claredon Press

Freud, S. (1959). *The Standard Edition of the Complete Psychological Works of Sigmund Freud*. New York, London: W.W. Norton & Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. USA: University of Chicago Press.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". Educational Psychology, 27 (1), 75-92

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education, Ανακτήθηκε στις 10/9/17 από https://www.researchgate.net/..

Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel & J. v. Maanen (Eds.), History in mathematics education: the ICMI study (pp.162-167). Dordrecht: Kluwer.

Rouche, N. (2001, November). La linéarité dans l'enseignement des mathématiques. Exposé et discussion, Mons, Belgium.

Sierpinska, A. (1994): Understanding in Mathematics. Washington D.C.: The Falmer Press, p.121,

Tall, D. (1989). Different cognitive obstacles in a technological paradigm. In S. Wagner & C. Kieran [Eds.] Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. 00.87-92. N.CT31- Eribaum.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L.(2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. Educational Studies in Mathematics, 53, 113– 138.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures, in R. Lesh and M. Landau (eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, Academic Press: New York.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic problems. Learning and Instruction, 4, 273-294.

Vosniadou, S., & Ortony, A. (1989). *Similarity and analogical reasoning*. Cambridge: Cambridge University Press.

Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*. Τόμος Α. Αθήνα: Gutenberg.

Θωμαίδης, Γ. (1995). *Διδακτική μετατόπιση Μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης, Η περίπτωση της απόλυτης τιμής*. Διατριβή στο Μαθηματικό Τμήμα του ΑΠΘ

Καλημέρης, Σ. (2013). Γνωσιακές διαστρεβλώσεις. Ανακτήθηκε στις 10/8/17 από kalimeristherapist.com/ 2013/02/17/ -cognitive distortions/.

Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών, Αθήνα: Τόπος.

Κολέζα, Ε. (2012). Το «λάθος» στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Ανακτήθηκε στις 2/8/17 από www.mathlab.upatras.gr/.../

Κοντογιαννόπουλος Κ. (2010). Η γραμμική αντίληψη σαν αιτία μαθηματικού λάθους, Διπλωματική εργασία στο Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών.

Μοδέστου Μ. (2006). Η αναλογία (f(x)=ax) ως επιστημολογικό εμπόδιο, 9ο Συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, σελ123-133.

Μοδέστου, Μ., & Γαγάτσης, Α. (2006). Ένα Διαφορετικό Πλαίσιο Διδασκαλίας της Έννοιας της Αναλογίας. Ανακτήθηκε στις 8/8/17 από www.pi.ac.cy/pi/files/keea/synedria/synedrio_pi_pdf.../16_Modestou Gagatsis. Pdf.

Σφυρόερα, Μ. (2007). Διαφοροποιημένη Παιδαγωγική. ΥΠ.Ε.Π.Θ. – Πανεπιστήμιο Αθηνών. Πρόγραμμα Εκπαίδευσης Μουσουλμανοπαίδων. Κλειδιά και Αντικλείδια. Β΄ έκδ.

Ταξίδης, Χρ. (2008). Η έννοια της αναλογίας στην ΣΤ΄ τάξη του δημοτικού σχολείου. Μια διδακτική πρόταση μέσα απο την επίλυση προβλήματος, Διπλωματική εργασία στο ΑΠΘ, ΠΤΔΕ.

Φιλίππου, Γ.,& Χρήστου, Κ.(2002). *Διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα: Δαρδανός.

Φράγκου, Κ., Καψάλης, Χ., & Γαγάτσης, Α. (2006). Αναλογικός και Μη Συλλογισμός σε Μαθητές με Συμπτώματα Δυσλεξίας. Ανακτήθηκε στις 15/8/17 από www.pek.org.cy/Proceedings_2006/1.../1.12.%20k.%20Fragkou%20et% 20al..pdf

Χαιρέτη, Μ. (2009). Τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και η διδακτική αξιοποίησή τους. Μεταπτυχιακό Δίπλωμα στις Επιστήμες Αγωγής Ειδίκευση: Μαθηματικά και πληροφορική στην εκπαίδευση, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Χερουβείμ, Ε. (2010). Διερεύνηση λογικομαθηματικών δεξιοτήτων (Επαγωγικός συλλογισμός, Αναλογική σκέψη) μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου μέσα από βιωματικές δραστηριότητες. Διπλωματική εργασία στο Διαπανεπιστημιακό–Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυ-χιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών».