ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η γραμμική αντίληψη σαν αιτία μαθηματικού λάθους»

ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΑΜ: Δ200711

ΙΟΥΝΙΟΣ 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Πόταρη Δέσποινα…(επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	……………….	……………..
2) Βαμβακούση Ξένια	……………….	……….….
3) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	……………….	……….….

Ευχαριστώ:

- *Την καθηγήτρια του μεταπτυχιακού και επιβλέπουσα αυτής της εργασίας κα Πόταρη Δέσποινα, για την καθοδήγησή της και τις ουσιαστικές επισημάνσεις της.*
- *Τον καθηγητή του μεταπτυχιακού κο Ζαχαριάδη Θεοδόσιο για την προθυμία του να είναι μέλος της τριμελούς επιτροπής και για την πολύτιμη βοήθειά του.*
- *Ιδιαίτερα, την καθηγήτρια του μεταπτυχιακού και μέλος της τριμελούς επιτροπής κα Βαμβακούση Ξένια, τόσο για την βοήθειά της στην επιλογή του θέματος, όσο και για την ουσιαστική επιστημονική υποστήριξη και καθοδήγησή της, σε όλα τα στάδια εκπόνησης αυτής της εργασίας. Κατόρθωσε να είναι ανελλιπώς δίπλα στην προσπάθειά μου, ακόμη και κατά το χρονικό διάστημα απουσίας της στο εξωτερικό.*

Θα ήθελα επίσης να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους συναδέλφους μαθηματικούς, τους διευθυντές των σχολείων καθώς και τους μαθητές, που βοήθησαν στην διεξαγωγή του ερευνητικού μέρους της εργασίας.

Κοντογιαννόπουλος Κώστας

Λυγουριό, Ιούνιος 2010

Στην οικογένειά μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πώς θα μεταβληθεί το εμβαδόν ενός τετραγώνου αν τριπλασιαστεί η πλευρά του, ο όγκος του κύβου σε περίπτωση διπλασιασμού της ακμής του ή το εμβαδόν του κύκλου σε αντίστοιχη γραμμική αύξηση της ακτίνας του; Σε μια σειρά ερευνών που έχουν πραγματοποιήσει την τελευταία δεκαετία οι ερευνητές De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel, τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων σε προβλήματα σχετικά με τις προαναφερθείσες μεταβολές είναι πολύ χαμηλά. Για παράδειγμα, σε έρευνά τους το 1998, ήταν μόλις 2% για μια πρώτη ομάδα μαθητών 12 – 13 ετών και 17% για μια μεγαλύτερη ομάδα 15 -16 ετών (De Bock κ.α. 1998). Οι υπόλοιπες απαντήσεις, ήταν βασισμένες σε έναν λανθασμένο γραμμικό συλλογισμό, πως αν δηλαδή πολλαπλασιαστούν οι διαστάσεις ενός επιπέδου ή στερεού σχήματος με κάποιον αριθμό, τότε το εμβαδόν ή ο όγκος του, θα πολλαπλασιαστούν επίσης με τον ίδιο αριθμό.

Οι άφθονες ιστορικές αναφορές για αντίστοιχα λάθη, δείχνουν πως το φαινόμενο των γραμμικών απαντήσεων εκεί που δεν υφίσταται αναλογία, είναι διαχρονικό.

Όταν για παράδειγμα οι Αθηναίοι σύμφωνα με την μυθολογία, το 430 π.Χ στην Δήλο, ζήτησαν τον χρησμό του Απόλλωνα για το πώς θα αντιμετώπιζαν μια πανούκλα που ερήμωνε την πόλη τους, αυτός υπέδειξε πως για να σταματήσει το πρόβλημα, θα έπρεπε να διπλασιάσουν το μέγεθος του βωμού του. Παρότι όμως διπλασίασαν υπάκουα κάθε πλευρά του βωμού, η πανούκλα αυξήθηκε (Smith 1923, αναφορά από De Bock κ.α. 2007).

Ένα άλλο πολυσυζητημένο παράδειγμα είναι από τον διάλογο «Μένων» του Πλάτωνα. Εκεί, όταν ο Σωκράτης χρησιμοποιώντας την μαιευτική του μέθοδο, ζητά από τον δούλο να σχεδιάσει ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν από κάποιο δεδομένο, το πρώτο που προτείνει αυτός είναι ο διπλασιασμός των πλευρών του αρχικού. Ο δούλος εφαρμόζει δηλαδή αυθόρμητα, την ιδέα της γραμμικής σχέσης (μεταξύ του μήκους και του εμβαδού). (Fragkos, 1983, από Modestou & Gagatsis 2007)

Οι αναφορές σε λανθασμένες «γραμμικές» απαντήσεις δεν περιορίζονται μόνο στον χώρο της Γεωμετρίας. Τις συναντάμε σε πολλές άλλες μαθηματικές και επιστημονικές περιοχές. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός, ότι χαρακτηρίζουν άτομα διάφορων ηλικιών και με διαφορετικό επιστημονικό επίπεδο. Ακόμη και μεγάλοι επιστήμονες, δεν κατάφεραν να αποφύγουν την παγίδα των αντίστοιχων λανθασμένων γραμμικών συλλογισμών.

Ένα τέτοιο λάθος από τον χώρο της Φυσικής, ήταν η πεποίθηση του Αριστοτέλη πως η ταχύτητα με την οποία πέφτει ένα σώμα καθώς κάνει ελεύθερη πτώση, είναι ανάλογη της μάζας του. Πως αν για παράδειγμα, δυο σφαίρες με μάζες 100g και 1000g πέσουν από το ίδιο ύψος, η βαρύτερη θα φτάσει στο έδαφος δέκα φορές πιο σύντομα από την πιο ελαφριά. Πήρε πολλούς αιώνες για να διαψευστεί ο ισχυρισμός αυτός από τον Γαλιλαίο, μόλις το 1638 (Galilei 1638, αναφορά από Van Dooren κ.α 2003).

Ο χώρος των πιθανοτήτων επίσης είναι πλούσιος σε τέτοιες αναφορές. Ο Cardano, ο Ιταλός μαθηματικός της αναγέννησης, είχε τόση καλή γνώση και κατανόηση των πιθανοτήτων, ώστε όταν κατέφυγε στον τζόγο για να βελτιώσει την οικονομική του κατάσταση, κατάφερνε τις περισσότερες φορές να είναι κερδισμένος. Εντούτοις, έπεσε στην παγίδα να κάνει τον λανθασμένο συλλογισμό, ότι αφού σε μια ταυτόχρονη ρίψη δυο ζαριών η πιθανότητα να φέρουμε διπλό άσσο είναι 1 /36 , για να έχουμε πιθανότητα 50% να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά διπλό άσσο, αρκεί να ρίξουμε δυο ζάρια 18 φορές. (Székely1986 αναφορά από Van Dooren κ.α 2003).

Τα ευρήματα ενός μεγάλου πλήθους ερευνών (π.χ: Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, επισκόπηση στο De Bock κ.α 2007, Ebersbach και Wilkening 2007, Esteley κ.α 2004 Fernandez κ.α, 2008, Gagatsis & Kyriakides, 2000, Modestou & Gagatsis κ.α 2004,2007) τεκμηριώνουν την τάση των μαθητών να υπονοούν γραμμικές (ανάλογες) σχέσεις και να εφαρμόζουν τις ιδιότητές τους, ακόμα και σε καταστάσεις που αυτές δεν υφίστανται. Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν *«ψευδαίσθηση της γραμμικότητας (illusion of linearity)»*, *«παγίδα της γραμμικότητας (linearity trap)»*, *«γραμμικό εμπόδιο(linear obstacle) »*,κλπ. Αν και οι όροι αυτοί μπορεί να εμπεριέχουν λεπτές διαφοροποιήσεις όσον αφορά το διαισθητικό ή συνειδητό επίπεδο ερμηνείας του φαινομένου, στην εργασία αυτή θα τους χρησιμοποιήσουμε σαν συνώνυμους. Οι σχετικές μελέτες πραγματοποιήθηκαν με σπουδαστές των διάφορων ηλικιών, (από παιδιά νηπιαγωγείου μέχρι φοιτητές πανεπιστημίου) σε διαφορετικές χώρες, (πιθανώς με διαφορετικά προγράμματα σπουδών και διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις), και τα ερευνημένα θέματα κάλυψαν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών περιοχών (στοιχειώδη αριθμητική, γεωμετρία, ανάλυση, πιθανότητες). Παρά αυτήν την διαφορετικότητα των πλαισίων, υπάρχει αξιοπρόσεκτη συμφωνία μεταξύ αυτών, σχετικά με την τάση των μαθητών να αντιμετωπίζουν τις μη γραμμικές καταστάσεις σαν γραμμικές. Η αδικαιολόγητη αυτή εμπιστοσύνη στις γραμμικές σχέσεις εμφανίζεται να είναι καλά εδραιωμένη και δύσκολα αντιμετωπίσιμη. Είναι ένα φαινόμενο καθολικό και ανθεκτικό, σε ποικίλες μορφές υποστήριξης που στοχεύουν τη υπερνίκησή του (De Bock κ.α , 2003). Οι μαθητές αγνοούν ρεαλιστικούς περιορισμούς που θα μπορούσαν να τους αποτρέψουν από τέτοια λάθη.

Ποιοι είναι εκείνοι οι παράγοντες που ευθύνονται για την ύπαρξη και την εμμονή αυτής της τάσης;

Οι γραμμικές (ή ανάλογες) σχέσεις έχουν ευρεία δυνατότητα εφαρμογής και είναι χρήσιμες όχι μόνο για την κατανόηση των πολυάριθμων καθημερινών καταστάσεων, αλλά και την επίλυση πολλών προβλημάτων στα μαθηματικά και την επιστήμη. Ήδη από την προσχολική ηλικία τα παιδιά βιώνουν (δοκιμάζουν) την παρουσία αυτών των σχέσεων μέσα στις καθημερινές τους δραστηριότητες, π.χ τέσσερις χούφτες άμμος για να γεμίσει ένας κάδος, άρα 12 χούφτες για να γεμίσουν τρεις κάδοι, ένα αυτοκίνητο παιχνιδιών έχει τέσσερις ρόδες, επομένως δύο αυτοκίνητα παιχνιδιών έχουν οκτώ ρόδες κ.λ.π (Van den Brink & Streefland, 1979 από Van Dooren κ.α, 2008). Η διαδικασία της μέτρησης αποτελεί επίσης μια γραμμική δραστηριότητα.

Επιπλέον, κατά τη διάρκεια της στοιχειώδους και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, δίνεται μεγάλη προσοχή στην δυνατότητα εφαρμογής των σχέσεων αυτών σε μαθηματικά και επιστημονικά πλαίσια. Οι σπουδαστές μαθαίνουν παραδείγματος χάριν, ότι υπάρχει μια ανάλογη σχέση μεταξύ της διαμέτρου και της περιμέτρου του κύκλου, μεταξύ του βάρους μιας ποσότητας υγρού και του όγκου του, μεταξύ του χρόνου και της απόστασης που διανύεται με σταθερή ταχύτητα.

Όπως λοιπόν υποστηρίζει το κέντρο έρευνας για την διδασκαλία των μαθηματικών στο Βέλγιο:

«Η ιδέα της γραμμικότητας, που εμφανίζεται σταδιακά από την προνηπιακή ηλικία, οικοδομείται μέσα από διαδοχικές γενικεύσεις, καθ΄ όλη τη διάρκεια της σχολικής σταδιοδρομίας». (αναφορά από Van Dooren κ.α, 2008)

Εκτός από την ευρεία δυνατότητα εφαρμογής τους, οι γραμμικές σχέσεις φαίνονται επίσης αυτονόητες και πραγματικά απλές . Ο N Rouche υποστηρίζει πως *«λόγω της απλότητάς τους, οι γραμμικές σχέσεις εμφανίζονται αμέσως στο μυαλό του ανθρώπου»* (αναφορά από De Bock κ.α, 2007). Η ιδέα της γραμμικότητας φαίνεται, λοιπόν, να προηγείται τόσο από ψυχολογική, όσο και από και μαθηματική άποψη.

Ίσως αυτά τα χαρακτηριστικά των ανάλογων σχέσεων, μαζί με την ιδιαίτερη προσοχή που αυτές λαμβάνουν κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης, μπορούν οδηγήσουν στο σοβαρό και μη επιθυμητό αποτέλεσμα της εφαρμογής των σχέσεων αυτών «οπουδήποτε», ακόμη και σε καταστάσεις όπου αυτές δεν ισχύουν.

Ο Freudenthal έχει προειδοποιήσει σχετικά με αυτό:

«η γραμμικότητα είναι μια τόσο δελεαστική ιδιότητα συσχέτισης, ώστε εύκολα να μπορεί κάποιος να πέσει στην πλάνη, να αντιμετωπίσει οποιαδήποτε αριθμητική σχέση σαν να είναι γραμμική».

(Freudenthal 1983, αναφορά από De Bock κ.α 2007)

Στην παρούσα εργασία, επιχειρείται κατ΄ αρχήν η τεκμηρίωση του φαινομένου στο σημερινό ελληνικό σχολείο και η αναζήτηση εξηγήσεων γι αυτό, μέσα από την βιβλιογραφική ανασκόπηση. Ακολουθεί η περιγραφή μιας σχετικής εμπειρικής μελέτης σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, και στο τέλος συζητούνται κάποιες προτάσεις για μια αποτελεσματικότερη διδασκαλία των αντίστοιχων εννοιών.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Όροι όπως η γραμμικότητα, η αναλογικότητα, η αναλογία, η αναλογική σκέψη, η γραμμική σκέψη, έχουν χρησιμοποιηθεί από διάφορους συγγραφείς, με διαφορετικές ερμηνείες.

Στην εργασία αυτή, διατηρούμε την ορολογία των De Bock,Van Dooren, Janssens, Verschaffel (2007), δηλαδή χρησιμοποιούμε τους όρους ***γραμμική* (linear)** και ***ευθέως αναλογική* (direct proportional),** για να αναφερθούμε σε συναρτήσεις του τύπου **“ $f(x) = \alpha \cdot x$ ” *με* $\alpha \neq 0$.**Οι προηγούμενοι όροι όπως επίσης και τα παράγωγά τους ***γραμμικότητα* (linearity) *ή ευθεία αναλογικότητα* (direct proportionality)**, χρησιμοποιούνται σαν συνώνυμοι. Η γραφική παράσταση μίας γραμμικής συνάρτησης, είναι ως γνωστόν μια *ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων*.

Δυο ουσιαστικές ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων με τον τρόπο που ορίστηκαν παραπάνω, είναι οι: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ και $f(k\cdot x) = k\cdot f(x)$ που θα αναφέρονται σαν ***προσθετική*** και ***πολλαπλασιαστική*** ιδιότητα αντίστοιχα**.** Για την κάλυψη 18 m^2 (που είναι 6 m^2 + 12 m^2), χρειάζομαι 2.25 λίτρα (0.75 λίτρα + 1.50 λίτρα) χρώματος, ενώ για την κάλυψη 28 m^2 (2 × 14 m^2) χρειάζομαι 3.50 λίτρα (2 × 1.75 λίτρα) χρώματος, κ.λ.π. Συνήθως, ακόμη και στις πιο προηγμένες προσεγγίσεις της γραμμικής άλγεβρας, οι γραμμικές σχέσεις ορίζονται μέσα από τις προηγούμενες ιδιότητες.(De Bock κ.α, 2007)

Οι διαφορετικές αυτές ιδιότητες και εκφράσεις των γραμμικών συναρτήσεων χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής, καθώς μπορεί να δίνουν έμφαση σε διαφορετικές ιδιότητες του γραμμικού μοντέλου. Είναι επίσης δυνατό κάθε μια απ’ αυτές τις διαφορετικές εκφράσεις και ιδιότητες, να εφαρμόζεται από τους μαθητές σε μη γραμμικές καταστάσεις.

Με τον όρο ***«γραμμικό λάθος»*** θα εννοούμε κάθε εσφαλμένη εφαρμογή των γραμμικών συναρτήσεων ή των ιδιοτήτων τους σε μεταβολές που δεν είναι γραμμικές .

Υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στην ***γραμμικότητα ή ευθεία αναλογικότητα*** και στις έννοιες του ***λόγου* (ratio)** και της ***αναλογίας* (proportional)**.

Ο ***λόγος* (ratio),** αναφέρεται σε μια κλασματική σχέση ***(α/β)*** δυο μεγεθών, όπως για παράδειγμα: *«Αυτή η πορτοκαλάδα φτιάχτηκε με 10 πορτοκάλια ανά λίτρο νερού»* ή *«ο πληθυσμός αυξάνεται κατά 1000 άτομα κάθε έτος»*.

Η ***αναλογία (proportional)*** αναφέρεται στην ισότητα δυο λόγων ***α/β =γ/δ***, (και επομένως σε μια σχέση μεταξύ τεσσάρων μεγεθών), όπως: «*Αν σε ένα δοχείο αναμείξουμε 2Kg κόκκινου χρώματος με 3 Kg κίτρινου, ενώ σε άλλο 6Kg κόκκινου χρώματος με 9 Kg κίτρινου, θα πάρουμε την ίδια απόχρωση πορτοκαλί, καθώς 2/6= 3/9*» .

Η έννοια της ***γραμμικότητας (linearity)*** *ή* ***ευθείας αναλογικότητας (direct proportionality)*** (όπως και γραμμικής ή ανάλογης συσχέτισης μεταξύ ποσοτήτων), έχει περισσότερο συναρτησιακή χροιά και είναι εκείνος ο τρόπος συσχέτισης, στον οποίο διατηρείται σταθερός ο λόγος μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Κατ΄ αυτήν την έννοια, ο λόγος δυο αντίστοιχων τιμών σε μια τέτοια σχέση, αναφέρεται στην ισότητα ενός συνόλου απείρων λόγων: ***α/β = γ/δ = ε/ζ =……….*** Για παράδειγμα: « *ένα δοχείο με 0,75 λίτρα μπογιάς είναι αρκετό για βάψιμο 6m^2, επομένως χρειάζομαι 1,5 λίτρα για 12 m^2, 1,75 λίτρα για 14 m^2 ,κ.ο.κ*». Αν επιλέξουμε συγκεκριμένους λόγους από την σχέση αυτή, θα σχηματιστεί μια αναλογία, π.χ: *14/1,75 = 6/0,75*. (Κέντρο έρευνας για την διδασκαλία των μαθηματικών 2002, αναφορά από Van Dooren κ.α 2008).

Συχνά, από πολλούς μελετητές, «*γραμμικές*» καλούνται επίσης και οι συναρτήσεις της μορφής ***f(x) = αx + β***, καθώς και αυτές παριστάνονται γραφικά με ευθείες. Οι ευθείες αυτές δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων, εκτός από την ειδική περίπτωση όπου ***β = 0***. Στην εργασία αυτή, υιοθετώντας την ορολογία των De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel , περιορίζουμε τον όρο ***«γραμμικές»*** μόνο για τις συναρτήσεις της μορφής $\boldsymbol{f(x) = \alpha \cdot x}$ και για να αποφύγουμε την σύγχυση, τις συναρτήσεις της μορφής ***f(x) = αx+β*** με $\beta \neq 0$ θα τις καλούμε *συσχετισμένες γραμμικές* (***affine)***. Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτό, βρίσκεται στο ότι οι μαθητές έχουν ίσως την τάση να αποδίδουν τις ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων *(* ***f(x+y) = f(x) + f(y)*** , ***f(k.x) =k.f(x)*** *)* και των αναπαραστάσεών τους *(ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων)*, σε συναρτήσεις της μορφής ***f(x) = αx+β*** *με* $\beta \neq 0$*)* , όπου οι ιδιότητες αυτές δεν ισχύουν.

Όταν στην εργασία αυτή αναφερόμαστε στην «*γραμμική σκέψη*» των μαθητών, θα εννοούμε την υπόθεση μιας γραμμικής συνάρτησης, ή την εφαρμογή κάποιας ιδιότητας ή αναπαράστασης των γραμμικών συναρτήσεων, σε μια κατάσταση προβλήματος. Για παράδειγμα η προαναφερθείσα πολλαπλασιαστική ιδιότητα $\boldsymbol{f(k \cdot x) = k \cdot f(x)}$ αναφέρεται σε εκείνη την ιδιότητα που συχνά εκφράζεται με τον κανόνα: ***«k φορές το α – k φορές το β».*** Ο κανόνας αυτός χρησιμοποιείται πολλές φορές , σε προβλήματα που εξετάζονται σχετικά απλές καταστάσεις, όπως π.χ: *«για να καλύψουμε τριπλάσιο εμβαδόν χρειαζόμαστε τριπλάσια ποσότητα χρώματος ή για 10 φορές μικρότερο εμβαδόν χρειαζόμαστε 10 φορές λιγότερο χρώμα»*. Πολύ συχνά ο κανόνας ***«k φορές το α – k φορές το β»*** χρησιμοποιείται κατά τον ορισμό της ευθείας αναλογικότητας επισημαίνοντας πως *« όταν το α πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, το β πολλαπλασιάζεται επίσης με τον ίδιο αριθμό»*.

Ας σημειωθεί, πως όταν ο πολλαπλασιαστικός συντελεστής ***(k)*** είναι σχετικά μικρός ακέραιος, μπορεί να χρησιμοποιείται έμμεσα η προσθετική ιδιότητα ***f(x+y) = f(x) + f(y).*** *(π.χ: «για 6 + 6 + 6 m*^{2} *χρειάζομαι 0,75 + 0,75 + 0,75 λίτρα μπογιάς»).* Αυτός ο τύπος συλλογισμού στηρίζεται ουσιαστικά στις γραμμικές ιδιότητες της κατάστασης του προβλήματος. Από αυτή την άποψη, οι Kaput και West (1994) ,τον χαρακτηρίζουν ως *« επαρκή, αλλά άτυπο αναλογικό συλλογισμό»* (αναφ από De Bock κ.α. 2007 σελ 5).

Πρέπει σε αυτό το σημείο να διευκρινιστεί η διαφορά των όρων της «γραμμικής σκέψης» που χρησιμοποιείται στην εργασία αυτή, και του «αναλογικού συλλογισμού», όπως αναφέρεται στην Ψυχολογία. Ο όρος *«αναλογικός συλλογισμός»* χρησιμοποιείται σε ένα πλαίσιο μη μαθηματικό και αποτελεί έναν από τους μηχανισμούς της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου. Ως επαγωγικός μηχανισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς που χαρακτηρίζουν τα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989, αναφορά από Μοδέστου, 2007).

Συνοψίζοντας, όταν μιλάμε για ***γραμμική (ή ευθέως ανάλογική)*** σχέση, θα αναφερόμαστε σε συναρτήσεις της μορφής ***f(x) = α · x.*** Υπάρχουν πολλά αλληλένδετα χαρακτηριστικά των γραμμικών συναρτήσεων και των αναπαραστάσεών τους, τα οποία μπορούν να εφαρμόζουν οι μαθητές καθώς πραγματεύονται συναρτήσεις αυτού του είδους.

• Οι γραμμικές συναρτήσεις αναπαρίστανται από μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

• Οποιοιδήποτε δύο λόγοι μέσα σε αυτήν την γραμμική συνάρτηση παράγουν μια αναλογία. Έτσι ένα τυπικό αναλογικό λεκτικό πρόβλημα *(όπως: «12 αυγά κοστίζουν 2€. Ποια είναι η τιμή 36 αυγών; »)* μπορεί να λυθεί με τον υπολογισμό της άγνωστης τιμής x από μια αναλογία *(εδώ 12/2 = 36/x).*

• Για κάθε γραμμική συνάρτηση ισχύουν οι ιδιότητες: ***f(x+y) = f(x) + f(y)*** και ***f(k·x) =kf·(x)***

• Η πολλαπλασιαστική ιδιότητα εκφράζεται συνήθως με τον κανόνα ***«k φορές το α – k φορές το β»***

Μιλώντας για ***«γραμμικά λάθη»*** αναφερόμαστε σε εκείνες τις περιπτώσεις, όπου κάποιο από αυτά τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά και ιδιότητες της γραμμικότητας, εφαρμόζεται από τους μαθητές σε καταστάσεις όπου δεν είναι κατάλληλο. Η χρήση των γραμμικών συναρτήσεων και των ιδιοτήτων τους σε καταστάσεις πέρα από αυτές στις οποίες ισχύουν αναφέρεται και σαν ***«κατάχρηση της γραμμικότητας».***

ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΚΑΤΑΧΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ: ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ

Στην βιβλιογραφία από το χώρο της έρευνας για την εκπαίδευση, τόσο για τα μαθηματικά, όσο και για τις φυσικές επιστήμες, γίνεται συχνά λόγος για σπουδαστές διαφόρων ηλικιών οι οποίοι έχουν την τάση να εφαρμόζουν ένα ή περισσότερα από τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά της γραμμικότητας και των αναπαραστάσεών της, σε μη γραμμικές καταστάσεις. Αυτές οι αναφορές σχετίζονται με ποικίλες μαθηματικές περιοχές. Στις περισσότερες από τις παλαιότερες εμπειρικές μελέτες όπου τις συναντούμε, η κατάχρηση της γραμμικότητας δεν είχε αποτελέσει αυτό καθ' αυτό το αντικείμενο της έρευνας, αλλά προέκυπτε σαν τυχαίο εύρημα. Μια συστηματική προσπάθεια καταγραφής των περιπτώσεων αυτών έχει γίνει από τους De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel, αναφορά από De Bock κ.α. 2007). Όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν, προσπάθησαν να είναι όσο το δυνατόν πιο προσεκτικοί στην αξιολόγηση των σχετικών αναφορών, καθώς αυτές προέρχονταν από μελέτες που εξυπηρετούσαν άλλα ερευνητικά ερωτήματα. Επισημαίνουν επίσης την δυσκολία που είχαν στο να διακρίνουν κατά πόσο η επιλογή των ιδιοτήτων των γραμμικών σχέσεων σε καταστάσεις που δεν ισχύουν, αποτελούσε συνειδητή ή όχι χρήση του γραμμικού μοντέλου. Στην επισκόπηση των περιπτώσεων εκδήλωσης γραμμικών λαθών, εξετάζουν πόσο μεμονωμένες ή καθολικές είναι αυτές, αναζητούν οι ομοιότητες και οι διαφορές ανάμεσά τους και κάνουν εννοιολογικές διακρίσεις, διατηρώντας κατά νου τα διαφορετικά χαρακτηριστικά των γραμμικών σχέσεων. (De Bock κ.α. 2007 σελ 6). Παραθέτουμε παρακάτω τις βασικές περιπτώσεις εσφαλμένης εφαρμογής της γραμμικότητας, που αναφέρονται στην καταγραφή τους, μαζί με κάποιες σχετικές ερευνητικές αναφορές από τους ίδιους, ή άλλους μελετητές :

<u>Επίλυση αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων</u>

Κατά την διδασκαλία της αναλογίας που ξεκινά από το δημοτικό σχολείο, οι μαθητές έρχονται συχνά αντιμέτωποι με γραμμικά προβλήματα, τα οποία απαιτούν τον προσδιορισμό μιας άγνωστης τιμής (missing-value), και διατυπώνονται συνήθως με ένα στερεότυπο σχήμα. Τα προβλήματα αυτά σχετίζονται με τη μέθοδο που στον ελληνικό χώρο είναι γνωστή ως *«απλή μέθοδος των τριών»*. Στο πλαίσιο της διδασκαλίας, θεωρείται συχνά ότι τέτοια λεκτικά προβλήματα μπορούν να ενεργήσουν ως υποκατάστατο των καθημερινών καταστάσεων, στις οποίες οι μαθητές ίσως χρειαστούν τις συγκεκριμένες μαθηματικές δεξιότητες (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Η βασική γλωσσική δομή για τα αναλογικά λεκτικά προβλήματα περιλαμβάνει τέσσερις ποσότητες (α, β, γ, δ), από τις οποίες, στις περισσότερες περιπτώσεις, οι τρεις είναι γνωστές και η μια άγνωστη. Η ίδια σχέση που συνδέει το α με το β, συνδέει και το γ με το δ, επομένως η απάντηση προκύπτει από την επίλυση της αναλογίας α/β=γ/δ.

Εντούτοις, κάποιες φορές ένα πρόβλημα διατυπώνεται σύμφωνα με την προηγούμενη γενική δομή χωρίς την ύπαρξη αναλογίας. Σε αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν ***«ψευδοαναλογικό»***, λόγω της ισχυρής τάσης που δημιουργεί για την εφαρμογή του γραμμικού προτύπου. Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση του προβλήματος: «Ένας πιανίστας χρειάζεται 5 λεπτά για να εκτελέσει ένα μουσικό θέμα. Πόσο χρόνο θα χρειαστούν 3 πιανίστες προκειμένου να εκτελέσουν το ίδιο θέμα;», οι μαθητές απαντούν αυθόρμητα ότι χρειάζονται 15 λεπτά. Οι πιο βασικές περιπτώσεις «*ψευδοαναλογικών*» προβλημάτων που έχουν χρησιμοποιηθεί στις διάφορες μελέτες είναι:

- **Προβλήματα στα οποία δεν υπάρχει καμία ακριβής λογικομαθηματική σχέση μεταξύ των δεδομένων τους**

  π.χ *«Ένα κατάστημα πουλά 312 Χριστουγεννιάτικες κάρτες τον Δεκέμβριο. Πόσες περίπου νομίζετε εσείς ότι θα πουλήσει συνολικά τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο και Μάρτιο;»*

  «Ο καλύτερος χρόνος του Γιάννη στα 100m είναι 17 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να τρέξει 1km;»,

- **Προβλήματα στα οποία υπάρχει μαθηματική σχέση που συνδέει τα δεδομένα, η οποία όμως δεν είναι γραμμική.** Μερικές περιπτώσεις τέτοιων προβλημάτων είναι:

  Προβλήματα προσθετικού συλλογισμού: π.χ:*«Η Ellen και η Kim τρέχουν γύρω από ένα στίβο. Τρέχουν εξίσου γρήγορα, αλλά η Ellen ξεκίνησε αργότερα. Όταν η Ellen ολοκλήρωσε 5 γύρους, η Kim είχε κάνει 15 γύρους. Πόσους γύρους είχε κάνει η Kim όταν η Ellen ολοκλήρωσε τους 30;»*

  (*σωστή απάντηση:* 40 γύρους, *γραμμική απάντηση:* 90 γύρους)

Προβλήματα που αναφέρονται σε μεταβολές της μορφής f(x) = αx+β με $\beta \neq 0$ (affine) : *«Η ατμομηχανή ενός τραίνου έχει μήκος 12m. Όταν συνδέονται 4 βαγόνια στην ατμομηχανή, το τραίνο έχει μήκος 52 m. Ποιο θα είναι το μήκος του τραίνου εάν συνδεθούν στην ατμομηχανή 8 βαγόνια;»*

(*σωστή απάντηση*: 92 m, *γραμμική απάντηση*: 104 m)

Προβλήματα που αναφέρονται σε μια σταθερή κατάσταση: *«Η μαμά άπλωσε 3 πετσέτες στο σκοινί και μετά από 12 ώρες είχαν στεγνώσει. Η γιαγιά άπλωσε 6 πετσέτες στο σκοινί. Πόση ώρα θα τους πάρει να στεγνώσουν;»*

(*σωστή απάντηση:* 12 ώρες, *γραμμική απάντηση:* 24 ώρες)

(De Bock κ.α. 2007 σελ 9)

Οι προηγούμενες κατηγορίες προβλημάτων έχουν χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικά είδη μελετών.

Τα προβλήματα της πρώτης κατηγορίας χρησιμοποιήθηκαν σε μελέτες που είχαν επικεντρωθεί στο *«να διευκρινιστεί ο ρόλος των σχολικών μαθηματικών στην δυνατότητα αντίληψης καθημερινών καταστάσεων»* (Greer 1993, Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1994, Verschaffel κ.α 2000, από De Bock κ.α 2007 σελ 7). Σε αυτές τις μελέτες, μαθητές που είχαν τελειώσει την στοιχειώδη εκπαίδευση ήρθαν αντιμέτωποι μεταξύ άλλων καταστάσεων προβλήματος και με προβλήματα αυτού του είδους. Μόνο λίγοι ήταν οι μαθητές που έδειξαν να συνειδητοποιούν ότι η γραμμική σκέψη δεν θα μπορούσε να δώσει την σωστή απάντηση αλλά μόνο (στην καλύτερη περίπτωση) μια προσεγγιστική απάντηση. Για το πρόβλημα των δρομέων τα ποσοστά των μαθητών που φάνηκε να έχουν συνειδητοποιήσει κάτι τέτοιο κυμάνθηκαν από 0% έως 7% σε μια σειρά επαναλήψεων της έρευνας σε διάφορες χώρες (Verschaffel και λοιποί, 2000). Χαρακτηριστικά, αυτό το είδος προβλήματος απέσπασε πολλές απαντήσεις βασισμένες στον συλλογιστικό κανόνα ***«k φορές το α – k φορές το β»*** *(*π.χ., για το πρώτο πρόβλημα: *«Ο Γιάννης χρειάζεται 10πλάσιο χρόνο να τρέξει 10πλάσια απόσταση»* ή σε άλλη άτυπη διατύπωση για το δεύτερο πρόβλημα: *«Το κατάστημα θα πωλήσει 312 + 312 + 312 = 936 κάρτες»).*

Ωστόσο, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή σε σχέση με τη συμπεριφορά των μαθητών σε αυτού του είδους τα προβλήματα. Συγκεκριμένα, τα περισσότερα από αυτά δεν είναι *«επιλύσιμα»* (δηλ. δεν υπάρχει καμία ακριβής λογικομαθηματική σχέση μεταξύ των δεδομένων τους, η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει σε ακριβή απάντηση) και επομένως είναι *«μη τυπικά»* ή ακόμα και *«παραπλανητικά»* για τους μαθητές, καθώς δεν αναμένουν *«μη επιλύσιμα»* προβλήματα σε ένα εξεταστικό πλαίσιο. Έτσι, δεν είναι σίγουρο το ότι οι μαθητές σε αυτές τις μελέτες πραγματικά πίστεψαν ότι υπήρξε ένας γραμμικός συσχετισμός. Λαμβάνοντας υπόψη τους κανόνες του παιχνιδιού των σχολικών λεκτικών προβλημάτων – ή του *«διδακτικού συμβολαίου»* όπως το διατύπωσε ο Brousseau (1997), οι μαθητές που έλυσαν τα προβλήματα αυτά, ίσως είχαν υποθέσει ότι υπάρχει μια ακριβής, αριθμητική απάντηση την οποία πρέπει να προσδιορίσουν κάνοντας πράξεις με τους αριθμούς που δίνονται στο πρόβλημα. (De Bock κ.α. 2007 σελ 7)

Τα προβλήματα της δεύτερης κατηγορίας χρησιμοποιήθηκαν σε μελέτες που αφορούσαν την *«διδασκαλία διαχείρισης αναλογικών προβλημάτων»,* είτε σε μελέτες που εξετάζουν ρητά την *«κατάχρηση της γραμμικότητας από τους μαθητές κατά την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων».* Σε αντίθεση με τα *«ψευδοαναλογικά»* προβλήματα της πρώτης κατηγορίας, τα προβλήματα αυτά δέχονται σαφώς μια ακριβή λύση, η οποία όμως δεν είναι γραμμική. Παρ΄ όλα αυτά στις μελέτες που χρησιμοποιήθηκαν απέσπασαν υψηλά ποσοστά αποτυχίας.

Οι Cramer, Post, και Currier (1993) έδωσαν σε 33 επαγγελματίες δασκάλους στοιχειώδους εκπαίδευσης το προσθετικό πρόβλημα που έχουμε προαναφέρει : ***«Η Sue και η Julie έτρεχαν με την ίδια ταχύτητα γύρω από έναν στίβο. Η Sue ξεκίνησε πρώτη. Όταν έκανε 9 γύρους, η Julie είχε τρέξει 3 γύρους. Όταν η Julie ολοκλήρωσε 15 γύρους, πόσους είχε τρέξει η Sue;*** **(**Van Dooren κ.α. 2008)**»** Παρατήρησαν ότι οι τριάντα δύο από τους δασκάλους αυτούς αντιμετώπισαν αυτό το πρόβλημα θεωρώντας και επιλύοντας την αναλογία: $9/3 = x/15$ άρα $3x = 135$ και επομένως $x = 45$. Το συγκεκριμένο πρόβλημα σαφώς και δέχεται ακριβή λύση, και επιπλέον, αυτοί οι δάσκαλοι που εξετάζονταν κατείχαν όλα τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για να τον λύσουν.

Μελέτη που εξετάζει ρητά την κατάχρηση της γραμμικότητας από τους μαθητές κατά την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων, έχει πραγματοποιηθεί από τους Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, και Verschaffel (2005). Διερεύνησαν πότε εμφανίζεται η τάση κατάχρησης της γραμμικότητας κατά την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, καθώς και πώς διαμορφώνεται ηλικιακά σε σχέση με την αποκτηθείσα εμπειρία των μαθητών και τις αναπτυσσόμενες δεξιότητες του συλλογισμού τους. Στην έρευνα συμμετείχε μια μεγάλη ομάδα μαθητών 2ης έως και 8ης τάξης (Β΄ Δημοτικού έως Β΄ Γυμνασίου), οι οποίοι αντιμετώπισαν μια δοκιμασία αποτελούμενη από 8 λεκτικά προβλήματα προσδιορισμού μιας άγνωστης τιμής (missing value). Τα 2 από αυτά ήταν αναλογικά και τα υπόλοιπα 6 ήταν μη αναλογικά, χωρισμένα σε τρείς διαφορετικές υποκατηγορίες: 2 με *προσθετικό συλλογισμό*, 2 αναφερόμενα σε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x+\beta$ *με* $\beta \neq 0$ (*affine*) και 2 που αναφέρονταν σε μια κατάσταση που δεν μεταβάλλεται (*σταθερό μοντέλο)* .

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι αν και μερικές δεξιότητες αναδυόμενου γραμμικού συλλογισμού, εμφανίστηκαν ήδη στους μαθητές (2ης τάξης) δηλ της Δευτέρας τάξης Δημοτικού, η μεγαλύτερη πρόοδος στην λύση των λεκτικών αναλογικών προβλημάτων σημειώθηκε μεταξύ της 3ης και 6ης τάξης. Σχετικά με τα μη αναλογικά προβλήματα, σε περισσότερες από το ένα τρίτο όλων των απαντήσεων έγινε λανθασμένη εφαρμογή του γραμμικού προτύπου. Η τάση να εμπιστεύονται υπέρμετρα την γραμμικότητα, εμφανίστηκε παράλληλα με την κατάκτηση δεξιοτήτων για την επίλυση λεκτικών ανάλογων προβλημάτων. Ήταν ήδη αξιοπρόσεχτη στους μαθητές της 2ης τάξης, αλλά αυξανόταν αρκετά στις επόμενες τάξεις, με κορύφωση στην 5η τάξη, όπου οι περισσότερες από τις μισές απαντήσεις στα μη αναλογικά προβλήματα ήταν γραμμικές. Μετά από αυτήν την κορύφωση, ο αριθμός των γραμμικών λαθών μειώθηκε βαθμιαία, αλλά δεν εξαφανίστηκαν εντελώς. Στην 8η τάξη (Β Γυμνασίου) σε περισσότερες από το ένα πέμπτο των απαντήσεων παρατηρήθηκε λανθασμένη εφαρμογή της γραμμικότητας.

Υπήρξαν μερικές αξιοσημείωτες διαφορές, σύμφωνα με το υποκείμενο μαθηματικό μοντέλο των μη αναλογικών προβλημάτων. Θα περίμενε κάποιος πως τα λεκτικά προβλήματα που αναφέρονται σε μια σταθερή κατάσταση (όπως αυτό των σκοινιών απλώματος που προαναφέρθηκε) θα ήταν τα ευκολότερα στον έλεγχό τους (δεδομένου ότι δεν υπήρχε καμία ανάγκη υπολογισμών). Ωστόσο, σε αυτά εμφανίστηκε το υψηλότερο ποσοστό γραμμικών λαθών (μέχρι 80% στη 5η τάξη). Για μερικά λεκτικά προβλήματα (όπως το προσθετικό πρόβλημα των δρομέων), το ποσοστό των σωστών απαντήσεων μειώθηκε ακόμη και μέχρι 30% από την 3η έως την 5η τάξη ενώ το ποσοστό των λανθασμένων αναλογικών απαντήσεων αυξήθηκε αναλόγως.

Αυτή η μελέτη των Van Dooren κ.α.. (2005) έδειξε ότι στα σχολεία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι μαθητές δείχνουν έντονα την τάση να εφαρμόσουν τις αναλογικές στρατηγικές λύσης όταν έρχονται αντιμέτωποι με τα μη γραμμικά προβλήματα προσδιορισμού της άγνωστης τιμής (missing value) στην περιοχή της στοιχειώδους αριθμητικής. Η τάση αυτή προέκυψε ήδη από την 2η τάξη, αλλά αυξήθηκε αρκετά μέχρι τη 5η τάξη. Σε όλο αυτό το διάστημα, οι μαθητές δέχονταν εντατική κατάρτιση στην επίλυση των προβλημάτων αναλογίας. Αν και το μέγεθος της αύξησης διέφερε μεταξύ των ευδιάκριτων κατηγοριών προβλημάτων, αυτή η τάση ήταν γενική.

Ένα ανοικτό ερευνητικό ερώτημα για όλες τις προηγούμενες αναφορές κατάχρησης της γραμμικότητας σε λεκτικά προβλήματα, είναι το κατά πόσο γίνεται συνειδητά ή όχι η επιλογή του γραμμικού μοντέλου. Όπως σημειώνει ο Greer (2010) υπάρχουν ίσως πολλοί λόγοι που θα μπορούσαν να οδηγήσουν έναν μαθητή στο να ανταποκριθεί γραμμικά σε μια μη γραμμική κατάσταση. Κάποιες πιθανές εκδοχές θα ήταν:

- Ο μαθητής αφού έχει σκεφτεί προσεκτικά για την κατάσταση, να έχει αποφασίσει ότι μια γραμμική ερμηνεία είναι κατάλληλη, είτε ακριβώς είτε προσεγγιστικά.
- Ο μαθητής να έχει σκεφτεί προσεκτικά για την κατάσταση, να έχει αποφασίσει ότι μια γραμμική ερμηνεία δεν είναι κατάλληλη, αλλά να καταφεύγει σε αυτήν μη μπορώντας να διατυπώσει μια κατάλληλη εναλλακτική λύση. Από το να μην απαντήσει καθόλου, προτιμά δηλαδή την απλούστερη γραμμική απάντηση.
- Αντιδρά σε επιφανειακά χαρακτηριστικά, όπως ένα ιδιαίτερο γλωσσικό πλαίσιο, υποθέτοντας ότι η απάντηση μπορεί να προκύψει από μια στερεότυπη, γραμμική, ερμηνεία (εφόσον αυτή η συμπεριφορά έχει αποδειχθεί επιτυχής από το παρελθόν).
- Ο μαθητής έχοντας ή όχι ερμηνεύσει την κατάσταση κατάλληλα, θέλει απλά να δώσει στον ερευνητή μια απάντηση, ώστε να αποφύγει και να προσπεράσει την εξεταστική διαδικασία.

Στην προσπάθεια να διερευνηθούν οι προηγούμενες εκδοχές, σε πολλές από τις σύγχρονες μελέτες ακολουθείται μια περισσότερο ποιοτική προσέγγιση με χρήση συνεντεύξεων.(πχ: De Bock κ.α. 2002, Hadjidemetriou & Williams . 2010)

Εξετάζονται επίσης παράμετροι που θα μπορούσαν να ενθαρρύνουν ή να περιορίσουν την επιλογή, στερεότυπων απαντήσεων βασισμένων σε επιφανειακά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Για παράδειγμα τα ευρήματα πιο πρόσφατων μελετών δείχνουν πως η φύση των αριθμητικών σχέσεων που εμφανίζονται στα μη γραμμικά λεκτικά προβλήματα, διαδραματίζει επίσης έναν ρόλο στην τάση των μαθητών να παρασυρθούν από ανάλογες στρατηγικές. Μερικοί παράγοντες που συνδέονται με τη **φύση των αριθμητικών σχέσεων,** είναι η παρουσία ή η απουσία ακέραιων λόγων, και το μέγεθος των κλασμάτων ή των αριθμών που χρησιμοποιούνται. Σε εκείνα τα λεκτικά προβλήματα όπου προκύπτουν ακέραιοι λόγοι , ή υπάρχουν μικρότεροι αριθμοί και κλάσματα, γίνεται πιο έντονη η τάση να δοθεί μια γραμμική λύση. Για παράδειγμα στο προαναφερθέν πρόβλημα του στίβου, η διατύπωση :*«Η Sue και η Julie έτρεχαν με την ίδια ταχύτητα γύρω από έναν στίβο .Η Sue ξεκίνησε πρώτη. Όταν η Julie είχε τρέξει 4 γύρου,ς η Sue είχε κάνει 6. Όταν η Julie ολοκλήρωσε 10 γύρους, πόσους είχε τρέξει η Sue;»* απέσπασε λιγότερες λανθασμένες γραμμικές απαντήσεις σε σχέση με αυτή όπου τριπλασιάζονταν οι γύροι της Julie. (Van Dooren κ.α. 2009, Fernandez κ.α. 2008). Εξετάζοντας επίσης κατά πόσο η χρήση μιας τεχνικής επίλυσης προβλήματος μπορεί να επηρεάσει την τάση προς τα γραμμικά λάθη, οι Fernandez κ.α. διαπίστωσαν ότι η χρησιμοποίηση του κανόνα τριών σε έναν ανάλογο έργο, υπονοεί τη χρήση αυτής της μεθόδου και στις μη αναλογικές καταστάσεις (Fernandez κ.α. 2008). Σε πρόσφατη μελέτη τους οι Van Dooren κ.α. παρατηρούν πως η απόδοση των μαθητών σε έργα ταξινόμησης προβλημάτων σε ομάδες, είναι καλύτερη από την απόδοσή τους στα υπολογιστικά προβλήματα. Όταν δηλαδή οι μαθητές ασχολούνται με ένα γραμμικό ή μη γραμμικό λεκτικό πρόβλημα, χωρίς την ανάγκη να παραχθούν μόνο οι υπολογιστικές απαντήσεις, συμμετέχουν σε ένα ποιοτικά διαφορετικό είδος μαθηματικής σκέψης και εμφανίζουν μια ωριμότερη συμπεριφορά στην διάκριση γραμμικών και μη γραμμικών καταστάσεων (Van Dooren κ.α. 2010).

Γραμμικά λάθη στη Γεωμετρία

Ο χώρος της Γεωμετρίας, είναι ίσως αυτός στον οποίο έχουν αναφερθεί τα περισσότερα «γραμμικά λάθη» από τους ερευνητές.

Μια από τις πιο γνωστές και πολύ συχνά ερευνημένες περιπτώσεις κακής χρήσης της γραμμικότητας από τους μαθητές στον χώρο αυτό, είναι αυτή που αφορά εφαρμογές σχετικά με την επίδραση μιας γραμμικής μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης ενός γεωμετρικού σχήματος στο εμβαδόν ή τον όγκο του.

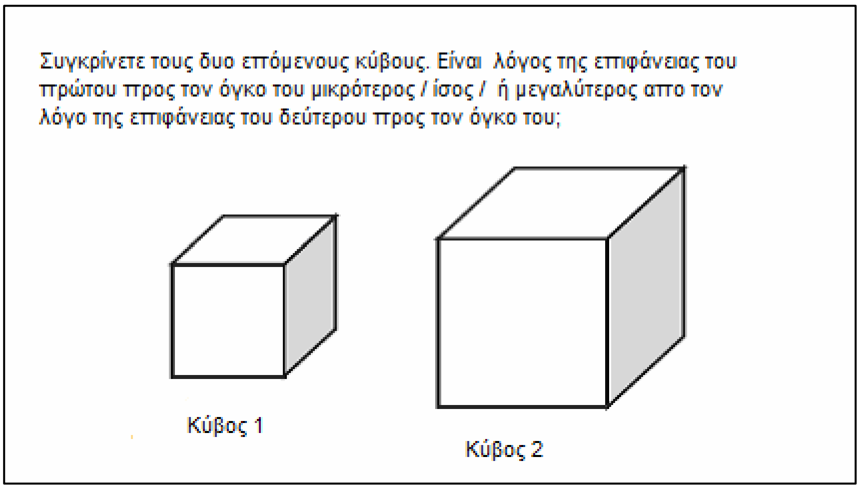
Όπως είναι γνωστό, οι εφαρμογές αυτές χαρακτηρίζονται από την ακόλουθη αρχή. Σε μια γραμμική διεύρυνση ή σμίκρυνση με έναν γραμμικό συντελεστή λ, τα μήκη πολλαπλασιάζονται με λ, το εμβαδόν με λ^2 και ο όγκος με λ^3.

Από μεγάλο πλήθος ερευνών που εστιάζουν στις λύσεις μαθητών σε αντίστοιχα προβλήματα, υποστηρίζεται πως η βαθιά κατανόηση των προαναφερθέντων σχέσεων μεταξύ των μηκών, των εμβαδών , και των όγκων όμοιων σχημάτων, είναι συνήθως μια αργή και επίπονη διαδικασία, καθώς οι μαθητές παραπλανιούνται συχνά υποθέτοντας πως οι σχέσεις αυτές είναι γραμμικές. (π.χ., Modestou Gagatsis & Pitta-Pantazi 2004 ,Mogensen 2004 ,NCTM 1989 ,Outhred & Mitchelmore 2000 , Rogalski 1982, Rouche 1989 , Simon & Blume 1994 , Tierney Boyd, & Davis 1990, αναφ από De Bock κ.α. 2007).

Τέτοια γραμμικά λάθη έχουν καταγραφεί στην ιστορία των μαθηματικών από την αρχαιότητα. Χαρακτηριστικά είναι τα γνωστά παραδείγματα που προαναφέρθηκαν στην εισαγωγή, το πρώτο από τον διάλογο *Μένων* του Πλάτωνα, όπου όταν ζητήθηκε από τον δούλο να σχεδιάσει ένα τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν από κάποιο άλλο δεδομένο τετράγωνο, αυτός πρότεινε τον διπλασιασμός της πλευράς του αρχικού τετραγώνου, και το δεύτερο είναι ο μύθος με τους Αθηναίους, που προσπαθώντας να ικανοποιήσουν το αίτημα του χρησμού για διπλασιασμό του βωμού του Απόλλωνα, διπλασίασαν τις πλευρές του.

Πιο πρόσφατα, το διεθνές συμβούλιο δασκάλων και καθηγητών (NCTM) υποστηρίζει πως *«οι περισσότεροι μαθητές από την 5η έως την 8η τάξη (5η Δημοτικού έως 2α Γυμνασίου), θεωρούν ανακριβώς, πως αν διπλασιαστούν οι πλευρές ενός σχήματος ώστε να προκύψει ένα όμοιο σχήμα, θα διπλασιαστούν επίσης το εμβαδόν και ο όγκος»* (National Council of Teachers of Mathematics 1989, αναφ από De Bock κ.α .1998).

Ένα ερευνητικά βασισμένο παράδειγμα, είναι το πρόβλημα των κύβων, που παρουσιάζεται στο σχήμα:



Η σωστή απάντηση σε αυτό το πρόβλημα είναι μεγαλύτερος, καθώς ο όγκος αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό από την επιφάνεια. Όταν δηλαδή η ακμή ενός κύβου πολλαπλασιάζεται με κ, η επιφάνειά του πολλαπλασιάζεται με $κ^2$ ($E_2= κ^2. E_1$) αλλά ο όγκος του με $κ^3$ ($V_2 = κ^3.V_1$) Επομένως ο λόγος της επιφάνειας προς τον όγκο στον πρώτο κύβο, θα είναι μεγαλύτερος προς τον αντίστοιχο στον δεύτερο ($(E_1/V_1) = k.(E_2/V_2)$, άρα $(E_1/V_1) \succ (E_2/V_2)$). Όταν δόθηκε σε φοιτητές βιολογίας βαθμών 10, 11, και 12, αντίστοιχα ποσοστά 41%, 45%, και 55% των σπουδαστών επέλεξαν την απάντηση «ίσο με», που υποθέτει πως αν το εμβαδόν της επιφάνειας πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό, τότε και ο όγκος πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό. (Livne 1996, από Van Dooren κ.α 2010).

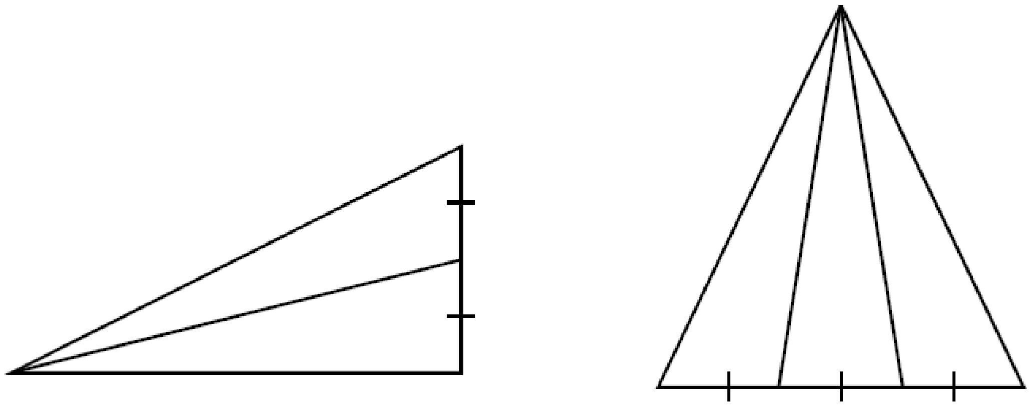
Τα τελευταία χρόνια, η τάση των μαθητών να δουν τις σχέσεις μεταξύ του μήκους και του εμβαδού ή μεταξύ του μήκους και του όγκου γραμμικές , έχει μελετηθεί εκτενώς (π.χ., De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998, 2002,2003, Modestou Gagatsis & Pitta-Pantazi 2004 ,Van Dooren κ.α. 2007). Σε μια σειρά εμπειρικών μελετών από τους De Bock κ.α., οι μαθητές απέτυχαν να αποφύγουν τις λανθασμένες γραμμικές λύσεις σε τέτοια προβλήματα, ακόμα και μετά από συγκεκριμένη υποστήριξη,(π.χ: την απαίτηση να γίνει ένα σχήμα, ή την προσπάθεια να στραφεί η προσοχή σε ένα ήδη έτοιμο σχήμα). Το αίτημα να γίνει ένα σχήμα συχνά παραμελήθηκε, και τα έτοιμα σχήματα σπάνια χρησιμοποιήθηκαν αποτελεσματικά. Ο μόνος πειραματικός χειρισμός που άσκησε κάποια θετική επίδραση, ήταν η επαναδιατύπωση προβλημάτων από το σχήμα προσδιορισμού άγνωστης τιμής (missing value) σε σχήμα σύγκρισης. (De Bock κ.α. 2000)

Σύμφωνα με τον Freudenthal, η προαναφερθείσα αρχή που χαρακτηρίζει την μεγέθυνση (ή την σμίκρυνση) των γεωμετρικών σχημάτων *«είναι πολύ θεμελιώδης στα μαθηματικά και την επιστήμη, αξίζει επομένως την μεγάλη προσοχή μας και από φαινομενολογική και από διδακτική άποψη»*. (Freudenthal 1983, αναφ απο De Bock κ.α. 2007 σελ 19).

Είναι εντυπωσιακό, το ότι οι προγενέστερες πραγματικές εμπειρίες των μαθητών σε χειρισμούς μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης δεν τους καθιστούν απαραίτητα ενήμερους για τον διαφορετικό τρόπο αύξησης των μηκών, των εμβαδών και των όγκων. Από αυτή την άποψη, είναι χαρακτηριστική η εμπειρία που περιγράφει ο Feys (1995, αναφ από De Bock κ.α. 2007), με τους δασκάλους-σπουδαστές του . Όταν ρωτήθηκαν τι θα συμβεί αν ενώσουν δύο σελίδες Α4 δίπλα-δίπλα σε ένα φωτοτυπικό μηχάνημα προκειμένου να σμικρυνθούν σε μια Α4 σελίδα, απάντησαν ανελλιπώς, πως το κείμενο δεν θα είναι πλέον αναγνώσιμο, αφού το ύψος και το πλάτος των χαρακτήρων και των σχεδίων θα υποδιπλασιαστούν.

Είναι χαρακτηριστική η έκπληξη των μαθητών, όταν σε περιπτώσεις μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης αντιλαμβάνονται πως το εμβαδόν και ο όγκος μεταβάλλονται με πολύ μεγαλύτερο ρυθμό, σε σχέση με το μήκος. Πράγματι, ένας υποτιθέμενος γίγαντας δέκα φορές ψηλότερος από έναν ενήλικα 70 κιλών, θα ζύγιζε 70 τόνους, ενώ ένα ξωτικό δέκα φορές μικρότερο από αυτόν τον ενήλικα, θα ζύγιζε μόλις 70 γραμμάρια (Streefland 1984 , Treffers1987, αναφ από De Bock κ.α. 2007).

Μια άλλη περίπτωση προσκόλλησης σε γραμμικές μεθόδους στο χώρο της γεωμετρίας, παρατηρείται όταν οι μαθητές εξετάζουν τη σχέση μεταξύ γωνιών και των πλευρών σε γεωμετρικά σχήματα, και κάνουν κατασκευές βασισμένες στις σχέσεις αυτές. Ο Rouche αναφέρει πως πολλοί μαθητές ακόμη και ενήλικες, θεωρούν ότι μια γωνία μπορεί να διχοτομηθεί ή να τριχοτομηθεί με την βοήθεια των κατασκευών του επόμενου σχήματος 1, οι οποίες στηρίζονται σε λανθασμένες γραμμικές υποθέσεις.(Rouche 1992a, από De Bock κ.α .2007 σελ 17).



Σχήμα 1 :Κατασκευές για την διχοτόμηση ή τριχοτόμηση της γωνίας βασισμένες σε λανθασμένες γραμμικές υποθέσεις

Η πρώτη κατασκευή υποθέτει μια γραμμική σχέση μεταξύ μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και της απέναντι πλευράς της. Η δεύτερη κατασκευή, η οποία είναι σωστή για την διχοτόμηση αλλά όχι για την τριχοτόμηση μιας γωνίας, υποθέτει μια γραμμική σχέση μεταξύ της γωνίας της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου και της βάσης του (ή μεταξύ μιας επίκεντρης γωνίας κύκλου και της αντίστοιχης χορδής).

Άλλοι λανθασμένοι συλλογισμοί που είναι βασισμένοι στην ακατάλληλη εφαρμογή ευθείας (ή της αντίστροφης) αναλογικότητας μεταξύ των μη-γραμμικά συσχετισμένων μεγεθών από την ίδια περιοχή της γεωμετρίας, περιγράφονται από τον De Bock π.χ:

«η γωνία ενός κανονικού δωδεκαγώνου μπορεί να προκύψει διαιρώντας την γωνία του κανονικού εξαγώνου δια έξι και πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με δώδεκα»,

«εάν κάποιος μπορεί να χωρίσει ένα επτάγωνο σε πέντε τρίγωνα (ενώνοντας μια κορυφή με όλες τις άλλες), τότε θα μπορεί να χωρίσει και ένα δεκατετράπλευρο σε δέκα τρίγωνα»,

«για να κατασκευάσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο κύκλο, αρκεί να σχηματίσουμε στην περιφέρεια διαδοχικές χορδές με μήκος μιας διαμέτρου ενώ για ένα εγγεγραμμένο κανονικό δωδεκάγωνο πρέπει το μήκος των χορδών να ισούται με το μισό της ακτίνας.». (διπλ De Bock-Docq, από De Bock κ.α. 2007 σελ 17).

Στο τελευταίο παράδειγμα, ο συλλογισμός των μαθητών ξεκινά λανθασμένα από το γεγονός πως για να κατασκευάσει κανείς ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο, μπορεί να ορίσει διαδοχικές χορδές με το μήκος της ακτίνας.

Πιθανότητες

Στην περιοχή των πιθανοτήτων, είναι αρκετά αισθητή η παρουσία φαινομένων τα οποία αποκαλούνται σαν *«παρανοήσεις»*, *«πλάνες»* , *«προκαταλήψεις»* κ.ο.κ. Είναι λάθη τα οποία δεν χαρακτηρίζουν μόνο τους μαθητές, αλλά έχουν καταφέρει να παγιδέψουν μεγάλους μαθηματικούς όλων των εποχών, όπως θα δούμε παρακάτω.

Από πολλούς ερευνητές, έχει υποστηριχθεί πως οι έννοιες της *«πιθανότητας»* και της *«αναλογίας»* είναι πολύ στενά συνδεδεμένες τόσο διαισθητικά όσο και γνωστικά (Fischbein & Gazit 1984, Lamprianou & Lamprianou 2002, Truran 1994 αναφορά απο Van Dooren κ.α 2003). Ως προς αυτόν το συσχετισμό έχει υπάρξει κατά το παρελθόν κάποια διαφωνία μεταξύ των μελετητών. Για παράδειγμα ο Fischbein μετά από μια μακροχρόνια σειρά ερευνών για την ανάπτυξη του πιθανολογικού συλλογισμού, υποστηρίζει πως τα παιδιά προσχολικής ηλικίας είναι σε θέση να κάνουν ποιοτικές προβλέψεις για την έκβαση πειραμάτων τύχης. Έχουν επομένως μια έμφυτη διαίσθηση της πιθανότητας (Fischbein 1975 από Van Dooren κ.α. 2003). Αντίθετα ο Piaget θεωρεί ότι η έννοια της πιθανότητας δεν μπορεί να κατακτηθεί πριν την ανάπτυξη του ανάλογου συλλογισμού (Piaget και Inhelder, 1951 από Van Dooren κ.α. 2003). Η προηγούμενη διαφωνία, προκλήθηκε κυρίως από τις διαφορετικές εστιάσεις των ερευνητικών προγραμμάτων των Fischbein και Piaget: Ο

Fischbein εστίασε κυρίως στα διαισθητικά θεμέλια και προδρόμους της σκέψης στο χώρο των πιθανοτήτων, ενώ ο Piaget προβληματίστηκε κυρίως με την απόκτηση από μιας ολοκληρωμένης (ή πιο προηγμένης) θεωρητικής έννοιας της πιθανότητας από τα παιδιά (Greer 2001 Hawkins και Kapadia, 1984 από Van Dooren κ.α. 2003). Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι μπορεί να υπάρχει μια αρχική διαισθητική κατανόηση για την πιθανότητα, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η έννοιά της είναι σαφώς συνδεδεμένη με την αναλογία.

Καθώς για να συγκρίνουμε πιθανότητες απαιτείται η σύγκριση δύο λόγων, ο ανάλογος συλλογισμός θεωρείται ένα βασικό εργαλείο του πιθανολογικού συλλογισμού (Lamprianou & Lamprianou, 2002, από De Bock κ.α. 2007 σελ 12).

Ας μην ξεχνάμε ότι σε δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου δίνεται σαν λόγος P(A) = N(A)/N(Ω)., επομένως η αναλογία ευνοϊκών και δυνατών εκβάσεων, μας οδηγεί σε ίσες πιθανότητες

Αναλογικός επίσης, είναι και ο συλλογισμός που απαιτείται για να συμπεράνουμε ότι έχουμε την ίδια πιθανότητα να τραβήξουμε μια λευκή μπάλα, από ένα δοχείο που περιέχει 20 άσπρες και 40 μαύρες μπάλες, και από ένα άλλο δοχείο με 100 άσπρες και 200 μαύρες σφαίρες.

Οι Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens, & Verschaffel, (2003) υποστηρίζουν πως αρκετά από τα λάθη στο χώρο των πιθανοτήτων, μπορούν να ερμηνευτούν σαν εσφαλμένες εφαρμογές της γραμμικότητας.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου λάθους, είναι η πεποίθηση των μαθητών πως η πιθανότητα μιας τουλάχιστον επιτυχίας σε ένα τυχερό παιχνίδι, είναι ανάλογη με τον αριθμό των δοκιμών. Είναι εκείνη η περίπτωση της διωνυμικής κατανομής, όπου η πιθανότητα **P(κ)** να έχουμε **κ** επιτυχίες σε **ν** επαναλήψεις δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας **p** σε κάθε επανάληψη, δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{P(\kappa)} = \binom{\nu}{\kappa} \mathbf{p}^{\kappa}\mathbf{(1\text{-}p)}^{\nu-\kappa}.$$

Σε μια τέτοια κατανομή, η πιθανότητα **P** μιας τουλάχιστον επιτυχίας σε ν δοκιμές είναι: $\mathbf{P = 1- P(0) = 1- (1\text{-}p)^{\nu}}$.

Το λάθος που γίνεται συχνά εδώ, είναι η πεποίθηση πως η πιθανότητα αυτή είναι ανάλογη του αριθμού επαναλήψεων ***ν*,** οπότε **P = ν.p**. Για παράδειγμα ότι η πιθανότητα να φέρω τουλάχιστον μια φορά 6 ρίχνοντας ένα ζάρι είναι 1/6 , ρίχνοντας δυο ζάρια μαζί είναι 2/6, ρίχνοντας τρία ζάρια μαζί είναι 3/6, κ.ο.κ.

Με αντίστοιχο συλλογισμό έγινε και το προαναφερόμενο στην εισαγωγή λάθος από τον Ιταλό μαθηματικό Cardano. Σωστά σκεπτόμενος πως η πιθανότητα να φέρει κανείς διπλό άσσο σε μια ταυτόχρονη ρίψη δυο ζαριών είναι 1/36, θεώρησε πως απαιτούνται 18 ρίψεις ώστε η πιθανότητα ενός τουλάχιστον διπλού άσσου να γίνει 50% (Székely, 1986, από Van Dooren κ.α 2003).

Ένα άλλο ιστορικό παράδειγμα είναι το «*πρόβλημα με τα ζάρια*». Ό Chevalier de Méré , πασίγνωστος παίκτης του 17^{ου} αιώνα , θεώρησε πως θα ήταν εξ ίσου επωφελές να στοιχηματίσει για «*μια τουλάχιστον φορά εξάρες σε 24 ρίψεις δυο ζαριών*» και «*τουλάχιστον μια φορά 6 σε 4 ρίψεις ενός δίκαιου ζαριού*», αφού 4/6 = 24/36. Σκέφτηκε δηλαδή πως από τις 4 στις 24 ρίψεις ο αριθμός των ευκαιριών μιας επιτυχίας πολλαπλασιάζεται επί 6 , όμως η αντίστοιχη πιθανότητα μιας επιτυχίας διαιρείται με 6 (από 1/6 γίνεται 1/36), επομένως το αποτέλεσμα θα παρέμενε το ίδιο. Ο έμπειρος de Méré σύντομα διαπίστωσε πως στοιχηματίζοντας στο πρώτο ενδεχόμενο, δεν είχε το ίδιο οικονομικό όφελος με το δεύτερο. Συμβουλεύθηκε τελικά το φίλο του Pascal, ο οποίος του εξήγησε ότι η πιθανότητα για να πάρει τουλάχιστον μια φορά έξι σε 4 δοκιμές είναι ίση με $1 - (5/6)^4 = 0.52$, δηλαδή λίγο μεγαλύτερη του μισού, ενώ η πιθανότητα για μια τουλάχιστον φορά εξάρες σε 24 ρίψεις δύο ζαριών, είναι $1 - (35/36)^{24} = 0.49$, η οποία είναι ένα λίγο μικρότερη του μισού. (Van Dooren κ.α. 2003).

Ο Freudenthal σχολίασε με οξύτητα αυτόν τον προβληματικό συλλογισμό του de Méré :

> *……… εφάρμοσε τα μαθηματικά που ήξερε, εκείνο το είδος των μαθηματικών που στην παιδική μου ηλικία ονομαζόταν απλή μέθοδος των τριών… Ίσως θα είχε αποδώσει καλύτερα εάν δεν είχε μάθει ποτέ μαθηματικά!*
>
> (Freudenthal, 1973 από De Bock κ.α 2003)

Και στα δυο προηγούμενα ιστορικά παραδείγματα, το λάθος προέκυψε από την άδηλη υπόθεση ότι υπάρχει μια γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην πιθανότητα μιας τουλάχιστον επιτυχίας **(P)** και το πλήθος των δοκιμών **(ν)** σε μια διωνυμική κατανομή.

Μια άλλη περίπτωση παρερμηνειών, αναφέρεται στην αγνόηση του μεγέθους των δειγμάτων. Οι Fischbein και Scharch, 1997 έδωσαν το ακόλουθο πρόβλημα σε μαθητές 5ης (5η Δημοτικού) έως 11ης τάξης (2α Λυκείου):

Η πιθανότητα να πάρουμε κεφαλή τουλάχιστον δύο φορές κατά την ρίψη τριών νομισμάτων είναι μικρότερη από / ίση με /μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πάρουμε τουλάχιστον 200 φορές κεφαλή σε ρίψη 300 νομισμάτων;.

Διαπιστώθηκε ότι ένας μεγάλος αριθμός σπουδαστών σε κάθε βαθμό υποστήριξε ότι αυτές οι πιθανότητες είναι ίσες (και συχνότερα το δικαιολόγησαν με την ισότητα των λόγων 2/3 = 200/300. Η παρερμηνεία αυτή αυξανόταν με την πάροδο της ηλικίας καθώς υποστηρίχτηκε από το 30% των μαθητών 5ης τάξης και από το 80% των μαθητών 11ης τάξης(Fischbein και Schnarch 1997από Van Dooren κ.α. 2003)

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα λάθους που καταγράφουν οι Van Dooren κ.α το 2003 κατά την έρευνά τους για την παρουσία της κατάχρησης των γραμμικών ιδιοτήτων στον πιθανολογικό συλλογισμό, είναι το *«παράδοξο των γενεθλίων»*. (Hawkins & Kapadia 1984 , Shaughnessy 1992 από Van Dooren κ.α. 2003). Οι περισσότεροι μαθητές μένουν έκπληκτοι όταν μαθαίνουν πως σε μια ομάδα 23 ανθρώπων, η πιθανότητα να έχουν τουλάχιστον δυο γενέθλια την ίδια ημέρα υπερβαίνει το 0.5. Για να υπολογίσουν την πιθανότητα του ενδεχομένου, πολλοί μαθητές σχηματίζουν τον λόγο του πλήθους των *«διαθέσιμων»* γενεθλίων της τάξης (23), προς τον συνολικό αριθμό των *«διαθέσιμων»* γενεθλίων (365 σε ένα κανονικό έτος) και οδηγούνται σε μια εκτιμώμενη πιθανότητα 23/365 = 0.06, η οποία είναι μια κακή χαμηλή εκτίμηση της πραγματικής πιθανότητας. Υποθέτουν δηλαδή σιωπηρά μια γραμμική σχέση ανάμεσα στον αριθμό των μαθητών της τάξης και της πιθανότητας των διπλών γενεθλίων.

Η μελέτη Van Dooren κ.α. (2003), παρείχε εμπειρικές ενδείξεις πως όντως η υπερεμπιστοσύνη στην γραμμικότητα αποτελεί την εξήγηση των λαθών που γίνονται στις περιπτώσεις αυτές. Αντιμετώπισαν δυο μεγάλες ομάδες μαθητών 10ης και 12ης τάξης (αντίστοιχα Γ΄ Γυμνασίου και Γ΄ Λυκείου) με μια δοκιμασία που αποτελούνταν από διάφορα προβλήματα, τοποθετημένα στο πλαίσιο της ρίψης δίκαιων ζαριών. Οι μαθητές της 12ης τάξης είχαν παρακολουθήσει μια εισαγωγική σειρά μαθημάτων στις πιθανότητες (συμπεριλαμβανομένης και της διωνυμικής κατανομής), ενώ αυτοί της 10ης τάξης όχι. Στη δοκιμασία, οι συμμετέχοντες έπρεπε να κάνουν μαζί ποιοτικές και ποσοτικές συγκρίσεις των πιθανοτήτων δύο ενδεχομένων. Ποιοτική σύγκριση σημαίνει ότι οι συμμετέχοντες έπρεπε να κρίνουν εάν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ήταν μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα ενός άλλου ενδεχομένου (π.χ. «*Η πιθανότητα να φέρεις τουλάχιστον 2 φορές τρία κατά την ρίψη ενός ζαριού 4 φορές είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα να φέρεις τουλάχιστον 2 φορές τρία κατά την ρίψη του ζαριού 5 φορές;* »). Για τις ποσοτικές συγκρίσεις, οι ερευνητές πρότειναν δυνατές σχέσεις ανάμεσα στις πιθανότητες δύο ενδεχομένων και οι συμμετέχοντες έπρεπε να κρίνουν την ορθότητα αυτών των σχέσεων (π.χ. «*η πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον 2 φορές έξι κατά την ρίψη ενός ζαριού 12 φορές , είναι 3 φορές μεγαλύτερη από την πιθανότητα να έρθει τουλάχιστον 2 φορές έξι κατά την ρίψη του ζαριού 4 φορές*». Κρίνετε αν είναι *σωστό* ή *λάθος*). Οι προτεινόμενες ποσοτικοποιήσεις σε αυτά τα θέματα ήταν γραμμικές, επομένως οι μαθητές έπρεπε πάντα να τις κρίνουν σαν λανθασμένες. Για όλα τα προβλήματα της δοκιμασίας, ζητήθηκε από τους μαθητές να δικαιολογήσουν την απάντησή τους.

Η μελέτη αυτή παρείχε εμπειρικά στοιχεία για το ότι οι μαθητές του Γυμνασίου έχουν μια καλή ποιοτική κατανόηση των πιθανολογικών καταστάσεων και είναι σε θέση να συγκρίνουν δύο τέτοιες καταστάσεις που διαφέρουν σε μια μεταβλητή (π.χ., στα πλαίσια της ρίψης ζαριού, αντιλαμβάνονται ότι η πιθανότητα να έχεις τουλάχιστον μια φορά έξι, αυξάνεται με τον αριθμό των δοκιμών). Αυτή η κατανόηση είναι παρούσα ακόμα και στους μαθητές που δεν έχουν διδαχθεί πιθανότητες. Την ίδια ώρα εντούτοις, κατά την ποσοτικοποίηση των σωστών ποιοτικών τους ιδεών οι περισσότεροι μαθητές έχουν μια ισχυρή τάση να θεωρούν γραμμικές τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών σε μια διωνυμική κατανομή πιθανότητας. Αυτή η τάση ήταν έντονα παρούσα σε όλους τους μαθητές στην ερευνητική ομάδα, ακόμη και σε εκείνους που είχαν διδαχθεί την διωνυμική κατανομή πιθανότητας στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών τους.

Μια ποιοτική ανάλυση των γραπτών σημειώσεων και των εξηγήσεων που συνόδευαν τις λανθασμένες απαντήσεις στα προβλήματα των ποσοτικών συγκρίσεων αποκάλυψαν πως περισσότερες από 80% των ανακριβών απαντήσεων σε αυτά, θα μπορούσαν να αναγνωριστούν σαν επακόλουθα της υπέρμετρης εμπιστοσύνης των μαθητών στο γραμμικό μοντέλο. Μερικά παραδείγματα τέτοιων αναφέρονται από τους ερευνητές (σελ 131) :

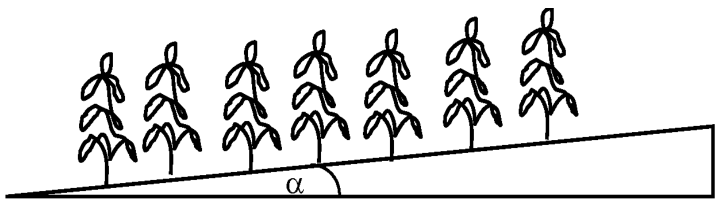
Στην πρώτη περίπτωση, έχεις την δυνατότητα να προσπαθήσεις τριπλάσιες φορές για να επιτύχεις το ίδιο αποτέλεσμα (δύο φορές έξι), είναι λοιπόν εμφανές ότι η πιθανότητα νίκης είναι τρεις φορές μεγαλύτερη .

Η πιθανότητα να φέρεις 2 εξάρια σε 12 δοκιμές είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από το να πάρεις 2 εξάρια σε 4 δοκιμές. Και το 12 είναι τρεις φορές μεγαλύτερο του 4, επομένως η πρόταση είναι σωστή.

Γραμμικά λάθη σε υπολογιστικά προβλήματα άλγεβρας και ανάλυσης

Μελέτες για την χρήση των γραμμικών προτύπων σε καταστάσεις που δεν ισχύουν, έχουν πραγματοποιηθεί και ανάμεσα σε προπτυχιακούς φοιτητές πανεπιστημίων. (Esteley κ.α. 2004, Villarreal κ.α. 2004). Αφορμή για αυτές απετέλεσε η παρατήρηση πως συχνά, κατά την επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων διαφορετικών τύπων και πλαισίων, οι φοιτητές κατέληγαν σε λανθασμένες απαντήσεις, υποθέτοντας σιωπηρά γραμμικές σχέσεις.

Για παράδειγμα όταν σε μάθημα τοπογραφίας ζητήθηκε από φοιτητές αγρονομίας να υπολογίσουν την κλίση του (s) του εδάφους του σχήματος που σχηματίζει γωνία 5^o με το οριζόντιο επίπεδο, δόθηκαν απαντήσεις σαν την ακόλουθη:



$$45^o \rightarrow 100\ \%$$

$$5^o \rightarrow s = \frac{100 \cdot 5}{45} = 11.11\%$$

(Esteley κ.α 2010)

Στις μελέτες που πραγματοποιήθηκαν με τους φοιτητές, η τάση προς την γραμμικότητα φάνηκε να είναι τόσο ισχυρή, ώστε να μην αποφεύγονται αυτές οι γραμμικές λύσεις, ακόμα και όταν κατά την διατύπωση του προβλήματος δίνονταν ρητά το μοντέλο μιας μη γραμμικής μεταβολής (τετραγωνικής, εκθετικής, λογαριθμικής, κ.λπ.). Για παράδειγμα στο πρόβλημα:

Μετά τον πρώτο μήνα ζωής, η ανάπτυξη ενός δένδρου ακολουθεί την εξίσωση :

$$h(t)= 8 \cdot \log_2 t + 70,$$

όπου το ύψος δίνεται σε cm και ο χρόνος σε μήνες.

1) *Υπολογίστε το ύψος του δένδρου μετά από 6 μήνες*
2) *Βρείτε πόσος χρόνος θα χρειαστεί ώστε το δένδρο να γίνει 1m.*

Το 10% των σπουδαστών υπολόγισε μεν σωστά το ύψος του δένδρου μετά 6 μήνες από τον δοθέν τύπο, αλλά στο δεύτερο ερώτημα εφάρμοσε την μέθοδο των τριών, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του πρώτου (Esteley κ.α. 2004, Villarreal κ.α. 2004). Πιθανόν εφαρμόζοντας τον κανόνα των τριών στην απάντηση του δεύτερου ερωτήματος οι σπουδαστές δεν γνώριζαν πως χρησιμοποιούσαν την ιδιότητα $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$ που ισχύει μόνο στις γραμμικές συναρτήσεις (Esteley κ.α. 2004, Villarreal κ.α. 2004, Esteley κ.α 2010)

Μια άλλη περίπτωση αφορά την επίλυση του προβλήματος: *«εάν ένα φυτό είναι 30cm στην αρχή μιας μέτρησης και το ύψος του αυξάνεται 50% κάθε μήνα ,τι ύψος θα έχει μετά από 3 μήνες;»* Παρατηρήθηκε ότι το 62% των σπουδαστών σκέφτηκαν γραμμικά σχετικά με την αύξηση του ύψους συναρτήσει του χρόνου, αντί να λάβουν υπ’ όψιν τον εκθετικό χαρακτήρα αυτής της μεταβολής. (Esteley Villarreal & Alagia 2004 , Villarreal Esteley & Alagia 2004, Esteley κ.α. 2010).

Η κατάχρηση της γραμμικότητας κατά την αριθμητική αποτίμηση

Η πρώτη ανθρώπινη δραστηριότητα που μας φέρνει σε επαφή με την γραμμικότητα και αναδεικνύει την αποτελεσματικότητά της στην ερμηνεία του πραγματικού κόσμου, είναι εκείνη της μέτρησης. Εδώ, ο πληθικός αριθμός είναι ανάλογος του αριθμού των *«μετρήσιμων γεγονότων»* καθώς και της διάρκειας της μέτρησης. Το αριθμητικό μας σύστημα αποτελεί επίσης έκφραση της γραμμικότητας. Οι φυσικοί αριθμοί είναι τοποθετημένοι σε σταθερά διαστήματα ξεκινώντας από το 0 , που σημαίνει ότι το 2 είναι δυο φορές μεγαλύτερο από το 1, ότι το 100 αποτελείται από 5 ίσα μέρη των 20 κ.ο.κ.

Μελέτες που αναφέρονται από τους Van Dooren κ.α, διαπιστώνουν πως αρχικά τα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται το αριθμητικό σύστημα σαν γραμμικό. Μπορεί να αντιλαμβάνονται σαν ίσα τα διαστήματα ανάμεσα στο 0 και το 10 και ανάμεσα στο 10 και το 20, αλλά ταυτόχρονα είναι δυνατό να θεωρούν μικρότερη την απόσταση των 12000 και 12500 από αυτή των 10 και 100. Αυτό φάνηκε σε πειράματα όπου τους ζητήθηκε να τοποθετήσουν αυτούς τους αριθμούς σε μια αριθμογραμμή, στην οποία ήταν σημειωμένα μόνο τα άκρα (0 και 10000) (Dehaene 1997, αναφ από Van Dooren κ.α 2007 σελ 16). Ο εντοπισμός των αριθμών σε μια τέτοια κενή αριθμογραμμή γίνεται βαθμιαία κατά την διάρκεια της βασικής εκπαίδευσης, παράλληλα με την κατάκτηση της γραμμικής αντιπροσώπευσης του μεγέθους των αριθμών (Siegler και Opfer 2003, από Van Dooren κ.α 2007).

Το περίεργο όμως είναι πως ενώ έχουν αποκτήσει αυτή την γραμμική αντιπροσώπευση του αριθμητικού συστήματος, αρχίζουν ταυτόχρονα να την γενικεύουν με λανθασμένο τρόπο. Σε μια μελέτη σχετική με την ανάπτυξη της ικανότητας του υπολογισμού του μεγέθους εκθετικών παραστάσεων, ζητήθηκε από μαθητές μεταξύ 12 και 18 χρονών να τοποθετήσουν σε μια κενή αριθμογραμμή παραστάσεις της μορφής α^{ν}. Περίπου οι μισοί από τους μαθητές του συνολικού δείγματος (και κυρίως αυτοί με ηλικίες από 12 – 16 έτη) χρησιμοποίησαν έναν γραμμικό πρότυπο (αντί ενός τετραγωνικού ή εκθετικού) στις αναπαραστάσεις τους. Για παράδειγμα επέλεξαν ίδια απόσταση ανάμεσα στους αριθμούς 2^2, 4^2 και 6^2 ,όπως επίσης και ανάμεσα στους 5^2 , 5^4 και 5^6. Οι μαθητές εφάρμοσαν και εδώ την ιδιότητα $f(k\cdot x) = k\cdot f(x)$ σε ένα μη γραμμικό πλαίσιο. (Sastre & Mullet, 1998 από Van Dooren κ.α 2007) Το φαινόμενο αυτό μπορεί επίσης να εξηγηθεί με την εξοικείωση που έχουν αποκτήσει οι μαθητές στην διαίρεση της αριθμογραμμής σε ίσα τμήματα, κάτι που επιβάλλει ο γραμμικός χαρακτήρας του αριθμητικού μας συστήματος.

Η κατάχρηση της γραμμικότητας στον χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων

Κάθε ένας από τους καθηγητές των μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μπορεί να θυμηθεί παραδείγματα μαθητών, που εφαρμόζουν τις γραμμικές ιδιότητες σε μη γραμμικές εκφράσεις, όπως για παράδειγμα: *«Η τετραγωνική ρίζα ενός αθροίσματος είναι το άθροισμα των τετραγωνικών ριζών»*, *«η απόλυτη τιμή ενός αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των απολύτων τιμών»* (εφαρμόζοντας την ιδιότητα ***f(a+b) = f(a) + f(b)*** ή *«ο λογάριθμος ενός πολλαπλασίου είναι το αντίστοιχο πολλαπλάσιο του λογαρίθμου»(εφαρμόζοντας την **f(k.x) =k.f(x)**)* , *κ.ο.κ.*

Σύμφωνα με τον (Matz 1982, από De Bock κ.α 2002) αυτά τα λάθη γραμμικότητας προκύπτουν από την υπεργενίκευση της επιμεριστικής ιδιότητας για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών, σε χειρισμούς μη γραμμικών συναρτήσεων (ή σε συμβολισμούς που αντιπροσωπεύουν τέτοιες συναρτήσεις). Οι Van Dooren κ.α. επισημαίνουν πως η εφαρμογή των ιδιοτήτων ***f(a+b) = f(a) + f(b)* και *f(k.x) =k.f(x)*** στον χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων, φαίνεται να είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας που αποκτούν οι μαθητές στην τάξη**.** Συχνά, οι συνεντεύξεις των μαθητών σε διάφορες μελέτες τους, έδειξαν πως δεν ήταν ενημερωμένοι για το ότι πίσω από την εφαρμογή των ιδιοτήτων αυτών υποτίθεται μια γραμμική συσχέτιση των ποσοτήτων.(Van Dooren κ.α. 2009)

Γραφικές παραστάσεις.

Ένα διαφορετικό θεματικό πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές εμμένουν σε χαρακτηριστικά και αναπαραστάσεις της γραμμικότητας, είναι οι δραστηριότητες με γραφικές παραστάσεις. Πολλές μελέτες δείχνουν την τάση τόσο μαθητών όσο και δασκάλων, να αντιλαμβάνονται την ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων σαν μια αρχέτυπη αντιπροσώπευση για σχέση μεταξύ οποιωνδήποτε μεγεθών.

Οι Leinhardt, Zaslavsky, και Stein, όταν σε μια σειρά μελετών ζήτησαν από τους μαθητές τους διαφόρων ηλικιών να παραστήσουν μη γραμμικές σχέσεις, όπως για παράδειγμα την αύξηση του ύψους ενός ατόμου από τη γέννησή του μέχρι την ηλικία 30, παρατήρησαν την ισχυρή τάση να σχεδιάζουν μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Οι ίδιοι μελετητές, ταξινομώντας τα λάθη των μαθητών κατά τον σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων, μια από τις κατηγορίες λάθους τους την ονόμασαν *«γραμμικότητα»* (Leinhardt, Zaslavsky, και Stein 1990 από de Bock κ.α. 2007 σελ 10). Οι Hadjidemetriou και Williams σε αντίστοιχες μελέτες, σημειώνουν πως παρόμοια γραμμικά γραφικά πρότυπα δεν χαρακτηρίζουν μόνο τους μαθητές αλλά και τους δασκάλους των μαθηματικών. (Hadjidemetriou και Williams. 2010). Η παρανόηση δασκάλων της στοιχειώδους εκπαίδευσης πως η έννοια της συνάρτησης αναφέρεται ακριβώς σε μια γραμμική σχέση, καταγράφεται και σε μελέτη των Evangelidou, Spyrou, Elia, & Gagatsis (αναφ από De Bock κ.α. 2007 σελ 10).

Η τάση προς τη γραμμικότητα δεν περιορίζεται στις προσπάθειες να αποδοθούν με γραφική παράσταση κάποιες πραγματικές καταστάσεις. Οι Markovits, Eylon, και Bruckheimer αναφέρουν πως όταν ζήτησαν από 14-χρονους και 15-χρονους μαθητές να γράψουν παραδείγματα συναρτήσεων ή να σχεδιάσουν γραφικές παραστάσεις που περνούν από δεδομένα σημεία, αυτοί έδειξαν ισχυρή προτίμηση στις γραμμικές σχέσεις (Markovits, Eylon, και Bruckheimer 1986 αναφ από De Bock κ.α. 2007 σελ 10)

Εκτός από τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης, οι μαθητές εμμένουν επίσης συχνά πολύ έντονα στην γραμμικότητα, όταν πρόκειται να αποφανθούν μέσα από μια γραφική παράσταση για το ποια είναι η σχέση που συνδέει τις δυο μεταβλητές. Για παράδειγμα ο Van Deyck (2001) σε μια πειραματική διδασκαλία με μαθητές 11^ου^ βαθμού (Β Λυκείου) τους έδωσε ένα καρτεσιανό διάγραμμα διασποράς στο οποίο τα μεμονωμένα σημεία διέγραφαν μια παραβολή. Παρ όλο που οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ήδη αντιμετωπίσει πολλά μη γραμμικά μοντέλα στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών τους (συμπεριλαμβαλομένων και των δευτεροβάθμιων συναρτήσεων), υποστήριξαν χαρακτηριστικά και με επιμονή, πως αποκλείεται να υπάρχει κάποιος συσχετισμός ανάμεσα στις δυο αναπαριστώμενες μεταβλητές. Προφανώς, κατά την εξέταση της γραφικής παράστασης διερευνούσαν μόνο την ύπαρξη γραμμικού συσχετισμού. (Van Deyck 2001, από De Bock κ.α. 2007 σελ 10)

Θα μπορούσε βέβαια στο σημείο αυτό να τεθεί το ερώτημα του κατά πόσον οι μαθητές είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται σε βάθος τη γραμμική αυτή σχέση, ώστε κάνουν την σύνδεση μεταξύ της γραμμικότητας και της ευθείας σαν γραφική παράσταση που την εκπροσωπεί. Μήπως δηλαδή η τάση για σχεδιασμό της ευθείας δεν είναι αποτέλεσμα γραμμικού συλλογισμού αλλά οφείλεται σε άλλες γνωστικές αιτίες;

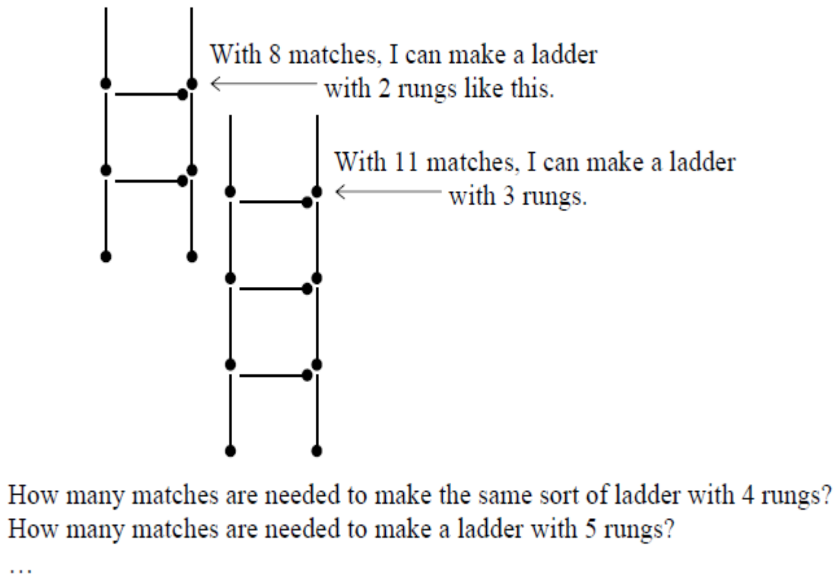
Οι De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel σημειώνουν:

«Η ευθεία γραμμή μπορεί εν μέρει να λειτουργήσει για τους μαθητές ως αρχέτυπη αντιπροσώπευση για σχέση μεταξύ οποιωνδήποτε μεγεθών, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που ένα στερεότυπο σχήμα διατύπωσης ενεργεί ως πανάκεια κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων προσδιορισμού της άγνωστης τιμής. Δεν γνωρίζουμε οποιαδήποτε ερευνητικά στοιχεία που εξετάζουν αν υπάρχουν οι ίδιες γνωστικές αιτίες πίσω από την εσφαλμένη χρήση της γραμμικότητας τόσο στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων όσο και στις γραφικές παραστάσεις , όπως και να ΄χει όμως, και στις δυο περιπτώσεις μια

ιδιαίτερη γραμμική έκφραση, χρησιμοποιείται έξω από το πεδίο εφαρμογής της» .(De Bock κ.α. 2007 σελ 10)

<u>Γραμμικά λάθη κατά την ερμηνεία σχέσεων σε Αριθμητικά patterns</u>

Μερικοί ερευνητές αριθμητικών patterns και αλγεβρικών γενικεύσεων, αναφέρουν πως σε πολλές περιπτώσεις, οι μαθητές στηρίζονται λανθασμένα στις βασικές ιδιότητες του γραμμικού μοντέλου. Η Stacey (1989) μελέτησε μαθητές 9-13 ετών καθώς διαμόρφωναν patterns του τύπου ***φ(ν) = αν+ β (με το β ≠ 0)*** όπως το ακόλουθο πρόβλημα με τις σκάλες :



Ο συχνότερος τύπος λάθους σε αυτό το πρόβλημα οφειλόταν στην υπόθεση της γραμμικότητας αντί της σωστής ερμηνείας της σχέσης ανάμεσα στον αριθμό των σκαλοπατιών και τον αριθμό των σπίρτων**.**

(αριθμός σπίρτων) = 3 x (αριθμό σκαλοπατιών) + 2.

Οι μαθητές έκαναν χρήση των ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν την γραμμική συνάρτηση. Υποθέτοντας παραδείγματος χάρη πως για μια σκάλα με 4 σκαλοπάτια χρειάζεται διπλάσιος αριθμός σπίρτων σε σχέση με μια σκάλα με 2 σκαλοπάτια, χρησιμοποίησαν την ιδιότητα ***f(k x) =k f(x)*** ενώ θεωρώντας πως χρειάζονται ***8 + 11*** σπίρτα για μια σκάλα με ***5 = 2 + 3*** σκαλοπάτια έκαναν χρήση της ***f(x+y) = f(x) + f(y).*** Σε άλλες περιπτώσεις χρησιμοποίησαν συνδυασμό των προηγούμενων ιδιοτήτων (Stacey1989, από Van Dooren κ.α. 2009)

Ανάλογες παρατηρήσεις για παρόμοια προβλήματα γενίκευσης μέσω patterns , έχουν βρεθεί σε πολυάριθμες άλλες μελέτες. (π.χ., Kuchemann & Hoyles, 2001 Lin

& Yang 2004 Linchevski κ.α 1998 Orton & Orton, 1994,αναφ από De Bock κ.α. 2007). Οι Linchevski κ.α 1998, χαρακτηρίζουν τα προηγούμενα σαν «πολλαπλασιαστικά λάθη» και αναφέρουν την επιμονή των μαθητών στη χρήση τέτοιων γραμμικών γενικεύσεων, ακόμα και όταν γνώριζαν πως αυτές ευθύνονται για τις ανακριβείς απαντήσεις τους (Linchevski κ.α 1998, από Van Dooren κ.α. 2009).

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΩΝ ΑΙΤΙΩΝ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ

Αν και η κατάχρηση της γραμμικότητας είναι τεκμηριωμένα ένα φαινόμενο που έχει παρατηρηθεί σε διάφορες χώρες, από ανθρώπους κάθε ηλικίας και σε ποικίλα μαθηματικά πλαίσια, δεν υπάρχει κοινά αποδεκτός τρόπος ερμηνείας του. Η έρευνα ιδιαίτερα κατά την τελευταία δεκαετία πέρα από το να παράγει πληροφορίες για τις εσφαλμένες γραμμικές απαντήσεις, έχει ρίξει το βάρος της στο να εντοπίσει τις πτυχές της βάσης γνώσεων των μαθητών που είναι υπεύθυνες για το φαινόμενο αυτό και την ισχύ του. Γίνεται όμως ακόμα μεγάλη συζήτηση σχετικά με ερωτήματα που αφορούν τον τρόπο ερμηνείας της:

- *Είναι μήπως ένα εκπαιδευτικό κατασκεύασμα;*
- *Έχει ρίζες διαισθητικές; Υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά της γραμμικής σκέψης που την κάνουν περισσότερο συμβατή με τον ανθρώπινο νου ;*
- *Ευθύνεται ίσως η γνώση, με την οποία μας τροφοδοτεί η καθημερινή μας εμπειρία ;*
- *Μήπως υπάρχουν κάποιοι διαφορετικοί κάθε φορά παράγοντες που ευθύνονται, ανάλογα με τις συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές όπου εμφανίζεται;*
- *Κατά πόσο η εφαρμογή των γραμμικών μεθόδων είναι συνειδητή ή οφείλετε ίσως σε μια στερεότυπη αντανακλαστική συμπεριφορά ;.*

Κατά την αναζήτηση των ψυχολογικών και εκπαιδευτικών εκείνων παραγόντων που μπορεί να βρίσκονται στις ρίζες της εμμονής στη γραμμικότητα, υπάρχουν ποικίλες προσεγγίσεις. Μέσα από αρκετές μελέτες προβάλλονται διάφοροι πιθανοί λόγοι, οι οποίοι είναι όλοι συνυπεύθυνοι (σε μια σύνθετη αλληλεπίδραση) για την τάση λανθασμένης εφαρμογής του γραμμικού συλλογισμού.

Βασιζόμενοι σε μια ανάλυση των παραγόντων αυτών από τους De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel (2007) που έχουν πραγματοποιήσει μια ιδιαίτερη ερευνητική προσπάθεια στον χώρο αυτό και λαμβάνοντας υπ όψιν τις προσεγγίσεις των ερευνητών Tirosh και Stavy (1999) που μελετούν τα προηγούμενα λάθη μέσα από το πρίσμα της θεωρίας των διαισθητικών κανόνων, θα μπορούσαμε να πούμε πως η εξήγηση μπορεί να βρίσκεται:

- Στην έντονα διαισθητική φύση των γραμμικών σχέσεων και στην μεγάλη συχνότητα της αποτελεσματικότητάς τους στη καθημερινή μας ζωή.
- Στην εμπειρία που αποκτούν οι μαθητές στην τάξη των μαθηματικών, η οποία ασκεί επίδραση στην περαιτέρω ανάπτυξη και την εμμονή αυτής της φυσικής τάσης,
- Στην ανώριμη στάση των μαθητών κατά την μαθηματική μοντελοποίηση και την ανεπάρκεια του μεταγνωστικού τους ελέγχου
- Σε διάφορους ιδιάζοντες παράγοντες, οι οποίοι αφορούν συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές όπου εμφανίζονται τα γραμμικά λάθη.

<u>Η διαισθητική υφή των γραμμικών σχέσεων και η αποτελεσματικότητά τους σε καθημερινές καταστάσεις</u>

Όπως υποστηρίζεται από τον Fischbein (1999) στην θεωρία του *για* τις διαισθήσεις και τα σχήματα στο μαθηματικό συλλογισμό, *«πολλές από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επιστήμη και στην μαθηματική εκπαίδευση, οφείλονται στην επίδραση σιωπηρών (υπονοούμενων) διαισθητικών μοντέλων, τα οποία δρουν χωρίς έλεγχο στην διαδικασία του συλλογισμού».* Σε αυτό συμφωνούν και πολλοί γνωστικοί ψυχολόγοι, (Evans 2003, Sloman 1996, Stanovich και West 2000, αναφορά από De Bock κ.α. 2007 σελ 144) σημειώνοντας ότι *η ανθρώπινη συμπεριφορά συχνά εκκινά από διαισθητικά και όχι αναλυτικά μοντέλα σκέψης.*

Η διαισθητική γνώση όπως την περιέγραψε ο Fischbein, είναι ένας τύπος άμεσης, άδηλης, αυτονόητης γνώσης, βασισμένης στα επιφανειακά χαρακτηριστικά του προβλήματος, η οποία οδηγεί κατά τρόπο καταναγκαστικό σε γενικεύσεις, και δημιουργεί μεγάλη εμπιστοσύνη και εμμονές κατά την τυπική μάθηση. Από την ίδια τους την φύση, οι διαισθήσεις εμφανίζονται σαν ξαφνικές, σφαιρικές, αντανακλαστικές αντιδράσεις, σε αντιδιαστολή με την λογικά-βασισμένη γνώση, η οποία είναι εξ ορισμού, ανεξάρτητη και αναλυτική. (Fischbein, 1999) Συχνά, η διαισθητική γνώση των μαθητών σχετικά με μια ορισμένη έννοια δεν συμφωνεί με τα αποδεκτά επιστημονικά πλαίσια (Fischbein,1987 Tversky και Kahneman, 1983, από Tirosh και Stavy 1999). Οι διαισθήσεις είναι ανθεκτικές στις αλλαγές επειδή συσχετίζονται βαθιά με το σύστημα προσαρμογής μας, που διαμορφώνεται από τις προγενέστερες και επαναλαμβανόμενες εμπειρίες μας. Μια τέτοια εμπειρία, προσφέρει η αποτελεσματικότητα των γραμμικών σχέσεων στην καθημερινή μας ζωή. Ήδη από μια πολύ μικρή ηλικία τα παιδιά αρχίζουν να κατακτούν μερικές στοιχειώδεις δεξιότητες γραμμικού συλλογισμού σε συγκεκριμένους τύπους καταστάσεων προβλημάτων. Καταστάσεις στις οποίες μπορεί δημιουργείται εντελώς φυσικά ένας πολλαπλασιαστικός συλλογισμός ***«k φορές το α – k φορές το β»,*** ή ένας αυξητικός συλλογισμός του τύπου ***«α+α επομένως β+β»*** όπου και οι δύο στηρίζονται στα γραμμικά χαρακτηριστικά της κατάστασης του προβλήματος (De Bock κ.α. 2007 σελ 145). Ακόμη και αρκετές από τις προγενέστερες εμπειρίες μας όπως η μέτρηση αντικειμένων είναι αντανακλάσεις της γραμμικότητας.

Ο Fischbein, εξετάζοντας την αναλογικότητα σαν σχήμα που αποτελεί μέρος του συστήματος προσαρμογής μας, έχει δηλώσει:

«*Το σχήμα της αναλογικότητας είναι, κατά την Πιαζετιανή ορολογία ένα λειτουργικό σχήμα, που σημαίνει πως έχει μια πολύ γενική επιρροή. Αναπτύσσεται με την ηλικία και εκδηλώνεται στην πλήρη, ποσοτική του μορφή, κατά τη διάρκεια του σταδίου των τυπικών διεργασιών*».

Fischbein (1999, αναφορά από De Bock κ.α. 2007 σελ145)

Εξετάζοντας τις διάφορες περιπτώσεις κατάχρησης της γραμμικότητας, όπως αυτές αναφέρονται από διάφορους μελετητές, γίνεται σαφής η σύνδεση με την θεωρία του Fischbein, για τον ρόλο της διαίσθησης στο μαθηματικό συλλογισμό. Οι γραμμικές σχέσεις είναι οι απλούστερες, και οι περισσότερο κομψές σχέσεις που μπορούν να εμφανιστούν. Οι De Bock, Van Dooren, Verschaffel, και Janssens (2002) παρατήρησαν ότι οι μαθητές αναζητούν πολύ γρήγορα (σχεδόν αμέσως μόλις αντιμετωπίζουν το πρόβλημα) έναν αναλογικό τρόπο επίλυσης. Όταν κατόπιν ρωτούνται, δύσκολα μπορούν να εξηγήσουν την επιλογή αυτής της μεθόδου για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Συγχρόνως δείχνουν μεγάλη εμπιστοσύνη, χωρίς να αισθάνονται καμιά ανάγκη να την δικαιολογήσουν. Αν και οι μαθητές είχαν όλη την απαιτούμενη μαθηματική γνώση για να ανταποκριθούν σωστά στο πρόβλημα, ήταν εντυπωσιακά επίμονοι στην γραμμική λύση, ακόμα και όταν έρχονταν αντιμέτωποι με ισχυρά αντιφατικά στοιχεία. Οι γραμμικές απαντήσεις στα μη γραμμικά προβλήματα έχουν πιο σύντομους χρόνους αντίδρασης από τις σωστές απαντήσεις, και απαιτούν τη λιγότερη ικανότητα λειτουργικής μνήμης (Gillard, Van Dooren, Schaeken, & Verschaffel, αναφορά από De Bock κ.α. 2007). Ένα περαιτέρω επιχείρημα, μπορεί να είναι η ***«καθολικότητα»:*** Η κατάχρηση της γραμμικότητας αντιμετωπίζεται στην έρευνα παγκοσμίως, φαινομενικά ανεξάρτητη από τα συγκεκριμένα προγράμματα σπουδών ή τις εκπαιδευτικές πρακτικές (Van Dooren και λοιποί, 2007). Τα προαναφερθέντα ερευνητικά ευρήματα, αποτελούν σαφείς εμπειρικές ενδείξεις για την διαισθητική εφαρμογή της γραμμικότητας

Διάφοροι συγγραφείς, αναφέρονται στην διαισθητικότητα, απλότητα και κομψότητα των γραμμικών ιδεών. Είναι εκείνα τα χαρακτηριστικά, που σε συνδυασμό με τις αποτελεσματικότητά τους στις καθημερινές μας δραστηριότητες, συμβάλλουν στον σχηματισμό αντανακλαστικών, αυτονόητων απαντήσεων, σε πλήθος προβλημάτων.

Η Stacey παρατηρώντας την ανάρμοστη εφαρμογή των ιδιοτήτων $f(x+y) = f(x) + f(y)$ και $f(k.x) = k.f(x)$ της γραμμικής συνάρτησης από τους μαθητές συμπεραίνει ότι:

«Τα μοντέλα που συνδέονται με την γραμμικότητα δελεάζουν τους μαθητές εξ αιτίας ισχυρών γνωστικών λόγων. Όταν εμφανίζεται μια τέτοια ιδέα, οι μαθητές ίσως είναι απρόθυμοι να την αμφισβητήσουν πρώτον λόγω της αποτελεσματικότητάς της στην παροχή απαντήσεων (και μια οποιαδήποτε απάντηση είναι προτιμότερη από καθόλου απάντηση!) και δεύτερον εξ αιτίας της απλότητάς της». (Stacey1989, αναφορά από De Bock κ.α. 2007 σελ 146.)

Κάτι τέτοιο έχει προβλέψει πολύ νωρίτερα ο Kuhm:

« Όταν έχετε στην διάθεσή σας ένα νοητικό εργαλείο που έλυσε πολλά προβλήματα στο παρελθόν και φαίνεται απλούστερο και πιο κομψό από τα υπόλοιπα, κολλάτε σ΄ αυτό, μέχρι νεωτέρας» (Kuhm 1962, αναφορά από Rouche 2001)

Από αυτή την άποψη, ο N.Rouche (2001) έθιξε ένα σημαντικό θέμα, διερωτώμενος το εξής:

«Μήπως το ότι σχεδόν όλα τα μαθηματικά είναι γραμμικά, οφείλεται στο ότι η γραμμικότητα είναι εκείνη η δομή που ταιριάζει περισσότερο στον ανθρώπινο νου»;

Μια άλλη προσέγγιση της διαισθητικής υφής των γραμμικών λαθών, πραγματοποιείται από μια ομάδα Ισραηλινών ερευνητριών (Stavy & Tirosh 1999,2000). Οι ερευνήτριες αυτές, μελετώντας γενικότερα τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται και κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες, εξηγούν αρκετές από τις λανθασμένες απαντήσεις τους τόσο στα μαθηματικά όσο και στις φυσικές επιστήμες, μέσα από το πλαίσιο της θεωρίας των ***«διαισθητικών κανόνων».*** Βασισμένες στην εργασία του Fischbein (1987), υποστηρίζουν ότι υπάρχουν μερικοί κοινοί, διαισθητικοί κανόνες, που δραστηριοποιούνται όταν οι μαθητές λύνουν τα προβλήματα στα μαθηματικά και τις επιστήμες**.** Με βάση τα συμπεράσματα που εμφανίζονται στις μελέτες τους, προτείνουν ότι οι απαντήσεις των σπουδαστών σε δεδομένα μαθηματικά και επιστημονικά έργα (που μπορεί να μην σχετίζονται εννοιολογικά) επηρεάζονται συχνά από τα κοινά, εξωτερικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτών των έργων, τα οποία προκαλούν τη χρήση αυτών των διαισθητικών κανόνων. Οι κανόνες αυτοί θα μπορούσαν είτε να είναι εγγενούς φύσεως, ή να προκύπτουν σαν υπεραπλουστεύσεις της επιτυχούς εμπειρίας που συχνά γενικεύονται σε καθολικά αξιώματα (Tirosh και Stavy, 1996, 1999a, 1999b)**.**

Δύο τέτοιοι κανόνες εμφανίζονται στα προβλήματα σύγκρισης:

- ***«περισσότερο Α - περισσότερο Β»***: όταν σε μια κατάσταση προβλήματος, ένα εμφανές μέγεθος Α αυξάνεται, οι μαθητές πιστεύουν ότι ένα άλλο μέγεθος Β αυξάνεται επίσης, π.χ. «*ένα ορθογώνιο με μεγαλύτερη περίμετρο, έχει και μεγαλύτερο εμβαδόν» ή « 2>4 άρα και 2χ > 4χ»*

- ***«ίδιο Α - ίδιο Β»*** : Όταν δύο «αντικείμενα» (ή δύο συστήματα) δεν διαφέρουν ως προς μια προκαθορισμένη ποσότητα Α (Α1=Α2) και στη συνέχεια ζητηθεί από τους μαθητές να τα συγκρίνουν σε σχέση με μια άλλη ποσότητα Β (Β1≠Β2), οι μαθητές συχνά ισχυρίζονται ότι Β1=Β2. Όταν δηλαδή σε μια κατάσταση προβλήματος, ένα εμφανές μέγεθος Α παραμένει σταθερό, οι μαθητές σκέπτονται πως και κάποιο άλλο μέγεθος Β δεν μεταβάλλεται, π.χ: *«τα τρίγωνα με την ίδια περίμετρο έχουν και το ίδιο εμβαδόν»*.

Αρκετά από τα παραδείγματα που ανέφεραν οι Tirosh και Stavy σαν εφαρμογή του κανόνα ***« ίδιο Α - ίδιο Β»,*** είναι στην πραγματικότητα περιπτώσεις ανάρμοστου γραμμικού συλλογισμού. (π.χ. η πεποίθηση ότι είναι εξίσου πιθανό να πάρουμε τουλάχιστον 2 κεφαλές σε 3 ρίψεις νομισμάτων με το να πάρουμε τουλάχιστον 200 κεφαλές σε 300 ρίψεις, *(ίδια αναλογία(**Α**)- ίδια πιθανότητα(**Β**)).* Η σύνδεση μεταξύ της κατάχρησης της γραμμικότητας και της θεωρίας των διαισθητικών κανόνων είναι σαφής καθώς ερμηνεύονται γραμμικά λάθη από όλες τις μαθηματικές περιοχές. Κατά τον διπλασιασμό για παράδειγμα των του μήκους των πλευρών ενός πολυγώνου, ο κανόνας ***«ίδιο Α - ίδιο Β»*** μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως διπλασιάζεται και το εμβαδόν καθώς ***« ίδιο λόγος πλευρών – ίδιος λόγος εμβαδών»***. Σε έρευνα των De Bock και λοιπών το 2001, διάφοροι μαθητές υποστήριξαν ότι επειδή κατά τη διάρκεια της μεγέθυνσης του ένα σχέδιο διατηρεί την ίδια μορφή, οι διαστάσεις του και το εμβαδόν του μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο (πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο συντελεστή). Οδηγήθηκαν επομένως σε συλλογισμό ***« κ φορές το Α - κ φορές το Β».*** Ωστόσο, για την σχέση μεταξύ της υπέρμετρης εμπιστοσύνης στην γραμμικότητα και της θεωρίας των διαισθητικών κανόνων που αναπτύσσεται από τις Tirosh και Stavy, γίνεται ακόμα πολλή συζήτηση.

Σε μια εμπειρική μελέτη τους για τους διαισθητικούς κανόνες με μαθητές 10ης έως και 12ης τάξης (Α΄ έως Γ΄ Λυκείου αντίστοιχα) οι Van Dooren, De Bock, Weyers, & Verschaffel το 2004, (De Bock κ.α. 2007, κεφ 4) επεσήμαναν πως ενώ οι μαθητές στα έργα πολλαπλής επιλογής επέλεξαν την απάντηση που συμφωνεί με τον διαισθητικό κανόνα ***«ίδιο α-ίδιο β»***, μια ποιοτική ανάλυση έδειξε ότι πολύ συχνά είχαν σκεφτεί με εντελώς διαφορετικό τρόπο, και ότι πολλές από τις λανθασμένες απαντήσεις, οφείλονταν στις παρανοήσεις και τις παρερμηνείες των δηλώσεων του προβλήματος. Επίσης, ο κανόνας ***«περισσότερο Α - περισσότερο Β»*** φάνηκε πως πολύ σπάνια επηρέασε την διαδικασία συλλογισμού αυτών των μαθητών. Ισχυρίστηκαν λοιπόν, πως υπάρχει κίνδυνος παρερμηνειών όσον αφορά τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές μπορεί να διαλέξουν μια γραμμική απάντηση. Βασικά σημεία της κριτικής που κάνουν οι Van Dooren, De Bock, Weyers, & Verschaffel στην θεωρία των διαισθητικών κανόνων των Tirosh και Stavy, είναι πως προσεγγίζει υπεραπλουστευμένα την διαδικασία επίλυσης προβλήματος, διαχωρίζοντας τα εσωτερικά από τα εξωτερικά χαρακτηριστικά των έργων, και αγνοεί κοινωνικοπολιτισμικούς παράγοντες όπως την κοινωνιολογία της τάξης, το διδακτικό συμβόλαιο και τις κοινωνικο-μαθηματικές νόρμες. (Van Dooren, De Bock, Weyers, & Verschaffel, 2004). Αποτελεί επίσης ανοικτό ερευνητικό ερώτημα, το αν οι απαντήσεις που στηρίζονται στους διαισθητικούς κανόνες και εξαρτώνται επομένως από τα εξωτερικά χαρακτηριστικά του προβλήματος, δίνονται μόνο σε απλά προβλήματα ή και σε εκείνα που απαιτούν πιο σύνθετο συλλογισμό.

Εκτός από Fischbein, η διάκριση μεταξύ των διαισθητικών και αναλυτικών τρόπων σκέψης έχει εκφραστεί και έχει μελετηθεί από πολλούς γνωστικούς ψυχολόγους, ειδικά από τους υποστηρικτές των ***θεωριών διπλής επεξεργασίας (dual process theory)*** (π.χ., Evans 2003 , Sloman 1996 Stanovich και West 2000 αναφορά από De Bock κ.α. 2007 σελ 147). Αυτοί οι ερευνητές υποστηρίζουν την ύπαρξη δύο διαφορετικών συστημάτων συλλογισμού.

Το πρώτο σύστημα (συχνά αποκαλούμενο S1 ή ευρετικό σύστημα), χαρακτηρίζεται σαν αυτόματο, συνειρμικό, ασυναίσθητο, που απαιτεί μικρό μέρος προσπάθειας και γνωστικών πόρων. Αυτό το σύστημα δημιουργεί γρήγορες αντιδράσεις και συχνά στηρίζεται στα επιφανειακά χαρακτηριστικά γνωρίσματα της κατάστασης του προβλήματος καθώς και στα αποθηκευμένα «πρότυπα» των διάφορων καταστάσεων.

Το δεύτερο σύστημα (αποκαλούμενο S2 ή αναλυτικό σύστημα), χαρακτηρίζεται σαν ελεγχόμενο, αργό στην λήψη αποφάσεων, και απαιτεί μεγάλο μέρος της λειτουργικής μας μνήμης. Το ότι οι άνθρωποι αποτυγχάνουν να δώσουν την δεοντολογικά σωστή απάντηση στους συλλογιστικούς στόχους, αποδίδεται στο ότι το S2 λόγω της διεισδυτικότητας του S1 αποτυγχάνει να επέμβει στο κριτικό του ρόλο. Αυτό γίνεται για παράδειγμα., απαντώντας *«10 σεντς»* στο πρόβλημα *«ένα ρόπαλο του μπέιζμπολ και μια σφαίρα κοστίζουν μαζί ένα δολάριο και 10 σεντς. Το ρόπαλο κοστίζει ένα δολάριο περισσότερο από τη σφαίρα. Πόσο κοστίζει η σφαίρα»* (Kahneman 2002 από De Bock κ.α. 2007 σελ 147). Υποστηρίζεται ότι το S1 παρέχει τόσες πολλές χρήσιμες ανταποκρίσεις στις διάφορες καταστάσεις, ώστε οι άνθρωποι τείνουν να αναπτύξουν προκαταλήψεις, υπό την έννοια ότι αποκρίνονται με το S1 στην προσπάθεια απάντησης συλλογιστικών στόχων οι οποίοι απαιτούν την αναλυτική (S2) επεξεργασία.

Μια σημαντική επίπτωση αυτής της θεωρίας είναι ότι οι λανθασμένες απαντήσεις δεν είναι απαραίτητο να ερμηνευτούν υπό την σκοπιά των ανεπαρκειών στη σχετική (μαθηματική) βάση γνώσεων του (S2), αλλά πολύ απλά είναι η συνέπεια της δράσης του S1 προτού να μπορέσει να ενεργήσει το S2. Το φαινόμενο της κατάχρησης της γραμμικότητας φαίνεται να ταιριάζει εντυπωσιακά καλά σε αυτές τις θεωρίες διπλής επεξεργασίας σκέψης (dual process theory). Επειδή οι μαθητές υπόκεινται στην αποτελεσματικότητα της γραμμικότητας στις διάφορες περιπτώσεις, ένα είδος *«γραμμικής εύρεσης»* μπορεί να γίνει μέρος του S1. Αρχίζει έτσι να παίζει σημαντικό ρόλο στον συλλογισμό των μαθητών , καθώς παράγει συχνά γρήγορες και σωστές απαντήσεις. Σε πολλές περιπτώσεις, η κατάχρηση της γραμμικότητας από τους σπουδαστές δεν είναι μια συνέπεια των ανεπαρκειών της μαθηματικής τους γνώσης (S2), αλλά μάλλον το αποτέλεσμα μιας τάσης να αντιδράσει πάρα πολύ γρήγορα και πάρα πολύ αυθόρμητα η (S1).

Μια διαφορετική προοπτική ερμηνείας του τρόπου με τον οποίο η προηγούμενη αποτελεσματικότητα των γραμμικών σχέσεων συνδέεται με την κατάχρηση της γραμμικότητας, είναι αυτή του προηγούμενου κομματιού γνώσης, που αν δεν αναδιοργανωθεί σωστά, δημιουργεί εμπόδια στην κατάκτηση της νέας γνώσης. Κάτω από αυτή την προοπτική, το γραμμικό λάθος δεν είναι απλά μια ανακλαστική αντίδραση, αλλά τουλάχιστον σε μερικές περιπτώσεις είναι το αποτέλεσμα μιας συνειδητής και σκόπιμης εφαρμογής των γραμμικών ιδιοτήτων, σε καταστάσεις που δεν ισχύουν. Θα μπορούσε να είναι η συνέπεια μιας προηγούμενης γνώσης που ενώ είχε αποδειχθεί ενδιαφέρουσα και επιτυχής στο παρελθόν, εμφανίζεται αναποτελεσματική σε νέες καταστάσεις. Κατά συνέπεια, ένα λάθος δεν πρέπει να γίνεται αντιληπτό σαν μια αποτυχία των μαθητών, αλλά μάλλον σαν σύμπτωμα της φύσης των ιδεών, που υπόκεινται της μαθηματικής τους δραστηριότητας.(Balacheff 1984, αναφορά από Esteley κ.α. 2010)

Όπως ήδη αναφέραμε, οι γραμμικές σχέσεις αποκτιούνται σε απλή μορφή από την πρόωρη παιδική ηλικία και επιβεβαιώνονται συνεχώς από την καθημερινή εμπειρία. Επιπλέον, τα παιδιά δοκιμάζουν πολλές φορές την ισχύ του ανάλογου προτύπου στο δημοτικό σχολείο, και σιωπηρά και ρητά. Οικοδομείται έτσι ένα είδος κατανόησης της κοινής λογικής του κόσμου, βασισμένο στην εμπειρία της καθημερινής ζωής και στην προγενέστερη εκπαίδευση (Mason, 2001 αναφορά από De Bock κ.α 2007 σελ 147). Αυτή η βάση προγενέστερης γνώσης αλληλεπιδρά με τις νέες πληροφορίες με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές. Όταν το νέο περιεχόμενο εκμάθησης είναι ασυμβίβαστο με την συγκεκριμένη βάση γνώσεων, η εκμάθηση απαιτεί μια σημαντική αναδιοργάνωση της υπάρχουσας βάσης γνώσεων των μαθητών, η οποία καλείται *εννοιολογική αλλαγή* (Mason, 2001, Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou, & Papademetriou, 2001). Η θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής εστιάζει στην απόκτηση γνώσης στις περιοχές της φυσικής, των μαθηματικών κλπ σε εκείνες τις περιπτώσεις, όπου η προηγούμενη γνώση αλληλεπιδρά με την νέα, προτεινόμενη γνώση. Περιγράφει δηλαδή την εκμάθηση ως διαδικασία που απαιτεί τη σημαντική αναδιοργάνωση των υπαρχουσών δομών γνώσης (Vosniadou, 2003).

Από τους Γαγάτση, Μοδέστου, Κυριακίδη κλπ, ο τρόπος με τον οποίο η προηγούμενη επιτυχία του γραμμικού μοντέλου δημιουργεί εμπόδια, ερμηνεύεται μέσω της θεωρίας του *επιστημολογικού εμποδίου,* κατά τον Brousseau .Υποστηρίζεται πως *«τα γραμμικά λάθη δεν εμφανίζονται λόγω της άγνοιας, της αβεβαιότητας ή τυχαία, αλλά προκύπτουν από την εφαρμογή ενός προηγούμενου κομματιού της γνώσης – αυτού που αφορά την γραμμικότητα - που ήταν ενδιαφέρουσα και επιτυχής, αλλά σε ένα άλλο πλαίσιο αποκαλύπτεται ως λανθασμένη ή απλά μη προσαρμοσμόσιμη. (Brousseau, 1997). Αυτό το λάθος δεν είναι ακανόνιστο και απροσδόκητο, αλλά είναι επαναλαμβανόμενο και επίμονο. Επομένως, υποστηρίζουμε ότι εμφανίζεται λόγω του επιστημολογικού εμποδίου της γραμμικότητας, υπό την έννοια που δίνεται από Brousseau (1997).»* (Modestou & Gagatsis 2006). Επίσης «*προκειμένου να αντιμετωπιστεί αυτό το επιστημολογικό εμπόδιο, πρέπει να οργανωθεί μια κατάλληλη διδακτική κατάσταση (Brousseau, 1997) κατά τέτοιο τρόπο ώστε η αμφισβήτηση της γραμμικότητας θα προκύψει αυθόρμητα ως απαραίτητο εργαλείο για τη λύση του προβλήματος*» (Modestou & Gagatsis 2006, Gagatsis και Kyriakides 2000)

Μια σειρά απαραίτητων προϋποθέσεων για την χρήση του όρου «επιστημολογικό εμπόδιο» και όχι απλά «δυσκολία» προτείνεται από τον Duroux :

- *Ένα εμπόδιο είναι ένα κομμάτι της γνώσης ή μια σύλληψη, όχι μια δυσκολία ή μια έλλειψη γνώσης.*
- *Αυτό το κομμάτι της γνώσης παράγει τις απαντήσεις που είναι σωστές μέσα σε έναν ιδιαίτερο, εμπειρικό συνήθως πλαίσιο.*
- *Παράγει λανθασμένες απαντήσεις έξω από αυτό το πλαίσιο. Μια σωστή, καθολική απάντηση απαιτεί ειδικότερα διαφορετική άποψη.*
- *Αυτό το κομμάτι της γνώσης αντιστέκεται και στις περιστασιακές διαψεύσεις και στην καθιέρωση ενός καλύτερου κομματιού της γνώσης. Η κατοχή ενός καλύτερου κομματιού της γνώσης δεν είναι επαρκής για να εξαφανιστεί η προηγούμενη. Είναι επομένως ουσιαστικό να προσδιοριστεί και να ενσωματωθεί ο λόγος για την απόρριψή του στο νέο κομμάτι της γνώσης.*
- *Ακόμα και αφότου έχει αναγνωριστεί η ανακρίβειά της, αυτή συνεχίζει να αναδύεται, σε ακατάλληλες στιγμές .*

(Duroux 1982 από Modestou & Gagatsis 2007)

Σε μελέτη των Γαγάτση και Μοδέστου διακρίνονται στην γραμμικότητα όλες εκείνες οι προϋποθέσεις που την εντάσσουν στα «επιστημολογικά εμπόδια» (Modestou & Gagatsis 2007)

Εκπαιδευτική πρακτική, και πεποιθήσεις που αποκτούν οι μαθητές κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων

Πέρα από την «*φυσική*» τάση που φαίνεται να υπάρχει προς στον γραμμικό συλλογισμό, πολλές εξηγήσεις για την ανάπτυξή του και την εμμονή του, αναγνωρίζονται στις πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς και γενικότερα στην εμπειρία και την κουλτούρα που αποκτούν οι μαθητές μέσα στο σχολικό σύστημα.

Σύμφωνα με την κοινωνικο-δομιστική άποψη για την διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών, *«οι μαθητές δεν είναι παθητικοί δέκτες των έτοιμων μαθηματικών. Αντίθετα είναι ενεργοί συμμετέχοντες στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης, κατασκευάζουν τα μαθηματικά εργαλεία και τις ιδέες μέσα από την εμπειρία, τις πρακτικές τους, την αλληλεπίδραση με τους άλλους και με το περιβάλλον. Καθώς οι αρχάριοι αντιμετωπίζουν τις νέες καταστάσεις, ψάχνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές με τα δικά τους γνωστικά σχήματα, και συνάγουν τα συμπεράσματά τους με βάση αυτήν την αλληλεπίδραση. Αυτή η διαδικασία μάθησης έχει επίσης μια κοινωνική διάσταση, δεδομένου ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δασκάλων και των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος - όπως και οι διαδικασίες ατομικής συμμετοχής των μαθητών στα μαθηματικά έργα που παρουσιάζονται μέσα σε ένα σχολικό πλαίσιο, συμπεριλαμβανομένων των τεστ - είναι βασισμένες σε ένα σύνθετο σύνολο (κυρίως υπονοούμενων) κανόνων και αμοιβαίων προσδοκιών, που συχνά δηλώνονται με τον όρο «διδακτικό συμβόλαιο (Didactical contract)» (Brousseau, 1997) ή με την έννοια «sociomathematical norms» (Cobb, Yackel, &Wood 1992, Verschaffel κ.α. 2000)». (αναφορά από De Bock 2007 σελ 148)*

Μια τέτοια προοπτική στη διδασκαλία και την εκμάθηση μαθηματικών φέρνει στην επιφάνεια πολυάριθμες εξηγήσεις για την τάση για των μαθητών να εμπιστεύονται εσφαλμένα γραμμικές μεθόδους.

Ένα **πρώτο επεξηγηματικό στοιχείο** είναι το ότι σε διάφορες **φάσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης, δίνεται από το πρόγραμμα σπουδών εκτενής και σχεδόν αποκλειστική προσοχή στην γραμμικότητα ή σε κάποια από τις ιδιότητες ή τις αναπαραστάσεις της.** Συχνά, υπάρχει μια ισχυρή εστίαση στην τεχνικά σωστή και ευχερή εκτέλεση ορισμένων αλγοριθμικών διαδικασιών που αφορούν αυτές τις ιδιότητες και τις αναπαραστάσεις, χωρίς να εξετάζεται ρητά και συστηματικά η δυνατότητα εφαρμογής τους. Αποτέλεσμα είναι το είδος της εμπειρίας που αποκτούν οι μαθητές σε μεγαλύτερο βαθμό να είναι αυτό που από τον Hatano χαρακτηρίζεται σαν *«στερεότυπη εμπειρία(routine expertise)»*. Είναι αυτή που τους επιτρέπει να ανταποκριθούν γρήγορα σε ένα πρόβλημα αναλογίας, βασιζόμενοι μόνο σε μια αναγνώριση των επιφανειακών χαρακτηριστικών του. Το άλλο είδος εμπειρίας το οποίο έχει διακρίνει ο ίδιος μελετητής, και δεν υποστηρίζεται από τις εκπαιδευτικές πρακτικές είναι η *«προσαρμοστική εμπειρία (adaptive expertise)»*. Είναι αυτή που τους βοηθά να αποφασίσουν συνειδητά σχετικά με τη δυνατότητα εφαρμογής των διάφορων μαθηματικών μοντέλων, βασιζόμενοι στα βαθιά χαρακτηριστικά προβλήματος (Hatano, 2003 από Greer 2010).

Μια μελέτη των Van Dooren κ.α. στον χώρο της αριθμητικής, αναδεικνύει τις συνέπειες τέτοιων πρακτικών. Σε αυτήν παρατηρήθηκε ιδιαίτερη αύξηση του αριθμού των εσφαλμένων γραμμικών απαντήσεων από τη 3^{η} τάξη έως την 5^{η} τάξη του Δημοτικού, δηλ. κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου όπου δίνεται εκτενής προσοχή στην απόκτηση και την αυτοματοποίηση του γραμμικού σχήματος. Σε κάποια προβλήματα, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές της 3^{ης} τάξης έδωσαν περισσότερες σωστές απαντήσεις από αυτούς της 5^{ης} – με άλλα λόγια, τα μεγαλύτερα παιδιά παρουσίασαν την τάση να χρησιμοποιούν αδιακρίτως τα αναλογικά μοντέλα οπουδήποτε. (Van Dooren κ.α 2005)

Μια ιδιαίτερα αξιοπρόσεκτη παρατήρηση όσον αφορά την ανάπτυξη της *«στερεότυπης εμπειρίας»* είναι ότι τουλάχιστον μέχρι πρότινος, στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών σε διάφορες χώρες, η πλειονότητα των προβλημάτων αναλογίας που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές τόσο στις ανώτερες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου όσο και στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, διατυπώνονταν με ένα στερεότυπο σχήμα που παραπέμπει σε προβλήματα απλής μεθόδου των τριών *(missing value)* (Cramer κ.α 1993 αναφορά από De Bock). Η συγκεκριμένη δομή της διατύπωσης, αποτελεί ένα ισχυρό και αποδοτικό εργαλείο για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτού του είδους. Συγχρόνως, πέρα από τα προβλήματα που αναφέρονται στην ευθεία ή αντίστροφη αναλογία, αυτό το σχήμα διατύπωσης *(missing value)* είναι σπάνιο για άλλες κατηγορίες μη γραμμικών προβλημάτων. Η στερεότυπη εμπειρία που συσσωρεύεται κατά την λύση μεγάλου αριθμού προβλημάτων missing value αποκλειστικά με τις γραμμικές μεθόδους λύσης, χωρίς να απαιτείται παράλληλα κάποια αιτιολόγηση για την επιλογή αυτής της μεθόδου, αντανακλάται στις μαθηματικές επινοήσεις και τακτικές που αναπτύσσουν οι μαθητές (De Bock κ.α. 2007 σελ 149). Όταν η διατύπωση ενός προβλήματος ταιριάζει σε αυτό το γενικό σχήμα, η τάση να αντιμετωπιστεί γραμμικά είναι εξαιρετικά ισχυρή, ακόμα και αν η κατάσταση που περιγράφεται δεν είναι τέτοια. Όπως αναφέρει ο Greer *«η παραίσθηση της αναλογίας σε αυτήν την περίπτωση είναι η ακατάλληλη επίκλησης της γραμμικότητας σαν αποτέλεσμα μιας ασυναίσθητης αντίδρασης στη γλωσσική μορφή»* (Greer, 1997 από Gagatsis κ.α. 2004)

Μια σειρά μελετών τα τελευταία χρόνια επιβεβαιώνει εμπειρικά ότι η διατύπωση μαζί με άλλα εξωτερικά χαρακτηριστικά ενός προβλήματος είναι ένας σημαντικός επεξηγηματικός παράγοντας για την εμμονή και υπέρμετρη εμπιστοσύνη στην γραμμικότητα. Σε σχετικές μελέτες των De Bock, Van Dooren κ.α, η επαναδιατύπωση των προβλημάτων τύπου missing value, σε ισοδύναμα προβλήματα σύγκρισης αποδείχθηκε μια ουσιαστική βοήθεια για πολλούς μαθητές ώστε να υπερνικήσουν την τάση τους προς τον μη επιτρεπόμενο γραμμικό συλλογισμό. Παρ΄ όλα αυτά, περισσότερα από τα μισά επαναδιατυπωμένα μη αναλογικά προβλήματα λύθηκαν και πάλι λανθασμένα, κάτι που δείχνει ότι το σχήμα missing value μπορεί μόνο εν μέρει να εξηγήσει το υπό εξέταση φαινόμενο.(De Bock κ.α. 2002, Van Dooren κ.α. 2003). Σε αντίστοιχη μελέτη τους με μαθητές της Κύπρου ,οι Modestou, Gagatsis, και Pitta (2004), αναφέρουν πως η τάση των μαθητών να εφαρμόσουν τον γραμμικό συλλογισμό στις καταστάσεις προβλήματος στις οποίες δεν υφίσταται, μειώθηκε όταν άλλαξαν το πλαίσιο διατύπωσης των προβλημάτων.

Εκτός από την ισχυρή εστίαση της διδασκαλίας στη στερεότυπη εκτέλεση των διαδικασιών αυτών που συνδέονται με τη γραμμικότητα, **η σχολική εμπειρία των μαθητών έχει επίσης μια γενικότερη επιρροή στις (μαθηματικές) συνήθειες και πεποιθήσεις που αποκτούν οι μαθητές σχετικά με την επίλυση προβλήματος.** Διάφορες έρευνες έχουν δείξει πως οι μαθητές συχνά θεωρούν τη μαθηματική επίλυση προβλήματος σαν ένα γρίφο, δηλαδή σαν μια δραστηριότητα με ελάχιστη ή καμία σχέση με την πραγματικότητα. Έχουν την τάση να χρησιμοποιήσουν τα επιφανειακά χαρακτηριστικά, για να αποφασίσουν ποιος χειρισμός απαιτείται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο προβλήματος (π.χ., Ben-Zeev & Star 2001 , Hinsley, Hayes, & Simon 1977, Schoenfeld 1988 αναφορά από Verschaffel κ.α. 2000). Μερικοί από τους μαθητές είχαν πειστεί πως η ιδέα που προκύπτει πρώτη και σύντομα είναι πάντα η καλύτερη, επομένως πρέπει να μένουμε στην πρώτη λύση, πως η αξιολόγηση και ο αναστοχασμός δεν είναι ένα βασικό μέρος της μαθηματικής επίλυσης προβλήματος ή ότι η επίλυση προβλήματος είναι μια επεξεργασία των δεδομένων με τους κατάλληλους τύπους και ότι τα σχήματα είναι λιγότερα αξιόπιστα από τους τύπους. Πολλοί μαθητές αν και είναι σε θέση να αναγνωρίσουν την ακαταλληλότητα μιας γραμμικής λύσης σε κάποιο πρόβλημα, την επιλέγουν στο πλαίσιο της διδακτικής σύμβασης: *«καλύτερα λανθασμένη λύση παρά καθόλου λύση»*. Σε κάποιες περιπτώσεις οι μαθητές συμμετέχουν σε ένα τεστ αναμένοντας πως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές λύσης που έχουν διδαχθεί πιο πρόσφατα (κατάλληλες ή όχι).

Κάποιες από τις πεποιθήσεις που προαναφέρθηκαν, μπορεί να σχετίζονται με αντίστοιχες ιδέες των δασκάλων τους, καθώς χειρίζονται αυτά τα προβλήματα. Ενδείξεις από μελέτη των Hadjidemetriou και Williams, εμφανίζουν τους δασκάλους να αντιμετωπίζουν παρόμοιες δυσκολίες απεικονίζοντας γραφικά μη γραμμικές καταστάσεις, επειδή επηρεάζονται από τα γραμμικά πρότυπα (Hadjidemetriou και Williams 2010). Δεν θα αποτελούσε λοιπόν έκπληξη, οι μαθητές που διδάσκονται από αυτούς τους δασκάλους, να αναπτύξουν επίσης, παρόμοιες αρχικές ιδέες.

Η Lave υποστηρίζει πως η συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ιδιαίτερη πρακτική, με τους κανόνες της και τις συνήθειές της:

> *«η δραστηριότητα επίλυσης των λεκτικών προβλημάτων στο σχολείο δεν είναι ίδια με κάθε δραστηριότητα που ενσωματώνεται σε άλλα συστήματα δράσης σε άλλες φάσεις της ζωής»*. (Lave 1992, από De Bock κ.α. 2007 σελ 150) .

Δεν αποτελεί λοιπόν έκπληξη η επιφανειακή συμπεριφορά των μαθητών, όταν αντιμετωπίζουν έργα που δίνονται όπως τα παραδοσιακά, σχολικά λεκτικά προβλήματα. *«Η αποδυναμωμένη και στερεότυπη μορφή των τυποποιημένων λεκτικών προβλημάτων, με τα οποία οι μαθητές είχαν εμπλακεί μέρα με τη μέρα στο μάθημα των μαθηματικών τους και στα τεστ κατά το παρελθόν, σαφώς διαμόρφωσαν τις τακτικές τους για την επίλυση προβλημάτων, καθώς και τις συνοδευτικές πεποιθήσεις τους για* *την σπουδαιότητα, την δομή, και τις υποθέσεις για αυτήν την επίλυση» (Verschaffel κ.α. 2000).*

Γίνεται λοιπόν σαφές, πως οι εκπαιδευτικές πρακτικές και οι συνήθειες και πεποιθήσεις που αυτές παράγουν, έχουν με τη σειρά τους ένα σημαντικό ρόλο στο περιστατικό της υπέρμετρης εμπιστοσύνης στη γραμμικότητα και επηρεάζουν αναντίρρητα την τάση των σπουδαστών να την καταχραστούν. Φαίνεται όμως ότι ενισχύουν μάλλον, παρά εγκαθιστούν αυτήν την τάση.

Ανώριμη στάση των μαθητών κατά την μαθηματική μοντελοποίηση, και ανεπάρκεια του μεταγνωστικού τους ελέγχου.

Σε διάφορες εμπειρικές μελέτες που αναφέρθηκαν από τους De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel , Modestou &Gagatsis διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές, κατέλαβαν ελάχιστη προσπάθεια στο να κατανοήσουν την κατάσταση του προβλήματος και να σχηματίσουν μια σαφή, νοητική αναπαράστασή του. Αντί αυτού επέλεξαν ένα μαθηματικό πρότυπο, μάλλον βάσει μιας «αντανακλαστικής αναγνώρισης». Τα ουσιαστικά βήματα για την εύρεση του μαθηματικού μοντέλου για την επίλυση ενός προβλήματος, είναι:

(1) κατανόηση της κατάστασης που περιγράφει το πρόβλημα,

(2) επιλογή των στοιχείων της κατάστασης που είναι απαραίτητα για την ανοικοδόμηση ενός μαθηματικού προτύπου, και την εργασία μέσω αυτού.

(3) πραγματοποίηση των απαραίτητων υπολογισμών

(4) ερμηνεία και αξιολόγηση του αποτελέσματος μέσα από την ίδια την κατάσταση.

Παρ όλα αυτά, σε μελέτη που αναφέρουν οι De Bock κ.α. , οι μαθητές έδειξαν να παρακάμπτουν σχεδόν τελείως όλα τα βήματα εκτός από το βήμα 3. Η απόφασή τους σχετικά με τις μαθηματικές διαδικασίες, προέκυψε κυρίως από μια επιφανειακή αναγνώριση του τύπου προβλήματος, και επηρεάστηκε από τις ανεπαρκείς συνήθειες και πεποιθήσεις τους.(De Bock κ.α. 2002)

Η υπερβολική εμπιστοσύνη στη γραμμικότητα οφειλόταν επίσης σε μεγάλο βαθμό στην ανεπάρκεια παρακολούθησης της διαδικασίας λύσης του προβλήματος από τους ίδιους τους μαθητές. Διέθεσαν τον περισσότερο χρόνο και προσοχή στους πραγματικούς υπολογισμούς και δύσκολα έκαναν οποιαδήποτε κριτική αξιολόγηση των επιτευχθέντων αποτελεσμάτων, εκτός από έναν γρήγορο έλεγχο για τα λάθη υπολογισμού. Έδειξαν επίσης απροθυμία να χρησιμοποιήσουν κάποιες ισχυρές ενδείξεις για να αντιμετωπίσουν ένα μη τυπικό πρόβλημα (π.χ. σπάνια έκαναν ή χρησιμοποίησαν ένα σχέδιο ή ένα σχήμα) (De Bock κ.α., 2002,2003 Modestou, Gagatsis κ.α. 2004). Πολύ σπάνια έκαναν έλεγχο του αποτελέσματος, βάση της κοινής λογικής. (De Bock κ.α. 2002). Ομοίως, μελέτη των Vlahovic-Stetic κ.α. έδειξε πώς, εάν σε ένα έργο πολλαπλής επιλογής οι μαθητές αναγνωρίσουν μια γραμμική λύση μεταξύ των προτεινόμενων, την επιλέγουν σαν απάντηση, πιθανότατα χωρίς να ερευνήσουν την πιθανή ισχύ των άλλων (Vlahovic-Stetic κ.α. 2010). Έτσι, αν και σε πολλές περιπτώσεις είναι συνειδητή η επιλογή του γραμμικού μοντέλου, πολύ συχνά η *«αδικαιολόγητη χρήση του γραμμικού συλλογισμού από τους μαθητές, μπορεί σαφώς να ειδωθεί σαν σύμπτωμα μιας ανώριμης ή ακόμη και διαστρεβλωμένης τάσης προς την μαθηματική μοντελοποίηση».*(Greer 2010). Είναι αποτέλεσμα επιφανειακών διαδικασιών που επηρεάζονται από συγκεκριμένες μαθηματικές συνήθειες και πεποιθήσεις.

Η σπουδαιότητα των μεταγνωστικών δεξιοτήτων για τον καθορισμό και την διάκριση των αναλογικών χαρακτηριστικών μιας κατάστασης, προκύπτει και από το μοντέλο για την μαθηματική αναλογική σκέψη, που προτείνουν οι Μοδέστου και Γαγάτσης. Στο μοντέλο αυτό σημαντική θέση έχει η *μετα-αναλογική ενημερότητα :*

« όπως η μεταγνώση ορίζεται ως η γνώση του ατόμου για το γνωστικό του σύστημα και ο έλεγχος που ασκεί σε αυτό (Brown, 1987), έτσι και η μετα-αναλογική ενημερότητα σχετίζεται με τη γνώση και τον έλεγχο των συγκεκριμένων γνωστικών διαδικασιών που αφορούν στον αναλογικό συλλογισμό(…)Μέσα σε αυτό το νέο πλαίσιο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας εξετάζεται όχι σε αντιπαράθεση με την ικανότητα των μαθητών για μαθηματική αναλογική σκέψη, αλλά ως αναπόσπαστο μέρος της, στα πλαίσια της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας» (Μοδέστου 2007, σελ 87).

Πρέπει ωστόσο να συνυπολογιστεί και το γεγονός ότι η μοντελοποίηση συχνά αφορά καταστάσεις που είναι σύνθετες και απαιτούν ένα γνωστικό υπόβαθρο για εξω-μαθηματικούς τομείς, το οποίο δεν διαθέτουν οι μαθητές. Έτσι, η μοντελοποίηση κάποιων φαινομένων από το χώρο της βιολογίας ή της φυσικής, έρχονται σε αντίθεση με τις προσδοκίες των μαθητών. Οι Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, και Verschaffel υποστηρίζουν πως *«ίσως η ίδια πραγματικότητα είναι αυτή που, υπό μια ορισμένη έννοια, ωθεί μερικές φορές τους μαθητές στον λανθασμένο συλλογισμό, καθώς η μαθηματική ιδέα μιας γραμμικής διεύρυνσης δεν εναρμονίζεται πάντοτε με τα μοντέλα ανάπτυξης που διακρίνουν την φυσική και βιολογική πραγματικότητα»*. Κάτι τέτοιο έχει προαναφερθεί από πολλούς ερευνητές π.χ: (Haldane το 1928 Kindt & de Lange, 1986 Thompson, 1961 αναφ από De Bock κ.α. 2007 σελ 20). Παραθέτουμε κάποια παραδείγματα που αναφέρουν για να στηρίξουν την προηγούμενη άποψη:

« Τα γηραιότερα δέντρα είναι σχετικά πιο χοντρά από τα νεώτερα, οι τίγρεις έχουν σχετικά παχύτερα πόδια από τις γάτες , τα φτερά του αετού είναι συγκριτικά μεγαλύτερα από εκείνα του χελιδονιού, τα μικρά θηλαστικά πρέπει να καταναλώνουν συνεχώς για να διατηρούν σταθερή την θερμοκρασία τους. Επίσης δεν μπορούμε να ισχυριστούμε πως τα μωρά είναι «γραμμικά μειωμένοι» ενήλικες, αφού το κεφάλι και τα κόκαλά τους, σε σχέση με τους οργανισμούς τους συνολικά, είναι σχετικά βαρύτερα από αυτά των ενηλίκων. Αυτά τα παραδείγματα των «φυσικών» διευρύνσεων δεν αποτελούν όμοιες διευρύνσεις. Τα μήκη δεν αυξάνονται ούτε μειώνονται προς όλες τις διαστάσεις με τον ίδιο συντελεστή. Οι λόγοι για αυτήν την ανομοιότητα δεν είναι μαθηματικοί, αλλά έχουν μια φυσική ή βιολογική προέλευση. Ας εξηγήσουμε δύο από τα προαναφερθέντα παραδείγματα. Κατ' αρχήν, γιατί πρέπει τα υψηλότερα δέντρα να έχουν σχετικά παχύτερους κορμούς από τα μικρότερα; Αν υποθέσουμε ότι κατά τον διπλασιασμό του ύψους ενός δένδρου διπλασιαζόταν και η ακτίνα της διατομής του, τότε ο όγκος του (επομένως και το βάρος του) θα οκταπλασιαζόταν. Όμως καθώς η δύναμη στήριξης του κορμού (στυλοβάτη, ποδιού,…) είναι ανάλογη προς τη διατομή του, αυτή θα γινόταν μόνο 4 φορές μεγαλύτερη. Προκειμένου λοιπόν να στηριχθεί ένα δέντρο 8 φορές βαρύτερο, πρέπει η διάμετρος του κορμού να πολλαπλασιαστεί με $\sqrt{8}$*, άρα σχεδόν να τριπλασιαστεί.*

Δεύτερον, γιατί πρέπει τα μικρά θηλαστικά να εξακολουθούν να καταναλώνουν τροφή για να παραμένουν θερμά; Όταν το μέγεθος ενός σώματος συρρικνώνεται, η επιφάνειά του μειώνεται κατα το τετράγωνο του ρυθμού μεταβολής, ενώ ο όγκος του μειώνεται κατα τον κύβο του ρυθμού μεταβολής. Επομένως, οι μικρότεροι οργανισμοί έχουν μεγαλύτερες επιφάνειες σχετικά με τον όγκο τους, από τους μεγαλύτερους οργανισμούς της ίδιας μορφής. Για τα θηλαστικά και τα πουλιά, αυτό υπονοεί ότι τα μικρότερα είδη χάνουν τη θερμότητά τους (μέσω του δέρματός τους) σχετικά *γρηγορότερα, και πρέπει έτσι να καταναλώνουν τροφή συνεχώς για να παραμένουν θερμά»* (De Bock κ.α. 2007 σελ 21).

<u>Επιρροή ιδιαζόντων παραγόντων, σχετικών με τη συγκεκριμένη κατάσταση στην οποία τα εμφανίζονται γραμμικά λάθη .</u>

Πέρα από τους παράγοντες που προαναφέρθηκαν, υποστηρίζεται ότι υπάρχουν ιδιαίτεροι παράγοντες που συμβάλλουν στην κατάχρηση της γραμμικότητας σε συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές. Οι παράγοντες αυτοί σύμφωνα με τους De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel μπορεί να σχετίζονται:

- ***με την δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση συγκεκριμένων εννοιών και***
- ***τον στενό τρόπο σύνδεσης πολλών βασικών εννοιών με την αναλογία***

Η κατάχρηση της γραμμικότητας παρατηρήθηκε συχνά σε προβλήματα που σχετίζονται με τις επιπτώσεις που έχει η γραμμική διεύρυνση ή σμίκρυνση ενός γεωμετρικού σχήματος, στο εμβαδόν του και τον όγκο του. Εδώ μια πρώτη εξήγηση, είναι η παρατήρηση ότι πολλοί μαθητές έχουν δυσκολίες με τις έννοιες του εμβαδού και του όγκου, (Outhred & Mitchelmore 2000 Rogalski_1982, Tiemey και άλλοι 1990 αναφ De Bock κ.α. 2007 σελ 151). Ένας επιπλέον ιδιαίτερος λόγος για τον οποίο οι μαθητές ανατρέχουν λανθασμένα σε γραμμικές μεθόδους σε αντίστοιχα προβλήματα είναι το γεγονός πως *«προκειμένου να διατηρηθεί το ίδιο σχήμα, μια οποιαδήποτε διεύρυνση ή σμίκρυνση του σχεδίου πρέπει να γίνει με γραμμικό τρόπο, δηλ το σχέδιο να γίνει κ-φορές πιο ψηλό και κ-φορές πιο πλατύ (και αν είμαστε στον χώρο κ-φορές πιο βαθύ). Με άλλα λόγια, όταν οι μαθητές προσεγγίζουν ένα πρόβλημα σχετικό με μεγέθυνση ή σμίκρυνση κάποιου σχήματος, η σκέψη τους είναι αναπόφευκτα στραμμένη προς τις γραμμικές μεταβολές της κατάστασης αυτής. Ϊ΄Οταν για παράδειγμα δηλώνουν πως το ύψος και το πλάτος ενός σχεδίου τριπλασιάζονται, άρα θα τριπλασιάζεται επίσης και το εμβαδόν, φαίνεται πως έχουν μια επαρκή διανοητική αντιπροσώπευση της κατάστασης του προβλήματος, αλλά έχουν εστιάσει στα γραμμικά επιφανειακά χαρακτηριστικά της διατύπωσής του (ύψος, πλάτος). Αυτή ακριβώς η διανοητική προσκόλληση είναι που τους πείθει για την ακρίβεια της γραμμικής τους λύσης»* (De Bock κ.α 2007 σελ 151).

Μια άλλη περιοχή στην οποία το φαινόμενο της κατάχρησης της γραμμικότητας ενδεχομένως υποκινείται από ιδιάζοντες παράγοντες, είναι αυτή των πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα, ένας πρώτος λόγος είναι η στενή σχέση ανάμεσα στις έννοιες της πιθανότητας και της αναλογίας, που αναλύθηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Ένα άλλο ιδιαίτερο πρόβλημα στην αντιμετώπιση του λανθασμένου γραμμικού συλλογισμού στο χώρο των πιθανοτήτων, είναι η αδυναμία ελέγχου των καταστάσεων αυτών. Όπως επισημαίνουν οι De Bock, Van Dooren, Janssens, Verschaffel, *«δεδομένου ότι οι καταστάσεις που σχετίζονται με την έννοια της πιθανότητας συνδέονται πάντα με την εγγενή αβεβαιότητα, συχνά δεν υπάρχει άμεση και αποφασιστική ανατροφοδότηση της ακρίβειας των υποθέσεών μας. Μπορεί εύκολα και πειστικά να διευκρινιστεί ότι το εμβαδόν ενός κύκλου δεν διπλασιάζεται όταν διπλασιαστεί η διάμετρός του, αλλά είναι πολύ πιο δύσκολο να δείξουμε ότι η πιθανότητα να πάρουμε τουλάχιστον μια φορά έξι, δεν διπλασιάζεται εάν ο διπλασιαστεί ο αριθμός ρίψεων ενός ζαριού»*. (De Bock κ.α. 2007 σελ 151)

ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΣ

Η γραμμικότητα είναι μια βασική έννοια στην μαθηματική εκπαίδευση, και από τις πρώτες που διδάσκονται οι μαθητές. Οι γραμμικές-ανάλογες σχέσεις είναι επίσης από τις πλέον χρήσιμες στην καθημερινή ζωή, τα μαθηματικά, και τις άλλες επιστήμες. Στα χρόνια της βασικής εκπαίδευσης αποτελούν ένα μαθηματικό εργαλείο σημαντικό για την επίλυση προβλημάτων, όχι μόνο στο μάθημα των μαθηματικών. Ας μην ξεχνάμε ότι οι αναλογίες είναι ίσως το μοναδικό μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων και σε άλλα μαθήματα όπως αυτά της Φυσικής και Χημείας, ιδιαίτερα στα πρώτα χρόνια διδασκαλίας τους. Φαίνεται όμως πως παράλληλα με την κατάκτηση της γραμμικής σκέψης από τους μαθητές, εγκαθίστανται εμμονή και υπέρμετρη εμπιστοσύνη προς αυτήν. Για τον λόγο αυτό η σημαντική εξοικείωση των μαθητών με τις γραμμικές ιδέες, μπορεί να τους οδηγήσει στο να τις εφαρμόζουν και σε καταστάσεις όπου αυτές είναι ακατάλληλες (Freudenthal, 1983). Πέρα από τις πολλές ιστορικές αναφορές που είναι σχετικές με τέτοια λάθη, υπάρχουν πλούσια ερευνητικά ευρήματα που τεκμηριώνουν την κατάχρηση της γραμμικότητας από άτομα διάφορων ηλικιών, σε ποικίλες μαθηματικές περιοχές (που καταγράφονται από τους Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2007). Το φάσμα των ηλικιών όπου έχουν ερευνητικά καταγραφεί γραμμικά λάθη συμπεριλαμβάνει πεντάχρονα παιδιά, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία στον γραμμικό συλλογισμό (Ebersbach κ.α. 2010) μέχρι φοιτητές πανεπιστημίου (Esteley κ.α 2004, 2008 Villarreal κ.α. 2004) ή και δασκάλους. (Hadjidemetriou κ.α. 2010). Χαρακτηριστικό πεδίο τέτοιων λαθών αποτελεί η επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με την επίδραση μιας γραμμικής διεύρυνσης ενός γεωμετρικού σχήματος, πάνω στο εμβαδόν του και τον όγκο του. Παρόμοια *«γραμμικά λάθη»* αναφέρονται και στον χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων από τους Γαγάτση και Κυριακίδη (2000), τον Matz (1982). Έχει επίσης παρατηρηθεί η έντονη τάση να δίδονται γραμμικές λύσεις σε προβλήματα που διέπονται από μη γραμμικές μεταβολές (τετραγωνικές, εκθετικές, λογαριθμικές, κ.λπ.), ή να αποδίδονται στις μεταβολές αυτές κάποιες γραμμικές ιδιότητες (Esteley κ.α. 2004, 2008, Villarreal κ.α. 2004). Μέσα από διαφορετικά πλαίσια ερμηνειών, τα λάθη αυτά σε κάποιες περιπτώσεις αποδίδονται σε μια στερεότυπη αντανακλαστική συμπεριφορά , ενώ σε άλλες σε μια πιο συνειδητή εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου.

Οι εκπαιδευτικές πρακτικές και οι συνήθειες και πεποιθήσεις που αυτές παράγουν, έχουν έναν αδιαφιλονίκητο ρόλο στο περιστατικό της υπέρμετρης εμπιστοσύνης στη γραμμικότητα, και επηρεάζουν αναντίρρητα την τάση των μαθητών να την καταχραστούν. Φαίνεται όμως ότι μάλλον ενισχύουν, παρά εγκαθιστούν αυτήν την τάση. Τα χαρακτηριστικά του φαινομένου έτσι όπως καταγράφονται μέσα από την έρευνα, καταδεικνύουν τις διαισθητικές ρίζες του. Η κατάχρηση της γραμμικότητας είναι ένα φαινόμενο *«καθολικό»* που αντιμετωπίζεται στην έρευνα παγκοσμίως, ανεξάρτητα από τα συγκεκριμένα προγράμματα σπουδών ή τις εκπαιδευτικές πρακτικές (Greer 2010, Van Dooren και κ.α 2008). Οι De Bock, Van Dooren, Verschaffel, και Janssens (2002) παρατήρησαν ότι οι σπουδαστές που κάνουν τα γραμμικά λάθη απάντησαν πολύ γρήγορα και ήταν πολύ βέβαιοι. Ήταν επίσης πολύ επίμονοι όταν έρχονταν αντιμέτωποι με τις αντιφατικές καταστάσεις. Η τάση κατάχρησης της γραμμικότητας είναι ανθεκτική και επιβιώνει της διδασκαλίας, ακόμα και όταν αυτή είναι στοχευμένη. Σε μελέτες που είχαν σαν στόχο να αξιολογήσουν μια σειρά παραγόντων που ίσως ευθύνονται για το φαινόμενο όπως ο τρόπος διδασκαλίας, η διατύπωση των προβλημάτων, η αυθεντικότητα των καταστάσεων που περιγράφονται στα προβλήματα, φάνηκε πως οποιαδήποτε προσπάθεια αντιμετώπισης των προηγούμενων παραγόντων είχε μάλλον προσωρινά αποτελέσματα.

ΕΡΕΥΝΑ

<u>Εισαγωγή</u>

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε δείχνει ότι οι μαθητές διαφόρων ηλικιών τείνουν να παρασύρονται συχνά, με λανθασμένο τρόπο, σε γραμμικά μονοπάτια συλλογισμού. Το φαινόμενο αυτό αφορά διάφορες μαθηματικές περιοχές, όπως την επίλυση προβλημάτων, την γεωμετρία , ή τον χώρο των πιθανοτήτων.

Η παρούσα μελέτη πραγματοποιήθηκε σε δυο διαφορετικές ηλικιακές ομάδες μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου και της Β΄ Λυκείου. Είχε κατ΄ αρχήν σαν σκοπό να εξετάσει την εφαρμογή του γραμμικού συλλογισμού από τους μαθητές των δυο ομάδων στην γεωμετρία, την τριγωνομετρία, τους λογάριθμους, όπως και σε μεταβολές που διέπονται από συναρτήσεις σαν την εκθετική. Αντικείμενο της μελέτης ήταν επίσης να διερευνήσει αν οι εσφαλμένες γραμμικές απαντήσεις οφείλονται σε ανεπάρκειες της τυπικής σχολικής μαθηματικής γνώσης, και να διαπιστώσει την εξέλιξη του φαινομένου στα σχολικά χρόνια.

Από τους μαθητές των δυο ομάδων ζητήθηκε να απαντήσουν σε δυο ερωτηματολόγια τα οποία περιείχαν έργα με γραμμικά και μη γραμμικά προβλήματα, όπως και ερωτήσεις σχετικά με τη «θεωρία» που έχουν διδαχτεί (π.χ. τους σχετικούς τύπους). Τα έργα του ερωτηματολογίου της Γ΄ Γυμνασίου προέρχονταν από την περιοχή της Γεωμετρίας και σχετίζονταν με την επίδραση μιας γραμμικής διεύρυνσης ενός γεωμετρικού σχήματος πάνω στην περίμετρο και εμβαδόν του. Εξαίρεση αποτελούσε ένα έργο που αφορούσε μια μεταβολή εκθετικής μορφής (αύξηση ενός μεγέθους κατά σταθερό ποσοστό κάθε χρόνο). Η επιλογή τους έγινε μέσα από όλη την μέχρι τότε σχετική διδαχθείσα ύλη. Στο ερωτηματολόγιο που δόθηκε στην Β΄ Λυκείου συμπεριέχονταν όλα εκείνα τα έργα που είχαν δοθεί στην Γ΄ Γυμνασίου, μαζί με κάποια επιπλέον που αφορούσαν την ύλη της συγκεκριμένης τάξης όπως τριγωνομετρικές συναρτήσεις και λογάριθμους. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, θέσαμε στην έρευνά μας τα επόμενα ερωτήματα:

α) Υπάρχει διαφοροποίηση της επίδοσης των μαθητών όταν αντιμετωπίζουν γραμμικά η μη γραμμικά προβλήματα; Κατά πόσο για τις λανθασμένες απαντήσεις στα μη γραμμικά προβλήματα ευθύνεται ένας μη επιτρεπτός γραμμικός συλλογισμός;

β) Σε ποιόν βαθμό οι εσφαλμένες γραμμικές απαντήσεις οφείλονται σε ανεπάρκειες της τυπικής σχολικής μαθηματικής γνώσης; Υπάρχει δηλαδή εκείνο το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο, βάση του οποίου θα μπορούσαν οι μαθητές να δώσουν τις σωστές μη γραμμικές λύσεις; Κατά πόσο καταφέρνουν να χρησιμοποιήσουν την τυπική μαθηματική τους γνώση, όταν εργάζονται σε προβλήματα στα οποία δεν είναι ρητή η απαίτηση για τη χρήση των τύπων;

γ) Πώς εξελίσσεται το φαινόμενο της εσφαλμένης εμμονής στην γραμμικότητα παράλληλα με συστηματικοποίηση της μαθηματικής εκπαίδευσης κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων; Η σπειροειδής δομή του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος είναι τέτοια που επιτρέπει την επαναλαμβανόμενη προσέγγιση συγκεκριμένων εννοιών μέσα από διαφορετικές τάξεις του Γυμνασίου και στη συνέχεια του Λυκείου. Επίσης προχωρώντας στις μεγαλύτερες τάξεις αυξάνεται συνεχώς η εμπειρία των μαθητών σχετικά με συναρτήσεις που δεν είναι γραμμικές. Μειώνεται όμως ο αριθμός των γραμμικών λαθών στις μεγαλύτερες τάξεις;

δ) Στην Β΄ Λυκείου εισάγονται νέες συναρτήσεις όπως οι τριγωνομετρικές, η εκθετική και η λογαριθμική. Κατά την διδασκαλία κάθε μιας από αυτές , οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τύπους που αναλύουν τις ποσότητες $f(x+y)$, $f(k.x)$ καθώς και με τις γραφικές τους παραστάσεις, έχουν επομένως μια σαφή εικόνα για τη μη ισχύ των γραμμικών ιδιοτήτων. Σε ποιόν βαθμό κάνουν γραμμικά λάθη τόσο σε φορμαλιστικό επίπεδο όσο και σε προβλήματα που αναφέρονται στις προηγούμενες νεοεισαγμένες συναρτήσεις;

ε) Πώς αιτιολογούν οι μαθητές τις μη κατάλληλες γραμμικές λύσεις που δίνουν; Κατά πόσο μέσα από τις αιτιολογήσεις αυτές ενισχύεται ο ισχυρισμός πως η επιλογή μιας λανθασμένης γραμμικής απάντησης είναι αποτέλεσμα ενός γραμμικού συλλογισμού;

Με βάση τη σχετική βιβλιογραφία, που συνοψίσαμε παραπάνω, υποθέσαμε πως θα υπήρχε επιτυχής αντιμετώπιση των γραμμικών έργων, αλλά μεγάλο ποσοστό μη κατάλληλων γραμμικών απαντήσεων στα μη γραμμικά έργα των δυο ομάδων, αφού η λανθασμένη εμμονή στην γραμμικότητα έχει καταγραφεί σαν ένα καθολικό φαινόμενο, ανθεκτικό στην διδασκαλία. Ωστόσο, περιμέναμε πως η ομάδα του Λυκείου θα είχε καλύτερες επιδόσεις στα κοινά έργα, μια και μέχρι τη Β΄ Λυκείου επαναλαμβάνεται η διδασκαλία εννοιών που σχετίζονται με τα ερωτήματα αυτά, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με δυσκολότερα προβλήματα υπολογισμού εμβαδών, και μέσα από τη διεξοδικότερη διδασκαλία της ομοιότητας, δίνεται ιδιαίτερο βάρος στην γραμμική διεύρυνση επιπέδων σχημάτων και στις συνέπειες που έχει αυτή για το εμβαδόν τους. Επιπλέον στο διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στις δυο τάξεις το αναλυτικό πρόγραμμα περιλαμβάνει τη διδασκαλία πλήθους μη γραμμικών συναρτήσεων (τετραγωνική, τριγωνομετρικές, εκθετική, λογαριθμική), αυξάνεται συνεπώς η εμπειρία των μαθητών πάνω σε μοντέλα που δεν είναι γραμμικά. Εξάλλου σε αντίστοιχες μελέτες, έχει παρατηρηθεί πως η απόδοση των μεγαλύτερων μαθητών στα μη γραμμικά προβλήματα είναι σχετικά καλύτερη από την επίδοση των νεώτερων (Vlahovic κ.α. 2010, De Bock κ.α. 1998, 2002)

Όσον αφορά τα έργα που αφορούσαν μόνο την ομάδα του Λυκείου η υπόθεσή μας ήταν πως και εδώ θα υπήρχε λανθασμένη γραμμική αντιμετώπιση, τόσο σε επίπεδο επίλυσης προβλήματος, όσο και σε φορμαλιστικό επίπεδο. Παρόμοια λάθη σε αντίστοιχα έργα, έχουν αναφερθεί και από προηγούμενους ερευνητές (Esteley, Villarreal & Alagia 2004 , Villarreal, Esteley & Alagia 2004, Γαγάτση και Κυριακίδη 2000, τον Matz 1982). Επειδή όμως οι έννοιες που αφορούσαν τα έργα αυτά διδάχτηκαν για πρώτη φορά στην Β΄ Λυκείου, θα μπορούσαμε να ελπίσουμε πως θα περιοριστεί ο κίνδυνος μεταφοράς λανθασμένων πρακτικών που έχουν αποκτηθεί κατά το παρελθόν.

Σχετικά με το ερώτημα του κατά πόσο οι μη κατάλληλες γραμμικές απαντήσεις στους μη γραμμικούς στόχους μπορεί να οφείλεται σε ανεπάρκεια της αντίστοιχης μαθηματικής γνώσης, υποθέσαμε πως μπορεί να ισχύει μόνο σε μικρό βαθμό. Οι λανθασμένες αυτές γραμμικές απαντήσεις έχουν περιγραφεί στην έρευνα σαν σύντομες, συνειρμικές, με ελάχιστες απαιτήσεις λειτουργικής μνήμης. (Gillard, Van Dooren, Schaeken, & Verschaffel, αναφορά από De Bock κ.α. 2007). Εξάλλου, όπως έχουμε προαναφέρει, υπό την προοπτική πολλών ερμηνειών του φαινομένου, σε πολλές περιπτώσεις οι απαντήσεις αυτές είναι αντανακλαστικές παρά συνειδητές αντιδράσεις, σε στερεότυπα σχήματα διατύπωσης.

Σύμφωνα με την θεωρία διπλής επεξεργασίας *(dual process theory)* (Evans 2003 , Sloman 1996, Stanovich και West 2000, αναφορά από De Bock κ.α 2007 σελ 147), οι λανθασμένες απαντήσεις δεν είναι απαραίτητο να ερμηνευτούν υπό την σκοπιά των ανεπαρκειών στη σχετική (μαθηματική) βάση γνώσεων του (S2), αλλά πολύ απλά είναι η συνέπεια της δράσης του S1 προτού να μπορέσει να ενεργήσει το S2. Αντίστοιχα, από την σκοπιά των Tirosh & Stavy οι απαντήσεις αυτές επηρεάζονται συχνά από τα κοινά, εξωτερικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των έργων, τα οποία προκαλούν τη χρήση των διαισθητικών κανόνων (Tirosh και Stavy, 1996, 1999, 2000). Ακόμη και αν δούμε την γραμμικότητα σαν *επιστημολογικό εμπόδιο,* δεν θα αποτελούσε έκπληξη, σε έργα που οι μαθητές έχουν πέσει σε γραμμικά λάθη, όχι μόνο να ξέρουν τους απαιτούμενους τύπους, αλλά να είναι σε θέση να περιγράφουν τις αντίστοιχες μεταβολές. Διότι όπως προτείνει ο Duroux: «*Ένα εμπόδιο είναι ένα κομμάτι της γνώσης ή μια σύλληψη, και όχι μια δυσκολία ή μια έλλειψη γνώσης*» **(**Duroux 1982 από Modestou & Gagatsis 2007).

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν δυο ομάδες μαθητών, η μια αποτελούμενη από 69 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και η άλλη από 70 μαθητές της Β΄ Λυκείου. Οι ομάδες αυτές προέρχονταν από δυο επαρχιακά, δημόσια σχολεία του νομού Αργολίδας. Κάθε μια περιελάμβανε όλους τους μαθητές της συγκεκριμένης τάξης του σχολείου.

Υλικό

Σχεδιάστηκαν δυο ερωτηματολόγια (βλ παράρτημα), με κλειστά ερωτήματα πολλαπλής επιλογής ή σωστού-λάθους, ένα για το Γυμνάσιο και ένα για το Λύκειο. Καθένα από αυτά, αποτελούνταν από δυο διαφορετικά μέρη. Στο 1^{ο} μέρος περιλαμβάνονταν γραμμικά και μη γραμμικά έργα, τα περισσότερα από τους οποία είχαν την μορφή προβλήματος. Για τις απαντήσεις των ερωτημάτων αυτού του μέρους ήταν ζητούμενη και η αντίστοιχη δικαιολόγηση. Το 2^{ο} μέρος περιελάμβανε έργα που εξέταζαν τη γνώση των τύπων που χρειάζονταν στο πρώτο μέρος, καθώς και έργα που εξέταζαν κατά πόσο τα παιδιά μπορούν να αποφανθούν λεκτικά για τις μεταβολές εκείνες που διέπουν τα προβλήματα του 1^{ου} μέρους.

Κοινά έργα του 1^{ου} μέρους των ερωτηματολογίων ήταν τα $Q_{1α}$, $Q_{1β}$, Q_2 , Q_3, $Q_{5α}$, $Q_{5β}$ (η αντιστοίχησή τους με τα ερωτήματα των ερωτηματολογίων φαίνεται στον πίνακα 1). Από αυτά τα $Q_{1α}$ (γραμμικό), $Q_{1β}$ (μη γραμμικό) αφορούσαν τη μεταβολή στην περίμετρο και το εμβαδόν αντίστοιχα, ενός τετραγώνου, όταν τριπλασιάζεται το μήκος της πλευράς του. Τα έργα αυτά δόθηκαν με τη μορφή προβλημάτων, όπου ο στόχος δίνονταν έμμεσα. Δηλαδή δεν έγινε ρητή αναφορά στην περίμετρο και το εμβαδόν αλλά στην περίφραξη και τη σπορά του τετράγωνου κήπου αντίστοιχα. Αποτελούσαν προσαρμογή αντίστοιχων έργων που είχαν χρησιμοποιήσει οι De Bock κ.α. στις μελέτες τους το 1998, 2002 κ.α. Το έργο Q_2 αναφερόταν σε μια μεταβολή εκθετικής μορφής (αύξηση της τιμής ενός προϊόντος 20% κάθε έτος σε σχέση με την προηγούμενη). Παρόμοια έργα έχουν χρησιμοποιήσει σε μελέτες τους οι Esteley κ.α). Το έργο Q_3 εξέταζε τη συνέπεια που έχει για το εμβαδόν ενός κύκλου ο διπλασιασμός της ακτίνας του. Και στο έργο αυτό ο στόχος δινόταν έμμεσα καθώς δεν γινόταν αναφορά στο εμβαδόν, αλλά στην ποσότητα μιας κυκλικής πίτσας. Στα έργα $Q_{5α}$, $Q_{5β}$ εξεταζόταν η μεταβολή του εμβαδού και του ύψους ενός ισοπλεύρου τριγώνου κατά τον διπλασιασμό της πλευράς του. Σε πολλές περιπτώσεις όπως στα Q_2, Q_3, από τους μαθητές δεν ζητήθηκε μια υπολογιστική απάντηση, αλλά μια κρίση σχετική με το αποτέλεσμα μιας μεταβολής. Από το κοινά έργα του 2^{ου} μέρους των ερωτηματολογίων, τα $Q_{7α}$, $Q_{7β}$, εξέταζαν τους τύπους της περιμέτρου και του εμβαδού του τετραγώνού , τα $Q_{8α}$ και $Q_{8β}$ τους τύπους για το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, ενώ τα $Q_{9α}$, $Q_{9β}$,$Q_{10α}$, $Q_{10β}$ αφορούσαν λεκτικές περιγραφές για τις μεταβολές των προηγουμένων περιμέτρων και εμβαδών.

Τα υπόλοιπα έργα απευθύνονταν μόνο στην ομάδα του Λυκείου. Από αυτά του 1^{ου} μέρους, το Q_4 ήταν ένα πρόβλημα σχετικό με την εφαπτομένη της διπλάσιας γωνίας. Σε ένα δεδομένο ορθογώνιο τρίγωνο είχε διχοτομηθεί η μια οξεία και οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν την εφαπτομένη της, καθώς τους δίνονταν όλα εκείνα τα απαραίτητα στοιχεία για να βρουν εύκολα την εφαπτομένη του μισού της. Τα έργα $Q_{6α}$, $Q_{6β}$, $Q_{6γ}$ ήταν σχετικά με την εφαρμογή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων, με στόχο την ανίχνευση γραμμικών λαθών σε φορμαλιστικό επίπεδο. Στο 2^{ο} μέρος του ερωτηματολογίου του Λυκείου υπήρχαν τα αντίστοιχα θεωρητικά των προηγούμενων. Το έργο Q_{11} ήταν σχετικό με τον τύπο της εφαπτομένης της διπλάσιας μιας γωνίας, ενώ τα Q_{12}, Q_{13} με δυο ιδιότητες των λογαρίθμων.

Η εναλλαγή μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών έργων του 1^{ου} μέρους ήταν τυχαία, καθώς μια ενδεχόμενη ομαδοποίησή τους ίσως οδηγούσε σε παρερμηνεία της ικανότητας των μαθητών να διακρίνουν τις γραμμικές από τις μη γραμμικές καταστάσεις.

Στον επόμενο πίνακα 1 γίνεται η αντιστοίχιση του συμβολισμού των ερωτημάτων όπως είναι στα ερωτηματολόγια και αυτού που χρησιμοποιείται κατά την επεξεργασία τους

<u>Πίνακας 1</u> :Αντιστοίχιση ερωτημάτων των δυο ερωτηματολογίων με τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται κατά την επεξεργασία τους

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	ΕΡΓΟ	ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΛΥΚΕΙΟΥ
1α	$Q_{1α}$ **(περίφραξη τετράγωνου κήπου)**	**1α**
1β	$Q_{1β}$ **(σπορά τετράγωνου κήπου)**	**1β**
2	Q_2 **(εκθετική)**	**2**
3	Q_3 **(πίτσα)**	**3**
	Q_4 **(υπολογισμός εφαπτομένης)**	**4**
4α	$Q_{5α}$ **(εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου)**	**5α**
4β	$Q_{5β}$ **(ύψος ισοπλεύρου τριγώνου)**	**5β**
	$Q_{6α}$ **(λογ5)**	**6α**
	$Q_{6β}$ **(λογ9)**	**6β**
	$Q_{6γ}$ **(λογ20)**	**6γ**
5α	$Q_{7α}$ **(περίμετρος τετραγώνου)**	**7α**
5β	$Q_{7β}$ **(περίμετρος τετραγώνου)**	**7β**
6α	$Q_{8α}$ **(μήκος κύκλου)**	**8^{α}**
6β	$Q_{8β}$ **(εμβαδόν κυκλικού δίσκου)**	**8β**
7α	$Q_{9α}$ **(μεταβολή περιμέτρου τετραγώνου)**	**9α**
7β	$Q_{9β}$ **(μεταβολή εμβαδού τετραγώνου)**	**9β**
8β	$Q_{10α}$ **(μεταβολή μήκους κύκλου)**	**10α**
8α	$Q_{10β}$ **(μεταβολή εμβαδού κύκλου)**	**10β**
	Q_{11} **(τύπος εφ2α)**	**11**
	Q_{12} **(ιδιότητα λογαρίθμου γινομένου)**	**12**
	Q_{13} **(ιδιότητα λογαρίθμου δύναμης)**	**13**

<u>Διαδικασία</u>

Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στο χώρο των σχολείων, την πρώτη εβδομάδα μετά τις διακοπές του Πάσχα του 2009, και ύστερα από συνεννόηση με τους διδάσκοντες. Ο χρόνος που είχαν οι μαθητές στην διάθεσή τους ήταν μια διδακτική ώρα (50 λεπτά). Επειδή το ερωτηματολόγιο του Λυκείου ίσως απαιτούσε περισσότερο χρόνο, δόθηκε στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν μέρος της επόμενης ώρας , η οποία επιλέχτηκε ώστε να είναι κενή. Τα δυο μέρη κάθε ερωτηματολογίου ήταν τυπωμένα σε διαφορετικά φύλλα τα οποία είχαν την ίδια αρίθμηση και δόθηκαν διαδοχικά. Όταν δηλαδή κάποιος μαθητής τελείωνε το 1^{ο} φύλλο, το παρέδιδε και παραλάμβανε το επόμενο. Αυτό έγινε για να αποκλειστεί το ενδεχόμενο να διορθώσει κάποιος απάντηση του πρώτου μέρους, συναντώντας τα αντίστοιχα θεωρητικά εργαλεία στο δεύτερο μέρος. Κατά τη διανομή του ερωτηματολογίου δόθηκαν οι αναγκαίες διευκρινίσεις σχετικά με το ότι εξυπηρετεί ερευνητικό ρόλο (χωρίς να γνωστοποιηθεί το αντικείμενο της έρευνας), και δεν αποτελεί κάποια μορφή αξιολόγησής τους. Έγινε παρότρυνση να γραφούν οι ζητούμενες δικαιολογήσεις, τονίζοντας την αξία τους για την έρευνά μας ακόμα και αν αυτές δεν έχουν αυστηρή μαθηματική μορφή, αλλά δίνουν μια απλή περιγραφή του τρόπου σκέψης τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κατά την επεξεργασία των απαντήσεων των ερωτηματολογίων, εξετάστηκαν οι επόμενοι παράμετροι:

- ***Αξιολογήθηκε η επιλογή της προτεινόμενης απάντησης***. Συγκεκριμένα οι απαντήσεις διακρίθηκαν σε τρεις κατηγορίες. Στις σωστές, τις λανθασμένες και σε αυτές οπου δεν έγινε επιλογή καμιάς προτεινόμενης απάντησης.
- ***Η ύπαρξη ή όχι δικαιολόγησης κατά την απάντηση:*** Οι απαντήσεις δηλαδή χωρίστηκαν σε αυτές που συνοδεύονταν ή όχι από τη ζητούμενη αιτιολόγηση.
- ***Ο μη επιτρεπτός γραμμικός συλλογισμός, σαν αιτία λανθασμένων απαντήσεων.*** Εξετάστηκε δηλαδή ποιες από τις λανθασμένες επιλογές βασίζονται σε έναν μη κατάλληλο γραμμικό συλλογισμό, είναι επομένως συνέπειες *«γραμμικών λαθών»*.

Έγινε επίσης μια προσπάθεια ποιοτικής καταγραφής, των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για την επίλυση των προβλημάτων, μέσα από τις δικαιολογήσεις που έδωσαν.

Για τις αναλύσεις που ακολουθούν χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πρόγραμμα SPSS.

<u>Κοινά έργα των ερωτηματολογίων</u>

Γραμμικά έναντι μη γραμμικών έργων: Προβλήματα. Στον επόμενους πίνακες 2 και 3, καταγράφονται οι συχνότητες και τα ποσοστά για κάθε τρόπο επιλογής απάντησης, στα κοινά έργα των δυο ομάδων.

Ο πίνακας 2 αφορά τα έργα του 1^{ου} μέρους των ερωτηματολογίων, που περιελάμβανε τα προβλήματα. Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε μια παραπλήσια εικόνα και στις δυο ομάδες, με υψηλά ποσοστά επιτυχίας σε καθένα από τα γραμμικά έργα $Q_{1α}$, $Q_{5β}$ σε αντιδιαστολή με το ιδιαίτερα χαμηλό ποσοστό επιτυχίας στα μη γραμμικά έργα $Q_{1β}$, Q_2, Q_3 και $Q_{5α}$..

<u>Πίνακας 2</u> : Συχνότητες και ποσοστά (%) των απαντήσεων των μαθητών του Γυμνασίου και του Λυκείου στα κοινά έργα του 1^{ου} μέρους των ερωτηματολογίων.

			ΓΥΜΝΑΣΙΟ		ΛΥΚΕΙΟ	
			Συχνότητα	**Ποσοστό %**	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
περίφραξη τετράγωνων κήπων **$Q_{1α}$**	**γραμμικό**	***λανθασμένες***	**4**	**5,8**	**1**	**1,4**
		σωστές	**65**	**94,2**	**69**	**98,6**
		χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**0**	**0**
σπορά τετράγωνων κήπων **$Q_{1β}$**	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**60**	**87**	**61**	**87,1**
		σωστές	**9**	**13**	**8**	**11,4**
		χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**1**	**1,4**
εκθετική μεταβολή **Q_2**	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**54**	**78,3**	**42**	**60**
		σωστές	**11**	**15,9**	**24**	**34,3**
		χωρίς απάντηση	**4**	**5,8**	**4**	**5,7**
πίτσα **Q_3**	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**58**	**84,1**	**56**	**80**
		σωστές	**9**	**13**	**11**	**15.7**
		χωρίς απάντηση	**2**	**2,9**	**3**	**4,3**
εμβ ισόπλ τρίγώνων **$Q_{5α}$**	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**31**	**44,9**	**41**	**58,6**
		σωστές	**34**	**49,3**	**25**	**35,7**
		χωρίς απάντηση	**4**	**5,8**	**4**	**5,7**
υψη ισοπλ τριγώνων **$Q_{5β}$**	**γραμμικό**	***λανθασμένες***	**16**	**23,2**	**23**	**32,9**
		σωστές	**48**	**69,6**	**38**	**54,3**
		χωρίς απάντηση	**5**	**7,2**	**9**	**12,9**

Η επιτυχής αντιμετώπιση του συνόλου των γραμμικών έργων από όλους τους μαθητές (82% στο Γυμνάσιο και 77% στο Λύκειο), σε αντίθεση με τα μικρά ποσοστά επιτυχίας που σημειώθηκαν στο σύνολο των μη γραμμικών έργων (23% στο Γυμνάσιο και 24% στο Λύκειο) γίνεται περισσότερο ορατή στον επόμενο πίνακα 3.

Πίνακας 3: Συχνότητες και ποσοστά των απαντήσεων των μαθητών των δυο ομάδων στο σύνολο των κοινών γραμμικών έργων και στο σύνολο των μη γραμμικών έργων του 1ου μέρους των ερωτηματολογίων

		ΓΥΜΝΑΣΙΟ		ΛΥΚΕΙΟ	
		Συχνότητα	**Ποσοστό %**	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Γραμμικά έργα $\mathbf{Q_{1\alpha}, Q_{5\beta}}$	***λανθασμένες***	**20**	**14**	**24**	**17**
	σωστές	**113**	**82**	**107**	**77**
	χωρίς απάντηση	**5**	**4**	**9**	**6**
Μη γραμμικά έργα $\mathbf{Q_{1\beta}, Q_2, Q_3, Q_{5\alpha}}$	***λανθασμένες***	**203**	**73**	**200**	**72**
	σωστές	**63**	**23**	**68**	**24**
	χωρίς απάντηση	**10**	**4**	**12**	**4**

Ο πίνακας 4 αναφέρεται στις απαντήσεις των κοινών έργων που υπήρχαν στο 2ο μέρους των ερωτηματολογίων, τα οποία εξέταζαν το αν υπήρχε το τυπικό θεωρητικό υπόβαθρο για την αντιμετώπιση των έργων του 1ου μέρους. Παρατηρούμε εδώ πολύ καλές επιδόσεις τόσο στα ερωτήματα $Q_{7\alpha}$, $Q_{7\beta}$, $Q_{8\alpha}$, $Q_{8\beta}$ που αφορούν τους τύπους υπολογισμού της περιμέτρου και εμβαδού του τετραγώνου, του μήκους και του εμβαδού κύκλου και κυκλικού δίσκου αντίστοιχα, και λιγότερο καλές στα ερωτήματα $Q_{9\alpha}$, $Q_{9\beta}$, $Q_{10\beta}$, $Q_{10\alpha}$ που εξετάζουν κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αποφανθούν σε λεκτικό πλαίσιο για τις μεταβολές των προηγουμένων

Πίνακας 4: Συχνότητες και ποσοστά (%) των απαντήσεων των μαθητών του Γυμνασίου και του Λυκείου στα κοινά έργα του 2ου μέρους των ερωτηματολογίων.

		ΓΥΜΝΑΣΙΟ		ΛΥΚΕΙΟ	
		Συχνότητα	**Ποσοστό %**	**Συχνότητα**	**Ποσοστό %**
Τύπος περιμέτρου τετραγώνου $Q_{7α}$	***λανθασμένες***	**14**	**20,3**	**6**	**8,6**
	σωστές	**55**	**79,7**	**63**	**90**
	χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**1**	**1,4**
Τύπος εμβαδού τετραγώνου $Q_{7β}$	***λανθασμένες***	**18**	**26,1**	**8**	**11,4**
	σωστές	**49**	**71**	**61**	**87,1**
	χωρίς απάντηση	**2**	**2,9**	**1**	**1,4**
τύπος μήκους κύκλου $Q_{8α}$	***λανθασμένες***	**20**	**29**	**23**	**32,9**
	σωστές	**49**	**71**	**42**	**60**
	χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**5**	**7,1**
τύπος εμβαδού κύκλου $Q_{8β}$	***λανθασμένες***	**12**	**17,4**	**8**	**11,4**
	σωστές	**57**	**82,6**	**58**	**82,9**
	χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**4**	**5,7**
μεταβ περιμ τετρ $Q_{9α}$	***λανθασμένες***	**18**	**26,1**	**15**	**21,4**
	σωστές	**51**	**73,9**	**55**	**78,6**
	χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**0**	**0**
μεταβ εμβ τετρ $Q_{9β}$	***λανθασμένες***	**30**	**43,5**	**28**	**40**
	σωστές	**39**	**56,5**	**40**	**57,1**
	χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**2**	**2,9**
μεταβ μήκους κύκλου $Q_{10β}$	***λανθασμένες***	**26**	**37,7**	**17**	**24,3**
	σωστές	**42**	**60,9**	**51**	**72,9**
	χωρίς απάντηση	**1**	**1,4**	**2**	**2,9**
μεταβ εμβ κύκλου $Q_{10α}$	***λανθασμένες***	**30**	**43,5**	**27**	**38,6**
	σωστές	**38**	**55,1**	**40**	**57,1**
	χωρίς απάντηση	**0**	**0**	**3**	**4,3**

Με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες 2 και 4, μπορεί να γίνει μια πρώτη σύγκριση των επιδόσεων μεταξύ των παιδιών Γυμνασίου και Λυκείου, στα κοινά έργα του 1ου μέρους . Παρατηρούμε εντυπωσιακή ομοιότητα στις επιδόσεις, ιδιαίτερα στα προβλήματα που αναφέρονται στην γραμμική διεύρυνση του τετραγώνου και του κύκλου. Οι μαθητές του Λυκείου αντιμετώπισαν σε καλύτερο βαθμό το έργο Q2 της εκθετικής μεταβολής, σημείωσαν όμως περισσότερα λάθη στα έργα Q5α , Q5β , που σχετίζονταν με την γραμμική διεύρυνση των πλευρών σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Θέλοντας να συγκρίνουμε τη συνολική μέση επίδοση των δυο ομάδων, βαθμολογήσαμε κάθε σωστή επιλογή με 2, κάθε λανθασμένη επιλογή με 1, ενώ τα ερωτήματα που δεν υπήρχε επιλογή με 0. Το κριτήριο Mann-Whitney U δεν έδειξε σημαντική διαφορά μεταξύ της μέσης επίδοσης στο Γυμνάσιο (μέση επίδοση:1,391, τυπική απόκλιση: 0,242) και το Λύκειο (μέση επίδοση: 1,366, τυπική απόκλιση: 0,249), z=-1,414, p=0,159.

<u>*Έργα που δόθηκαν μόνο στο Λύκειο*</u>

<u>Πίνακας 5</u>: Συχνότητες και ποσοστά (%) των απαντήσεων στα έργα του $1^{ου}$ μέρους του ερωτηματολογίου που απευθύνονταν μόνο στην ομάδα του Λυκείου .

			Συχνότητα	Ποσοστό %
υπολογισμός εφαπτομένης Q_4	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**49**	**70**
		σωστές	**10**	**14,3**
		χωρίς απάντηση	**11**	**15,7**
έκφραση του log5 $Q_{6α}$	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**24**	**34,3**
		σωστές	**43**	**61,4**
		χωρίς απάντηση	**3**	**4,3**
έκφραση του log9 $Q_{6β}$	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**7**	**10**
		σωστές	**59**	**84,3**
		χωρίς απάντηση	**4**	**5,7**
έκφραση του log20 $Q_{6γ}$	**μη γραμμικό**	***λανθασμένες***	**15**	**21,4**
		σωστές	**50**	**71,4**
		χωρίς απάντηση	**5**	**7,1**

Από τα ερωτήματα που δόθηκαν μόνο στην ομάδα του Λυκείου, μεγάλο ποσοστό λανθασμένων απαντήσεων απέσπασε το έργο Q_4, το οποίο τους ζητούσε να υπολογίσουν την εφαπτομένη της διπλάσιας γωνίας, σε ένα δεδομένο σχήμα. Μια διαφορετική, καλύτερη εικόνα διακρίνεται στα ποσοστά των απαντήσεων των έργων

$Q_{6α}$ $Q_{6β}$ και $Q_{6γ}$ που αφορούν εφαρμογή ιδιοτήτων της λογαριθμικής συνάρτησης. (Πίνακας 5)

Αρκετά καλή είναι και η αντιμετώπιση των σχετικών τύπων με τα έργα αυτά, που περιέχονταν στο $2^{ου}$ μέρους του ερωτηματολογίου (Πίνακας 6)

Πίνακας 6 : Συχνότητες και ποσοστά (%) των απαντήσεων στα έργα του $2^{ου}$ μέρους του ερωτηματολογίου που απευθύνονταν μόνο στην ομάδα του Λυκείου

		Συχνότητα	Ποσοστό %
τύπος εφ2α Q_{11}	***λανθασμένες***	**9**	**12,9**
	σωστές	**46**	**65,7**
	χωρίς απάντηση	**15**	**21,4**
Τύπος λογάριθμου γινομένου Q_{12}	***λανθασμένες***	**25**	**35,7**
	σωστές	**42**	**60**
	χωρίς απάντηση	**3**	**4,3**
Τύπος κ. logχ Q_{13}	***λανθασμένες***	**10**	**14,3**
	σωστές	**55**	**78,6**
	χωρίς απάντηση	**5**	**7,1**

Σχέση επίδοσης – βάσης γνώσεων

Θέλοντας τώρα να ελέγξουμε κατά πόσο οι λανθασμένες γραμμικές απαντήσεις οφείλονταν σε ελλείψεις της απαιτούμενης τυπικής μαθηματικής γνώσης, αντιπαραβάλαμε τις απαντήσεις στα μη γραμμικά έργα του πρώτου μέρους (προβλήματα), με αυτές που δόθηκαν στα έργα εκείνα του δεύτερου μέρους, που αφορούσαν τους αντίστοιχους τύπους και τις αντίστοιχες λεκτικές περιγραφές. Στις περισσότερες περιπτώσεις, παρατηρούμε πως ενώ υπάρχει η απαραίτητη τυπική γνώση για την αντιμετώπιση ενός έργου, παραμένει τελικά ανενεργή. Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών απαντά σωστά στα ερωτήματα που ελέγχουν τους τύπους των εμβαδών του τετραγώνου και του κύκλου (πίνακες 7,9). Επίσης ικανοποιητικός αριθμός μαθητών μπορεί να αποφανθεί λεκτικά για τις μεταβολές των εμβαδών αυτών κατά την γραμμική διεύρυνση των αντίστοιχων σχημάτων (πίνακες 8,10).

Πολύ λίγοι όμως από αυτούς, ανταποκρίνονται σωστά στα προβλήματα που αφορούν τις προηγούμενες μεταβολές.

Πίνακας 7:

Αντιπαραβολή απαντήσεων στα ερωτήματα $Q_{1β}$ (πρόβλημα σποράς κήπου) και $Q_{7β}$ (τύπος εμβαδού τετραγώνου)

		τύπος εμβαδού τετραγώνου **$Q_{7β}$**			ΣΥΝΟΛΟ
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
σπορά κήπου $Q_{1β}$	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**0** (0%)	**0** (0%)	**1** (0,7%)	**1** (0,7%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**2** (1,4%)	**24** (17,26%)	**95** (68,3%)	**121** (87%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**1** (0,7%)	**2** (1,4%)	**14** (10%)	**17** (12,2%)
ΣΥΝΟΛΟ		**3** (2,1%)	**26** (18,7%)	**110** (79,1%)	**139** (100%)

Πίνακας 8

Αντιπαραβολή απαντήσεων στα ερωτήματα $Q_{1β}$ (πρόβλημα σποράς κήπου) και $Q_{9β}$ (περιγραφή μεταβολής εμβαδού τετραγώνου)

		μεταβολή εμβαδού τετραγώνου **$Q_{9β}$**			ΣΥΝΟΛΟ
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
σπορά κήπου $Q_{1β}$	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**0** (0%)	**0** (0%)	**1** (0,7%)	**1** (0,7%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**1** (0,7%)	**55** (39,6%)	**65** (46,8%)	**121** (87%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**1** (0,7%)	**3** (2,1%)	**13** (9,4%)	**17** (12,2%)
ΣΥΝΟΛΟ		**2** (1,4%)	**58** (41,7%)	**79** (56,8%)	**139** (100%)

Το πρόβλημα $Q_{1β}$ που αναφερόταν έμμεσα στην μεταβολή του εμβαδού ενός τετράγωνου κήπου καθώς τριπλασιάζεται η πλευρά του, αντιμετώπισαν σωστά μόνο οι 14 μαθητές από τους 110 που ήξεραν τον τύπο του εμβαδού του τετραγώνου ($Q_{7β}$),(πίνακας7) και 13 από τους 79 που απάντησαν σωστά πως κατά τον υποδιπλασιασμό της πλευράς του τετραγώνου το εμβαδόν του δεν υποδιπλασιάζεται ($Q_{9β}$) (πίνακας 9). Οι 121 από τους 139 μαθητές (ποσοστό είναι 87% στο σύνολο των ερωτηματολογίων Γυμνασίου και Λυκείου), σκεπτόμενοι γραμμικά, θεώρησαν λανθασμένα πως κατά τον τριπλασιασμό της πλευράς τριπλασιάζεται και το εμβαδόν, ή απάντησαν με ασαφή τρόπο πως *«τριπλασιάζεται το τετράγωνο»*. Με διπλή αντιπαραβολή των προηγούμενων στοιχείων προκύπτει πως οι 54 από αυτούς τους 121 μαθητές είχαν απαντήσει σωστά και στα δυο αντίστοιχα θεωρητικά ερωτήματα.

Στο παρόμοιο έργο*: « Ο αγρότης Gus χρειάζεται 8 ώρες για να λιπάνει ένα τετραγωνικό λιβάδι πλευράς 200m. Πόσος χρόνος αυτός θα χρειαστεί περίπου για ένα τετραγωνικό λιβάδι με τις πλευρά 600m;»* που είχε συμπεριληφθεί στην έρευνα των De Bock κ.α, το αντίστοιχο ποσοστό ήταν 80% (De Bock κ.α. 1998). Όπως όμως έχουν επισημάνει οι συγκεκριμένοι ερευνητές το 90% των σωστών απαντήσεων σε εκείνο το έργο είχε δοθεί από μαθητές που αφού πρώτα υπολόγισαν το εμβαδόν κάθε τετραγώνου, στην συνέχεια σύγκριναν τα αποτελέσματα. Στην δική μας μελέτη μια τέτοια στρατηγική για το συγκεκριμένο έργο είχε αποκλειστεί, καθώς δεν δίνονταν οι διαστάσεις κάθε τετραγώνου, αλλά μόνο το ότι η μια είναι τριπλάσια της άλλης.

Πίνακας 9 : Αντιπαραβολή απαντήσεων στα ερωτήματα Q_3 (πρόβλημα με την πίτσα) και $Q_{8β}$ (τύπος εμβαδού κύκλου)

		τύπος εμβαδού κύκλου **$Q_{8β}$**			ΣΥΝΟΛΟ
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	ΣΩΣΤΕΣ	
πίτσα Q_3	ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**0** (0%)	**1** (0,7%)	**4** (2,9%)	**5** (3,6%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**4** (2,9%)	**12** (8,6%)	**98** (70,5%)	**114** (82%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**0** (0%)	**7** (5%)	**13** (9,4%)	**20** (14,4%)
ΣΥΝΟΛΟ		4 (2,9%)	20 (14,4%)	115 (82,7%)	139 (100%)

Όσον αφορά τα έργα που είναι σχετικά με τον κύκλο και τη μεταβολή του εμβαδού κατά μια γραμμική επιμήκυνση της ακτίνας του, από τους 115 μαθητές που γνώριζαν τον τύπο τού εμβαδού του κύκλου ($Q_{8β}$), και τους 68 που μπόρεσαν να κρίνουν σωστά πως κατά τον δεκαπλασιασμό της ακτίνας ενός κύκλου το εμβαδόν του δεν δεκαπλασιάζεται($Q_{10α}$), μόνο οι 13 απάντησαν σωστά στο ερώτημα Q_3 όπου τους ζητήθηκε με έμμεσο τρόπο να συγκρίνουν το εμβαδόν μιας κυκλικής πίτσας με αυτό που αντιστοιχεί σε δυο πίτσες με την μισή ακτίνα της αρχικής. (πίνακες 8,10)

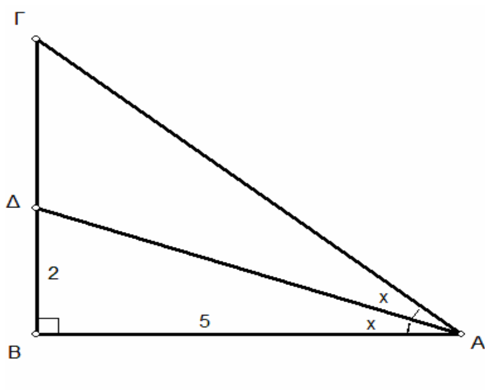
Η πλειοψηφία των μαθητών των δυο ομάδων (103 από τους 139) θεώρησε λανθασμένα πως η ποσότητα της μεγάλης πίτσας ισοδυναμεί με αυτή των δυο μικρών. Και σε αυτήν δηλαδή την περίπτωση, ένας ελλοχεύων γραμμικός συλλογισμός τους παρασύρει σε μια λανθασμένη απάντηση, μη επιτρέποντάς τους να χρησιμοποιήσουν τη σχετική μαθηματική τους γνώση.

Πίνακας 10

Αντιπαραβολή απαντήσεων στα ερωτήματα Q_3 (πρόβλημα με την πίτσα) και $Q_{10\alpha}$ (περιγραφή μεταβολής εμβαδού κύκλου)

		μεταβ εμβ κύκλου **$Q_{10\alpha}$**			**ΣΥΝΟΛΟ**
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
πίτσα Q_3	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**1** (0,7%)	**3** (2,1%)	**1** (0,7%)	**5** (3,6%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**3** (2,1%)	**47** (33,8 %)	**64** (46%)	**114** (82%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**0** (0%)	**7** (5%)	**13** (9,4%)	**20** (14,4%)
ΣΥΝΟΛΟ		**4** (2,9%)	**57** (41%)	**78** (56,1%)	**139** (100%)

Αντίστοιχη εικόνα παρατηρούμε και στο πρόβλημα με τον υπολογισμό της εφαπτομένης της διπλάσιας γωνίας.



Εδώ, οι 49 από τους 70 συμμετέχοντες μαθητές του Λυκείου απάντησαν λανθασμένα, και συγκεκριμένα οι 47 επέλεξαν την τιμή 4/5 σαν εφαπτομένη της γωνίας. Παρασύρθηκαν δηλαδή από ένα μη ορθό γραμμικό συλλογισμό. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το ότι από τους 46 μαθητές που ήξεραν τον τύπο που δίνει την εφαπτομένη της διπλάσιας γωνίας (Q_{11}), μόνο οι 8 κατάφεραν να τον χρησιμοποιήσουν για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα (πίνακας 11). Οι 32 από αυτούς, αγνοώντας τον, έδωσαν γραμμική απάντηση. Αφού δηλαδή υπολόγισαν την εφαπτομένη της γωνίας x από το μικρό ορθογώνιο τρίγωνο, είτε υπέθεσαν πως ***εφ2x = 2εφx*** , ή θεώρησαν πως διχοτομώντας μια από τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου, διχοτομείται και η απέναντι πλευρά του. Κάθε μια από τις προηγούμενες τακτικές καταγράφεται στην βιβλιογραφία σαν περίπτωση γραμμικού λάθους.

Πίνακας 11: **Αντιπαραβολή απαντήσεων στα ερωτήματα Q_4 (πρόβλημα εφαπτομένης) και $Q_{10α}$ (τύπος εφαπτομένης της διπλάσιας γωνίας)**

		τύπος εφ2α Q_{11}			**ΣΥΝΟΛΟ**
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
Υπολογισμός εφαπτομένης Q_4	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**3** (4,3%)	**2** (2,9%)	**6** (8,6%)	**11** (15,7%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**11** (15,7%)	**6** (8,6%)	**32** (45,7%)	**49** (70%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**1** (1,4%)	**1** (1,4%)	**8** (11,4%)	**10** (14,3%)
ΣΥΝΟΛΟ		**15** (21,4%)	**9** (12,9%)	**46** (65,7%)	**70** (100%)

Στο ερώτημα Q_2, δινόταν πως η τιμή ενός προϊόντος αυξανόταν κατά 20% κάθε χρόνο σε σχέση με τον προηγούμενο, και οι μαθητές καλούνταν να αποφανθούν για το αν ο διπλασιασμός της τιμής θα γίνει σε λιγότερο, ακριβώς ή περισσότερο από 5 χρόνια. Ήταν ένα πρόβλημα το οποίο αναμενόταν να παρουσιάσει μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές του Γυμνασίου, καθώς αυτοί του Λυκείου θα είχαν αυξημένη και πρόσφατη εμπειρία σε προβλήματα τόσο γεωμετρικών προόδων, όσο και εκθετικών μεταβολών. Εδώ επέλεξαν τη σωστή απάντηση 11 από τους 69 μαθητές του Γυμνασίου και 24 από τους 70 μαθητές του Λυκείου. Η πλειοψηφία των λανθασμένων απαντήσεων που δόθηκαν από τις δυο ομάδες (84 από τις 96) ήταν πως η τιμή θα αυξηθεί ακριβώς σε 5 χρόνια , μια απάντηση που φαίνεται να στηρίζεται σε έναν λανθασμένο γραμμικό συλλογισμό.

Α: σε λιγότερα από 5 χρόνια
Β: ακριβώς σε 5 χρόνια
Γ: σε περισσότερα από 5 χρόνια

Εξηγήστε γιατί: Για να διπλασιαστεί θα πρέπει να φτάσει το ποσοστό στο 100%. Αν κάθε χρόνο αυξάνεται κατά 20% τότε $\frac{100}{20}$ = 5 άρα ακριβώς σε 5 χρόνια θα έχει διπλασιαστεί

Ενδιαφέρον προκαλεί, το ότι κατά την απάντηση του συγκεκριμένου ερωτήματος, αν και οι μαθητές του Λυκείου έχουν υψηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων, έχουν πέσει περισσότερο στην *«παγίδα της γραμμικότητας»*. Αυτό γιατί σχεδόν στο σύνολο των λανθασμένων τους απαντήσεών τους (40 από τις 42) είχαν σημειώσει την επιλογή Β, που ήταν γραμμική. Αυτό, στην ομάδα του Γυμνασίου συνέβη στις 44 από τις 54 λανθασμένες απαντήσεις.(πίνακας 12)

<u>Πίνακας</u> 12: Συχνότητες απαντήσεων στο ερώτημα Q_2 (πρόβλημα με εκθετική μεταβολή)

	Σωστές	Λανθασμένες		Μη απαντημένες
		Γραμμικές	Μη γραμμικές	
Γυμνάσιο	11	44	10	4
Λύκειο	24	40	2	1
ΣΥΝΟΛΟ	35	84	12	5

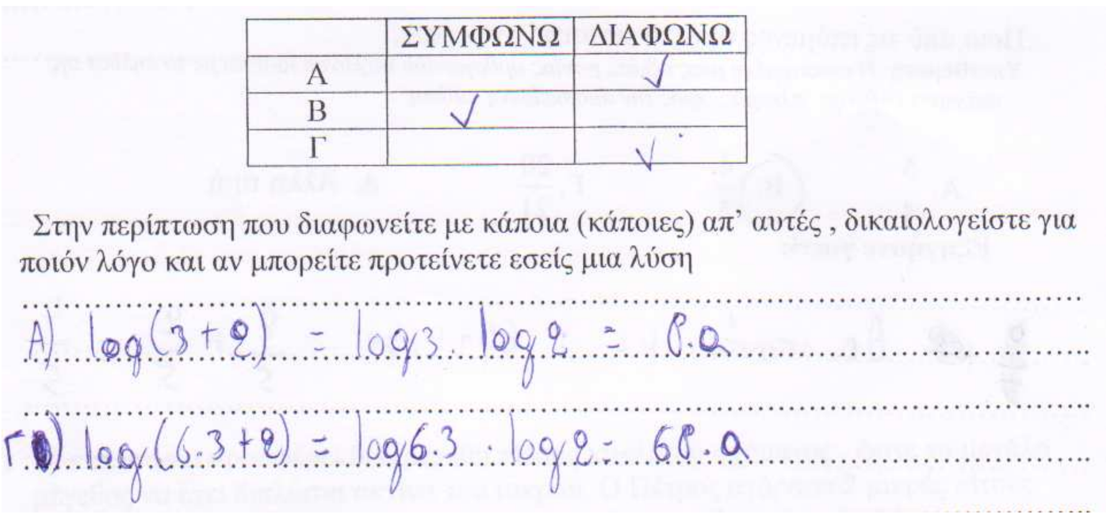
Τα μεγάλα ποσοστά αποτυχίας στο προηγούμενο έργο δεν μας εκπλήσσουν, καθώς συμφωνούν με ερευνητικά ευρήματα, από μεγαλύτερες ηλικιακά ομάδες. Στο αντίστοιχο έργο *«ένα έντομο που ζυγίζει 30 g, αυξάνει το βάρος του κατά 20% μηνιαίως. Συμφωνείτε ή όχι πως μετά δυο μήνες το βάρος του θα είναι 43,2g ;»* που είχε δοθεί από τους Esteley κ.α. σε μαθητές πανεπιστημίου, ποσοστό 52,4% είχε διαφωνήσει, θεωρώντας με γραμμικό συλλογισμό πως το ζητούμενο βάρος θα είναι 42 g. (Esteley κ.α 2002)

Στα ερωτήματα $Q_{6α}$, $Q_{6β}$ και $Q_{6γ}$ που αφορούν την εφαρμογή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων, αν και υπάρχουν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στην επιλογή της σωστής απάντησης, μπορούμε να διακρίνουμε μια μη συνεπή εικόνα σε σχέση με τα αντίστοιχα θεωρητικά ερωτήματα. Υπάρχει δηλαδή αριθμός μαθητών που ενώ έχουν επιλέξει την σωστή απάντηση, έχουν κάνει λάθος στα αντίστοιχα θεωρητικά ερωτήματα.(πίνακας 13)

Για παράδειγμα στο ερώτημα αν

$$\boldsymbol{log5} = log\,(3+2) = \boldsymbol{\alpha+\beta}, \quad \text{όπου } \boldsymbol{a} = log2 \text{ και } \boldsymbol{\beta} = log3,$$

από τους 43 μαθητές που αποφάνθηκαν σωστά πως η δοθείσα ισότητα είναι λανθασμένη**,** μόνο οι 32 έχουν απαντήσει σωστά στο ερώτημα Q_{12}, που αναφέρεται στον τύπο του λογαρίθμου ενός γινομένου. Επίσης από τους 50 μαθητές που διαφώνησαν με την ισότητα $\boldsymbol{log20} = log(6.3 + 2) = \boldsymbol{6\beta + \alpha}$ *με* $\boldsymbol{a} = log2$ *και* $\boldsymbol{\beta} = log3$**,** μόνο οι 34 επέλεξαν τον σωστό τύπο του γινομένου. Όλα αυτά, μαζί με την εξέταση των δικαιολογήσεων που έχουν δώσει, δείχνουν έναν επιφανειακό τρόπο προσέγγισης βασισμένο σε κάποιες απλοϊκούς συνειρμούς.



	ΣΥΜΦΩΝΩ	ΔΙΑΦΩΝΩ
Α		✓
Β	✓	
Γ		✓

Στην περίπτωση που διαφωνείτε με κάποια (κάποιες) απ' αυτές , δικαιολογείστε για ποιόν λόγο και αν μπορείτε προτείνετε εσείς μια λύση

A) $\log(3+2) = \log 3 \cdot \log 2 = \beta \cdot \alpha$

Γ) $\log(6.3+2) = \log 6.3 \cdot \log 2 = 6\beta \cdot \alpha$

Υπάρχει δηλαδή μια συγκεχυμένη άποψη, για το ότι κατά την εφαρμογή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων, με κάποιον τρόπο τα αθροίσματα μετασχηματίζονται σε γινόμενα. Η άποψη αυτή τους προστατεύει μάλλον από τα μη επιτρεπτά μονοπάτια, χωρίς όμως να μπορεί να θεωρηθεί γνώση. Θα μπορούσαμε να την χαρακτηρίσουμε σαν ένα είδος πρόχειρα δομημένης *στερεότυπης εμπειρίας* που αποσκοπεί μόνο στο να τους κάνει οριακά επιτυχείς, στο ισχύον εξεταστικό πλαίσιο.

<u>Πίνακας 13</u> Αντιπαραβολή απαντήσεων στα έργα $Q_{6α}$ και $Q_{6γ}$ (κρίση λανθασμένων γραμμικών εκφράσεων λογαρίθμων) με τα έργα Q_{12} και Q_{13} (ιδιότητες των λογαρίθμων)

		Τύπος λογάριθμου γινομένου Q_{12}			ΣΥΝΟΛΟ
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
έκφραση του log5 $Q_{6α}$	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**1** (1,4%)	**1** (1,4%)	**1** (1,4%)	**3** (4,3%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**0** (0%)	**15** (21,4%)	**9** (12,9%)	**24** (34,3%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**2** (2,9%)	**9** (12,9%)	**32** (45,7%)	**43** (61,4%)
ΣΥΝΟΛΟ		**3** (4,3%)	**25** (35,7%)	**42** (60%)	**70** (100%)

		Τύπος κ. logχ Q_{13}			ΣΥΝΟΛΟ
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
έκφραση του log5 $Q_{6α}$	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**1** (1,4%)	**1** (1,4%)	**1** (1,4%)	**3** (4,3%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**3** (4,3%)	**6** (8,6%)	**15** (21,4%)	**24** (34,3%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**1** (1,4%)	**3** (4,3%)	**39** (55,7%)	**43** (61,4%)
ΣΥΝΟΛΟ		**5** (7,1%)	**10** (14,2%)	**55** (78,6%)	**70** (100%)

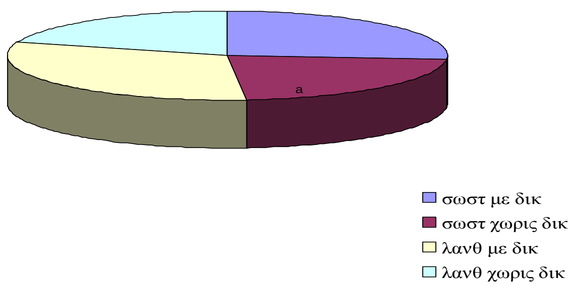
		Τύπος λογάριθμου γινομένου Q_{12}			ΣΥΝΟΛΟ
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
έκφραση του log20 $Q_{6γ}$	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**1** (1,4%)	**2** (2,9%)	**2** (2,9%)	**5** (7,1%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**0** (0%)	**9** (12,9%)	**6** (8,6%)	**15** (21,4%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**2** (2,9%)	**14** (20%)	**34** (48,6%)	**50** (71,4%)
ΣΥΝΟΛΟ		**3** (4,3%)	**25** (35,7%)	**42** (60%)	**70** (100%)

		Τύπος κ. logχ Q_{13}			ΣΥΝΟΛΟ
		ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ	**ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ**	**ΣΩΣΤΕΣ**	
έκφραση του log20 $Q_{6γ}$	**ΜΗ ΑΠΑΝΤΗΜΕΝΕΣ**	**1** (1,4%)	**2** (2,9%)	**2** (2,9%)	**5** (7,1%)
	ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ	**1** (1,4%)	**3** (4,3%)	**11** (15,7%)	**15** (21,4%)
	ΣΩΣΤΕΣ	**3** (4,3%)	**5** (7,1%)	**42** (60%)	**50** (71,4%)
ΣΥΝΟΛΟ		**5** (7,1%)	**10** (14,2%)	**55** (78,6%)	**70** (100%)

Αιτιολογήσεις

Σε συνολικό πλήθος 1055 απαντήσεων που δόθηκαν και από τις δυο ομάδες, οι 606 (57,44%) συνοδεύτηκαν από αιτιολόγηση.

Το ποσοστό των αιτιολογήσεων ήταν μεγαλύτερο στις λανθασμένες απαντήσεις καθώς από τις 542 είχαν δικαιολογηθεί οι 329 (60,7%). Αντίστοιχα από τις 513 σωστές απαντήσεις δικαιολογημένες ήταν οι 277 (54%). (πίνακες 14,15)



Αρκετά μεγαλύτερο είναι το ποσοστό των αιτιολογήσεων στις λανθασμένες γραμμικές απαντήσεις των μη γραμμικών στόχων. Από τις 476 τέτοιες απαντήσεις δικαιολογημένες ήταν οι 315 (66,7%) σχετικά μεγαλύτερο από τα δυο προηγούμενα. Οι αιτιολογήσεις αυτές των λανθασμένων γραμμικών απαντήσεων είναι σύντομες, απλές, και δίνουν την αίσθηση σιγουριάς για την απάντηση που δίνεται. Έχουν δηλαδή όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά των διαισθητικών απαντήσεων.

Ο μεγαλύτερος αριθμός των αιτιολογήσεων είναι μια άμεση, επιφανειακή καθημερινή εμπειρία, όπως: *«η μεγάλη πίτσα συμφέρει συνήθως περισσότερο»*.

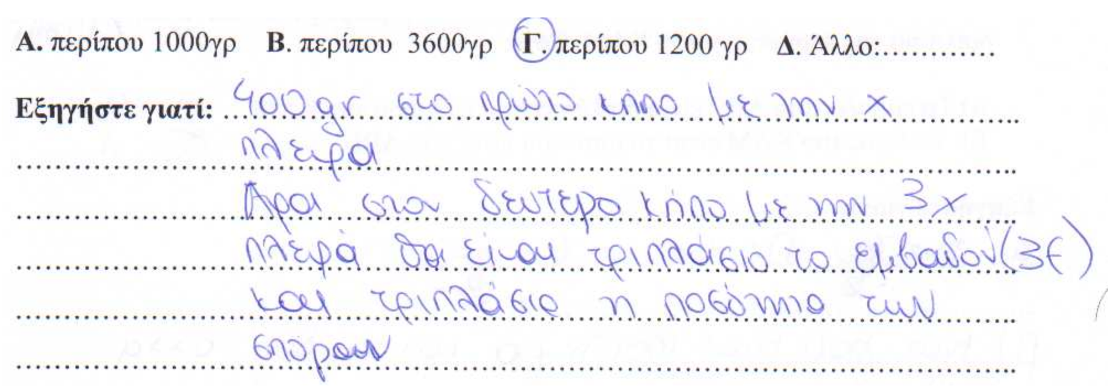
Πίνακας 14: Κατανομή των αιτιολογήσεων που δόθηκαν στα μη γραμμικά έργα του Γυμνασίου

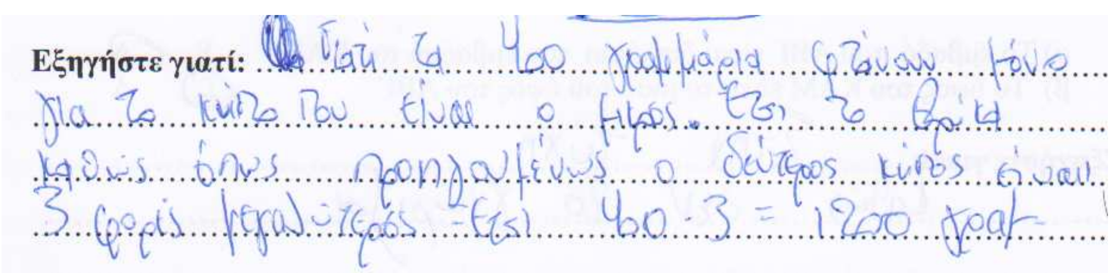
	σωστές απαντήσεις		λανθασμένες απαντήσεις				χωρίς απάντηση
			γραμμικές		*μη γραμμικές*		
	δικαιολ	*μη δικαιολ*	*δικαιολ*	*μη δικαιολ*	*δικαιολ*	*μη δικαιολ*	
$Q_{1β}$ (σπορά κήπου)	5	4	52	8	0	0	0
Q_2 (εκθετική μεταβ)	4	7	31	13	5	5	4
Q_3 (πίτσα)	4	5	40	11	4	3	2
$Q_{5α}$ (εμβ ισοπλ τριγ)	18	16	13	18	0	0	4
ΣΥΝΟΛΟ	**31**	**32**	**136**	**50**	**9**	**8**	**10**

Πίνακας 15: Κατανομή των αιτιολογήσεων που δόθηκαν στα μη γραμμικά έργα του Λυκείου

	σωστές απαντήσεις		λανθασμένες απαντήσεις				χωρίς απάντηση
			γραμμικές		*μη γραμμικές*		
	δικαιολ	*μη δικαιολ*	*δικαιολ*	*μη δικαιολ*	*δικαιολ*	*μη δικαιολ*	
$Q_{1β}$ (σπορά κήπου)	8	0	56	5	0	0	1
Q_2(εκθετική μεταβ)	9	15	31	9	1	1	4
Q_3(πίτσα)	8	3	42	10	2	2	3
Q_4(υπολ εφαπτομένης)	9	1	21	26	1	1	11
$Q_{5β}$(εμβ ισοπλ τριγ)	12	13	18	23	0	0	4
$Q_{6α}$(log5)	13	30	1	23	0	0	2
$Q_{6γ}$(log 20)	12	38	0	15	0	0	5
ΣΥΝΟΛΟ	**71**	**100**	**169**	**111**	**4**	**4**	**30**

Στο ερώτημα $Q_{1β}$, οι μαθητές ενώ ξέρουν πως η ποσότητα του σπόρου που χρειάζεται για να σπείρουμε γκαζόν σε έναν τετράγωνο κήπο είναι 300 γρ, καλούνται να υπολογίσουν την ποσότητα του σπόρου που θα χρειαστεί για τετράγωνο κήπο με τριπλάσια πλευρά. Αυτοί που σκεπτόμενοι γραμμικά επιλέγουν την τριπλάσια ποσότητα, δίνουν δικαιολογήσεις του τύπου *«τριπλασιάζεται η πλευρά του κήπου, επομένως τριπλασιάζεται και το εμβαδόν του»* ή *«τριπλασιάζεται η πλευρά άρα τριπλασιάζεται και ο κήπος»*.





Α. περίπου 1000γρ **Β.** περίπου 3600γρ **Γ.** περίπου 1200 γρ **Δ.** Άλλο:…………

Εξηγήστε γιατί: Γιατί ο δεύτερος κήπος είναι τριπλάσιος δηλαδή αν πολλαπλασιάσουμε επί 3 τα τετρακόσια γραμμάρια που χρειάστηκε μας βγαίνει ότι θα χρειαστεί 1200 γραμμάρια σπόρου.

Α. περίπου 1000γρ **Β.** περίπου 3600γρ **Γ.** περίπου 1200 γρ **Δ.** Άλλο:…………

Εξηγήστε γιατί: όπως και πριν αφού το μήκος της πλευράς του ενός κήπου είναι τριπλάσιο από του άλλου άρα είναι τριπλάσια και η περίμετρος του κήπου έτσι και τώρα θα είναι τριπλάσιο και το εμβαδόν του. Οπότε θα χρειαστούν τα τριπλάσια γραμμάρια σπόρου.

Α. περίπου 1000γρ **Β.** περίπου 3600γρ **Γ.** περίπου 1200 γρ **Δ.** Άλλο:…………

Εξηγήστε γιατί: Στον κήπο με την τριπλάσια πλευρά από τον πρώτο θα χρειαστεί 1200 γραμμάρια σπόρο, δηλαδή τριπλάσια ποσότητα σπόρου, αφού είναι τρεις φορές μεγαλύτερος από τον πρώτο κήπο.

Α. περίπου 1000γρ **Β.** περίπου 3600γρ **Γ.** περίπου 1200 γρ **Δ.** Άλλο:…………

Εξηγήστε γιατί: Αφού χρειαστηκε 400 γραμ για το πρωτο κηπο για τον δευτερο που ειναι τριπλασιος θα χρειαστει την τριπλασια ποσοτητα δηλαδη $3 \times 400 = 1200$ γρ.

Α. περίπου 1000γρ **Β.** περίπου 3600γρ **Γ.** περίπου 1200 γρ **Δ.** Άλλο:…………

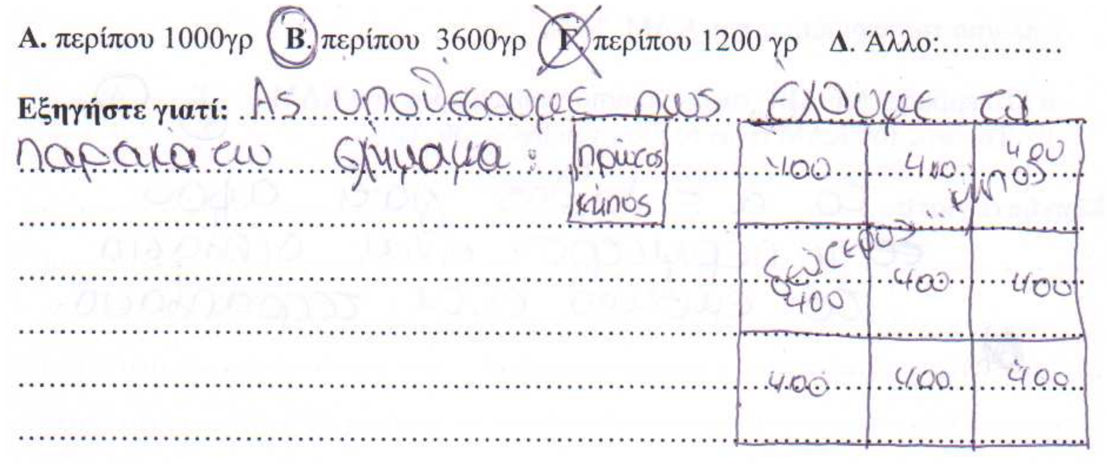
Εξηγήστε γιατί:

400 γρ ——— 60 πλευρά (1ος κήπος)

x; ——— 180 (2ος κήπος)

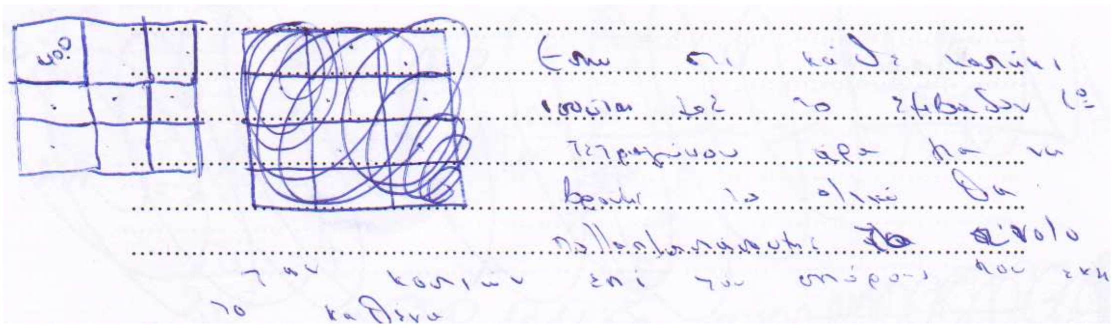
$60x = 400 \cdot 180 \Leftrightarrow x = \frac{400 \cdot 180}{60} = 3 \cdot 400 = 1200$ γρ

Αξιοσημείωτες είναι κάποιες από τις δικαιολογήσεις των μαθητών που απάντησαν σωστά στο ερώτημα αυτό. Κατάφεραν να ξεπεράσουν το εμπόδιο της γραμμικότητας κάνοντας τα απαιτούμενα σχέδια:

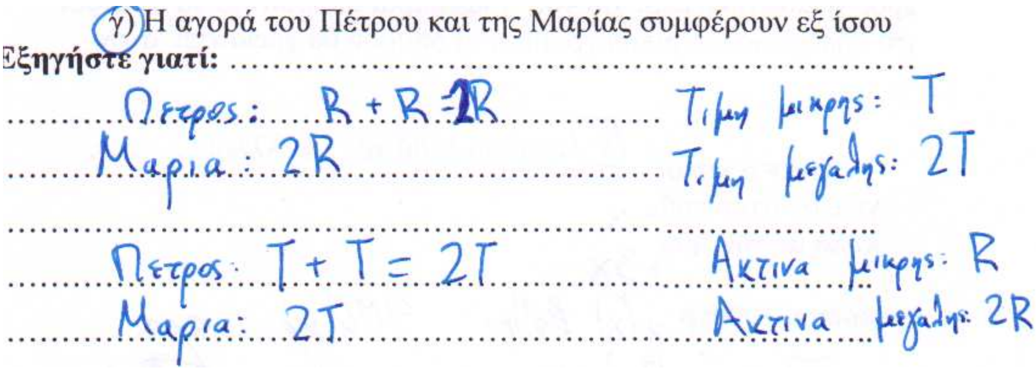

Α. περίπου 1000γρ Β. περίπου 3600γρ Γ. περίπου 1200 γρ Δ. Άλλο:…………

Εξηγήστε γιατί: Ας υποθέσουμε πως έχουμε τα παρακάτω σχήματα: πρώτος κήπος

400	400	400
400	400	400
400	400	400



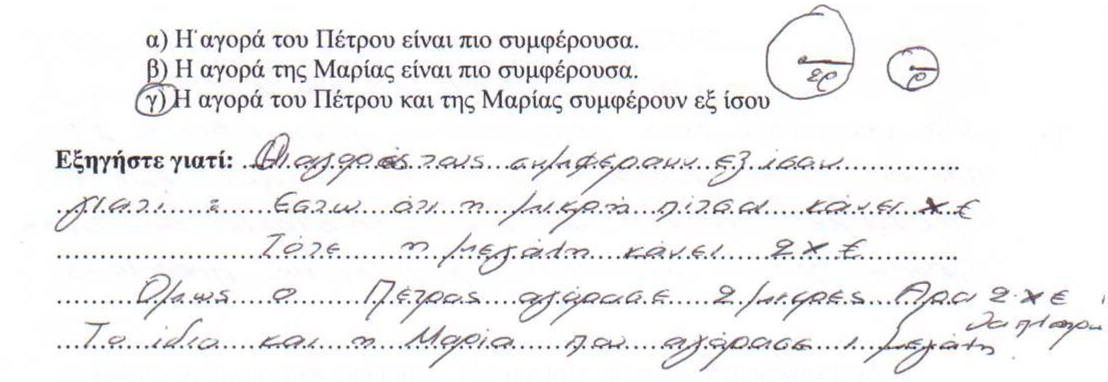
Αντίστοιχες δικαιολογήσεις, συναντάμε και στο ερώτημα Q_3 όπου πρέπει να συγκρίνουν την αγορά μιας μεγάλης κυκλικής πίτσας με αυτήν δυο μικρών που έχουν τη μισή ακτίνα, αλλά και τη μισή τιμή της μεγάλης. Και εδώ θεωρούν ότι με το διπλασιασμό της ακτίνας, διπλασιάζεται και η ποσότητα.


γ) Η αγορά του Πέτρου και της Μαρίας συμφέρουν εξ ίσου

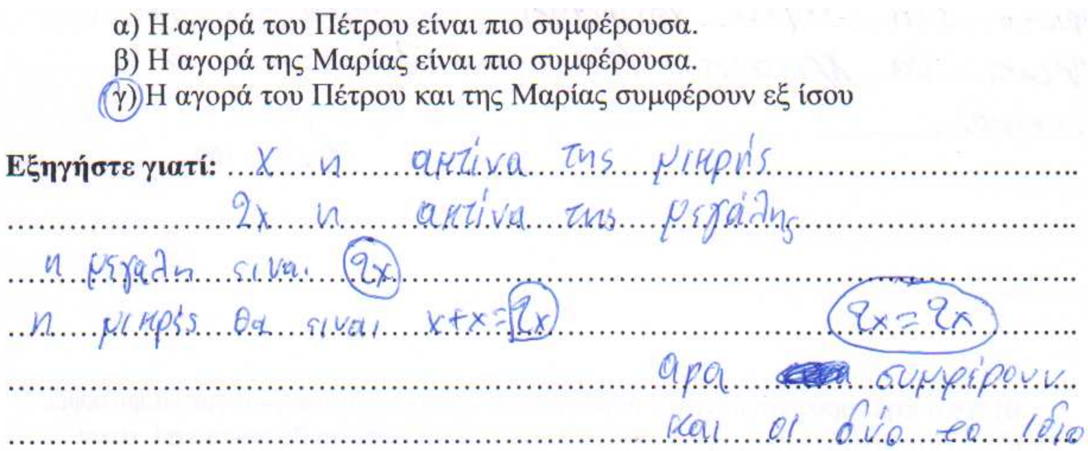
Εξηγήστε γιατί:

Πετρος: R + R = 2R Τιμη μικρης: T
Μαρια: 2R Τιμη μεγαλης: 2T

Πετρος: T + T = 2T Ακτινα μικρης: R
Μαρια: 2T Ακτινα μεγαλης: 2R

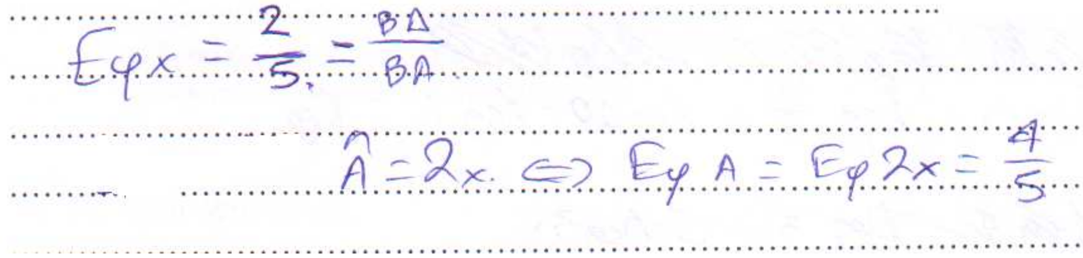

α) Η αγορά του Πέτρου είναι πιο συμφέρουσα.
β) Η αγορά της Μαρίας είναι πιο συμφέρουσα.
γ) Η αγορά του Πέτρου και της Μαρίας συμφέρουν εξ ίσου

Εξηγήστε γιατί: Οι αγορές τους συμφέρουν εξ ίσου γιατί έστω ότι η μικρή πίτσα κάνει x € Τότε η μεγάλη κάνει 2x€. Όμως ο Πέτρος αγόρασε 2 μικρές άρα 2·x€ Το ίδιο και η Μαρία που αγόρασε 1 μεγάλη

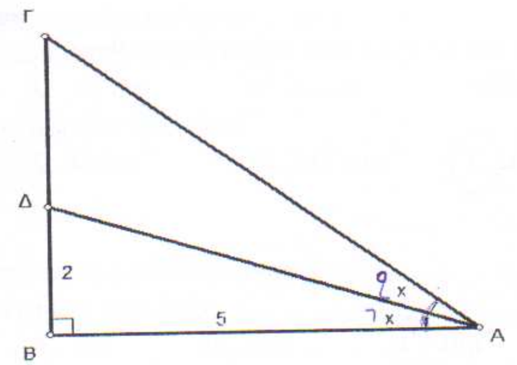

α) Η αγορά του Πέτρου είναι πιο συμφέρουσα.
β) Η αγορά της Μαρίας είναι πιο συμφέρουσα.
γ) Η αγορά του Πέτρου και της Μαρίας συμφέρουν εξ ίσου

Εξηγήστε γιατί: x η ακτίνα της μικρής
2x η ακτίνα της μεγάλης
η μεγάλη είναι 2x
η μικρής θα είναι x+x=2x   2x=2x
άρα [redacted] συμφέρουν
και οι δύο το ίδιο

Στο έργο (Q_{11}) που ήταν σχετικό με την εφαπτομένη της διπλάσιας γωνίας, οι γραμμικές απαντήσεις που δόθηκαν στηρίζονταν όπως προαναφέραμε στις πεποιθήσεις ότι *«διπλασιάζοντας μια γωνία διπλασιάζεται και η εφαπτομένη της»* ή ότι *«διχοτομώντας μια γωνία ενός τριγώνου διχοτομείται και η απέναντι πλευρά»*. Στην μια περίπτωση δηλαδή κάνουν χρήση της γραμμικής ιδιότητας $f(k\cdot x) = k\cdot f(x)$ σε επίπεδο αλγεβρικής έκφρασης, και στην άλλη επαναλαμβάνουν αυτό το γραμμικό λάθος που έχει περιγράψει ο Rouche σαν λανθασμένη κατασκευή για την διχοτόμηση μιας γωνίας. (Rouche 1992a, από De Bock κ.α. 2007, σελ 17).


$Εφx = \frac{2}{5} = \frac{ΒΔ}{ΒΑ}$

$\hat{A} = 2x \Leftrightarrow ΕφA = Εφ2x = \frac{4}{5}$



Ποια από τις επόμενες τιμές αντιστοιχεί στην εφΑ;

Υπενθύμιση: *Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς, προς την προσκείμενη κάθετη.*

Α. $\frac{5}{4}$ **Β.** $\frac{4}{5}$ **Γ.** $\frac{20}{21}$ **Δ.** Άλλη τιμή

Εξηγήστε γιατί:

Θα ισούται με : $εφ1 + εφ2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

Α. $\frac{5}{4}$ **Β.** $\frac{4}{5}$ **Γ.** $\frac{20}{21}$ **Δ.** Άλλη τιμή

Εξηγήστε γιατί:

Εφόσον η ΔΑ είναι διχοτόμος τότε ΒΔ = ΔΓ Οπότε ΒΓ = 4 και ΒΑ = 5

Α. $\frac{5}{4}$ **Β.** $\frac{4}{5}$ **Γ.** $\frac{20}{21}$ **Δ.** Άλλη τιμή

Εξηγήστε γιατί:

$εφx = \frac{2}{5}$ αφού ΑΔ διχοτόμος

$εφx + εφx = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

Α. $\frac{5}{4}$ Β. $\frac{4}{5}$ Γ. $\frac{20}{21}$ Δ. Άλλη τιμή

Εξηγήστε γιατί:

εφα = $\frac{\text{απεναντι καθετη}}{\text{προσκειμενη καθ}}$ ει εφα = $\frac{2}{5}$ αρα $\frac{4}{5}$ διοτι μας ζητοιει την ~~...~~ ολοκληρη η πλευρα. Αρα αφου η μιση είναι 2 επειδή είναι η διχοτομος της (Α) η ολοκληρη θα είναι 4.

Τα κοινά ερωτήματα $Q_{5\alpha}$, $Q_{5\beta}$, αναφέρονταν στην σχέση μεταξύ των υψών και των εμβαδών δυο ισόπλευρων τριγώνων, όπου η πλευρά του ενός ήταν διπλάσια αυτής του άλλου. Εδώ συνάντησαν μεγαλύτερη δυσκολία οι μαθητές του Λυκείου, καθώς το ποσοστό των σωστών τους απαντήσεων ήταν μικρότερο σε σχέση με την ομάδα του Γυμνασίου, όχι μόνο στην σύγκριση των εμβαδών (μη γραμμικό έργο) αλλά και στην σύγκριση των υψών (γραμμικό έργο). Οι περισσότερες δικαιολογήσεις που δόθηκαν εδώ, ήταν βασισμένες σε έναν συλλογισμό του τύπου: *«κ φορές το α – κ φορές το β»*, όπως η επόμενη

α) Το εμβαδό του ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του ΚΛΜ Σ Λ
β) Το ύψος του ΚΛΜ είναι το μισό του ύψος του ΑΒΓ Σ Λ

Εξηγήστε γιατί: α) εφόσον η πλευρα ΑΒΓ είναι διπλάσια τότε θα έχει διπλάσιο εμβαδον απο το ΚΛΜ
α) εφόσον η πλευρα ΑΒΓ είναι διπλάσια θα έχει και το διπλάσιο υψος από το ΚΛΜ
αρα ισχυει

α) Το εμβαδό του ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του ΚΛΜ Σ Λ
β) Το ύψος του ΚΛΜ είναι το μισό του ύψος του ΑΒΓ Σ Λ

Εξηγήστε γιατί: α) Αφού τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα είναι λογικό το εμβαδόν του ΚΛΜ να είναι διπλάσιο από το εμβαδό του ΑΒΓ, του οποίου η περίμετρος είναι διπλάσια του ΚΛΜ.
β) Το ύψος του ΚΛΜ είναι το μισό του ύψους του ΑΒΓ γιατί ~~...~~ μιας και οι πλευρές ~~...~~ διπλασιάζονται, το ύψος του ΑΒΓ είναι διπλάσιο του ΚΛΜ.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματά μας, συμφωνώντας με τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών, δείχνουν υψηλό ποσοστό επιτυχίας στα γραμμικά έργα, αλλά και την έντονη τάση των μαθητών να παρασύρονται σε λανθασμένες γραμμικές λύσεις, σε καταστάσεις που αυτές δεν υφίστανται. Το φαινόμενο αυτό δεν φαίνεται πως οφείλεται στην ανεπάρκεια της τυπικής μαθηματικής τους γνώσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, παρότι γνωρίζουν τους αντίστοιχους τύπους, και μπορούν λεκτικά να περιγράψουν τις σχετικές μεταβολές, αδυνατούν να χρησιμοποιήσουν την γνώση τους αυτή για να αντιμετωπίσουν μια κατάσταση προβλήματος. Στις λανθασμένες γραμμικές δικαιολογήσεις των μαθητών διακρίνονται χαρακτηριστικά που τους δίνουν έναν επιφανειακό, αυτονόητο, διαισθητικό χαρακτήρα. Με την πάροδο των χρόνων της σχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης και παρ όλη την εμπειρία που αποκτιέται στη σχολική τάξη, το πρόβλημα παραμένει και σε κάποιες περιπτώσεις γίνεται όλο και μεγαλύτερο.

Αναλύοντας τα αποτελέσματα σε σχέση με τους ερευνητικούς στόχους που είχαμε θέσει αρχικά, παρατηρούμε τα εξής:

Υπήρξε επιτυχής αντιμετώπιση των γραμμικών έργων και από τις δύο ομάδες (82% στο Γυμνάσιο και 77% στο Λύκειο), αντίθετα με τα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας που παρατηρήθηκαν στα κοινά μη γραμμικά έργα (23% στο Γυμνάσιο και 24% στο Λύκειο).(πίνακας 3) Τα αποτελέσματα αυτά δεν απέχουν πολύ από αντίστοιχα που έχουν αναφερθεί από άλλους μελετητές κατά το παρελθόν (πχ De Bock και λοιποί 1998, 2002 , Vlachovic κ.α. 2010)

Σχεδόν το σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων στους μη γραμμικούς στόχους, οφείλονται σε εσφαλμένη υπόθεση γραμμικότητας. Συγκεκριμένα, από τις 491 λανθασμένες απαντήσεις που δόθηκαν στα προβλήματα που δεν ήταν γραμμικά, οι 466 (ποσοστό 95 %) στηρίζονταν σε κάποιον εσφαλμένο γραμμικό συλλογισμό. Δικαιούμαστε λοιπόν στα επόμενα, όταν αναφερόμαστε σε λανθασμένες απαντήσεις, να εννοούμε τις λανθασμένες γραμμικές, που αποτελούν και την συντριπτική πλειοψηφία αυτών.

Στις περισσότερες από εκείνες τις περιπτώσεις όπου εσφαλμένα δόθηκαν γραμμικές λύσεις, υπήρχε η γνώση των απαιτούμενων μαθηματικών τύπων για την σωστή μη γραμμική λύση. Οι μαθητές ήταν σε θέση να ανακαλέσουν τους τύπους αυτούς, ακόμα και να περιγράψουν λεκτικά τις συνέπειες των συγκεκριμένων μεταβολών, όταν αυτό ήταν ρητώς ζητούμενο. Παρ΄ όλα αυτά, όταν επρόκειτο να λύσουν ένα πρόβλημα χωρίς την υπόδειξη να χρησιμοποιήσουν τους τύπους, έπεφταν στην «παγίδα» της γραμμικότητας, καθιστώντας όλη τη σχετική γνώση ανενεργή. Φαίνεται πως αυτή η βάση γνώσεων που οικοδομείται μέσα στο σχολείο, αποδεικνύεται αδρανής σε κάθε ενδεχόμενη προσπάθεια χρησιμοποίησής της. Η συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων, είναι συνάρτηση επιφανειακών παραγόντων και χαρακτηρίζεται από αδυναμία αναγνώρισης των χαρακτηριστικών της κατάστασης του προβλήματος, και ανάκλησης της αντίστοιχης γνώσης. Στην αντανακλαστική αυτή συμπεριφορά συμβάλει και η εξοικείωσή τους με γραμμικές τεχνικές τόσο στα Μαθηματικά όσο και στο πλαίσιο άλλων μαθημάτων (π.χ Φυσική, Χημεία). Αυτό το είδος εμπειρίας που το έχουμε αποκαλέσει σε προηγούμενη ενότητα *«στερεότυπη εμπειρία»* (Hatano, 1988), τους βοηθά μεν στο να είναι επιτυχείς κατά την επίλυση γραμμικών προβλημάτων, δεν τους καθιστά όμως ικανούς στο να διακρίνουν τις γραμμικές από τις μη γραμμικές καταστάσεις.

Με την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο ομάδων του Γυμνασίου και του Λυκείου, γίνεται φανερό πως παρ΄ όλη την συστηματικοποίηση της διδασκαλίας των αντίστοιχων εννοιών, το πρόβλημα δεν βελτιώνεται. Οι πεποιθήσεις για παράδειγμα πως κατά τον πολλαπλασιασμό της πλευράς του τετραγώνου ή της ακτίνα του κύκλου με έναν αριθμό πολλαπλασιάζεται και το αντίστοιχο εμβαδόν με τον ίδιο αριθμό, έχουν σχηματιστεί από πολύ νωρίς μέσα από σύνθετες διαδικασίες, και είναι τόσο βαθιά ριζωμένες, ώστε η διδασκαλία της ομοιότητας επιπέδων σχημάτων που ξεκινά από την Γ΄ Γυμνασίου και ολοκληρώνεται στην Β΄ Λυκείου, να μην μπορεί να τις εξοβελίσει. Το πρόβλημα λοιπόν λανθασμένης εφαρμογής γραμμικών λύσεων στο χώρο της Γεωμετρίας όχι μόνο δεν φαίνεται να βελτιώνεται, αλλά αντίθετα οι επιδόσεις της ομάδας του Λυκείου είναι χειρότερες (πίνακας 2). Στο έργο $\boldsymbol{Q_{1\beta}}$ που εξέταζε την μεταβολή του εμβαδού του τετράγωνου κήπου, το ποσοστό επιτυχίας στην ομάδα του Γυμνασίου ήταν 13% ενώ για αυτήν του Λυκείου 11,4%. Στο έργο $\boldsymbol{Q_{5\alpha}}$ που σχετιζόταν με την μεταβολή εμβαδού του ισοπλεύρου τριγώνου, τα αντίστοιχα ποσοστά ήταν 49,3% για το Γυμνάσιο και 35, 7% για το Λύκειο.

Χαμηλότερη είναι η απόδοση της ομάδας του Λυκείου, ακόμα και στο γραμμικό έργο $\boldsymbol{Q_{5\beta}}$ σχετικά με την μεταβολή του ύψους του ισοπλεύρου τριγώνου. Αντίθετα, στο έργο $\boldsymbol{Q_2}$ που αφορά μια εκθετική μεταβολή παρά το γεγονός πως και στις δυο ομάδες η επίδοση ήταν χαμηλή, το ποσοστό επιτυχίας της ομάδας του Λυκείου (34,3%) ήταν πολύ μεγαλύτερο από αυτήν του Γυμνασίου (15,9%). Ίσως κάποιες εξηγήσεις για τα προηγούμενα αποτελέσματα προκύπτουν πρώτον από το γεγονός της υποβάθμισης του μαθήματος της Γεωμετρίας στο σημερινό Λύκειο και δεύτερον, από την εστίαση της διδασκαλίας των μαθηματικών μόνο σε εκείνες τις έννοιες και τεχνικές, που σχετίζονται περισσότερο με την επιτυχία στις τελικές εξετάσεις. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, στενεύει το περιθώριο για μια σε βάθος προσέγγιση, θεμάτων που αφορούν τις επιπτώσεις της γραμμικής διεύρυνσης ενός γεωμετρικού σχήματος. Η συναφής εικόνα στις επιδόσεις από τις δυο διαφορετικές ομάδες του Γυμνασίου και του Λυκείου, κάνει σαφές ότι η οι ρίζες του προβλήματος βρίσκονται μακριά από την εκάστοτε εκπαιδευτική πρακτική. Ο προβλεπόμενος από το πρόγραμμα σπουδών τρόπος διδασκαλίας εννοιών όπως η ομοιότητα, φαίνεται ανεπαρκής στο να επισημάνει και να βελτιώσει την τάση γραμμικών απαντήσεων. Ιδιαίτερα υψηλό είναι το ποσοστό αποτυχίας και σε συναρτήσεις που εισάγονται για πρώτη φορά στην Β΄ Λυκείου, όπως η εκθετική και οι τριγωνομετρικές, παρ όλο το ότι κατά τη διδασκαλία τους γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην μη ισχύ των γραμμικών ιδιοτήτων $\boldsymbol{f(x+y) = f(x) + f(y)}$ και $\boldsymbol{f(k \cdot x) = k \cdot f(x)}$. Στο θέμα που αφορούσε την εφαρμογή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων σε φορμαλιστικό επίπεδο, υπήρξε υψηλό ποσοστό επιτυχίας. Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη αν λάβουμε υπ όψιν κάποιους ιδιάζοντες παράγοντες. Πρώτον, το ότι δόθηκε σαν ένα τυπικό σχολικό θέμα εξετάσεων της Β΄ Λυκείου και όχι σε μορφή προβλήματος, στο κεφάλαιο των λογαρίθμων που θεωρείται από τα σημαντικά για τις εξετάσεις αυτές. Δεύτερον το ότι το ερωτηματολόγιο δόθηκε λίγες μέρες πριν τις τελικές εξετάσεις, σε μια περίοδο δηλαδή που όλοι οι μαθητές έχουν επικεντρώσει την επανάληψή τους έστω και επιφανειακά στα θεωρούμενα σημαντικά κεφάλαια.

Κάποιες παράμετροι οι οποίες θα μπορούσαν ίσως να διαφοροποιήσουν κατά κάποιον τρόπο τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης, είναι η διαφορετική διατύπωση των έργων σε μορφή υπολογιστικών προβλημάτων, η χρήση άμεσων και όχι έμμεσων έργων και η παράλειψη της γραμμικής απάντησης από τις προτεινόμενες επιλογές. Στην μελέτη των De Bock κ.α. το 1998, αναφέρεται πως στο μεγαλύτερο μέρος των σωστών απαντήσεων στα μη γραμμικά έργα είχε προηγηθεί ο υπολογισμός των συγκρινόμενων ποσοτήτων και ακολούθησε η σύγκριση. Το γεγονός ότι σε κάποια από τα έργα της μελέτης μας δε υπήρχε δυνατότητα υπολογισμών, ίσως συνετέλεσε στην χρήση σε μεγαλύτερο βαθμό, την διαισθητικών κανόνων. Σε μελέτη που πραγματοποίησαν οι Vlahovic-Štetic και Zekic (2010), στην Κροατία αναφέρουν πως η τάση προς τα γραμμικά λάθη, αποδυναμώνεται στην περίπτωση που μια γραμμική απάντηση δεν περιέχεται στις προτεινόμενες επιλογές. Το γεγονός αυτό είναι ένα κίνητρο ιδιαίτερα για τους μεγαλύτερους μαθητές, να αναζητήσουν άλλα σχήματα επίλυσης πέρα από το γραμμικό. Όσον αφορά την χρήση κάποιων έμμεσων έργων (για παράδειγμα δεν έγινε αναφορά άμεσα στο εμβαδόν του τετραγώνου κήπου αλλά στην ποσότητα του σπόρου που θα χρησιμοποιηθεί), φαίνεται να έχει μικρή μόνο επίδραση στην τάση για γραμμικά λάθη των μαθητών, όπως υποστηρίζουν σε σχετική μελέτη τους οι Van Dooren κ.α. το 2005.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

Όπως έχει γίνει σαφές μέσα από την σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση, το φαινόμενο κατάχρησης της γραμμικότητας είναι καλά τεκμηριωμένο. Η παρουσία του είναι διαχρονική, διαπολιτισμική (καθολική), αγγίζει πολλές επιστημονικές περιοχές και χαρακτηρίζει άτομα διαφορετικού επιστημονικού επιπέδου. Πολλές διεθνείς μελέτες περιγράφουν την τάση μαθητών πολλών βαθμίδων και από διαφορετικές χώρες να δίνουν τις ίδιες ανακριβείς απαντήσεις, όταν τους απευθύνονται κοινά σχετικά ερωτήματα.(π.χ. Martin κ.α. 1996a, β, 1997a, β, αναφορά από Tirosh, Stavy και Shmuel 1998). Αυτή η τάση στην γραμμική σκέψη φαίνεται να είναι βαθιά ριζωμένη και αντιστέκεται σε κάθε προσπάθεια εξάλειψής της (De Bock κ.α. 2003).

Υπάρχει λοιπόν λόγος να αναζητούμε τρόπους για την αντιμετώπιση και την βελτίωση του φαινομένου αυτού, ή θα έπρεπε ίσως συνδέοντας το με μια εγγενή ιδιαιτερότητα του ανθρώπινου νου, να προδικάσουμε την αποτυχία οποιασδήποτε προσπάθειας βελτίωσής του;

Η έρευνά μας τεκμηριώνει την παρουσία του φαινομένου στο σημερινό ελληνικό σχολείο, καθώς και την αδυναμία βελτίωσης του κατά την πάροδο των σχολικών χρόνων και την μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Σε καμιά όμως περίπτωση, δεν θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως μέσα από τα ερευνητικά μας ευρήματα θα μπορούσαν να προταθούν τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος. Για την αναζήτηση τέτοιων προτάσεων θα είχε ενδιαφέρον να ανατρέξουμε στην διεθνή βιβλιογραφία, σε αποτελέσματα ερευνών της τελευταίας δεκαετίας που έχουν προσανατολιστεί στον προσδιορισμό εκείνων των ψυχολογικών και εκπαιδευτικών παραγόντων, που μπορεί να ευθύνονται για την ύπαρξη και εμμονή του φαινομένου.

Ως προς αυτό έχουν διατυπωθεί πολλές απόψεις, μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις, οι οποίες συγκλίνουν μεν στον διαισθητικό του χαρακτήρα, αλλά δεν αφήνουν απ΄ έξω και την επίδραση που μπορεί να έχουν στην ισχυροποίησή του εκπαιδευτικοί παράγοντες και συγκεκριμένες ακολουθούμενες μέχρι τώρα διδακτικές πρακτικές. Σε αυτό το πλαίσιο και μέσα από το πρίσμα των εξηγήσεων που δίνει ο καθένας για την ύπαρξη του φαινομένου, διάφοροι ερευνητές έχουν κάνει συστάσεις για συγκεκριμένες τροποποιήσεις της τρέχουσας εκπαιδευτικής πρακτικής. Μπορούμε να τις διακρίνουμε σε αυτές που αναφέρονται στον τρόπο διδασκαλίας της αναλογίας και σε αυτές που αποσκοπούν γενικότερα την βελτίωση της στάσης και της επίδοσης των μαθητών κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων. Πολλές από τις προτάσεις αυτές έχουν ήδη ληφθεί υπόψη, τόσο στην συγγραφή νέων εγχειριδίων όσο και στην κατάρτιση σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών, σε διεθνές επίπεδο.

Μια πρώτη κατευθυντήρια αρχή για την ανάπτυξη τέτοιων πρακτικών **είναι η ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να διακρίνουν τις γραμμικές από τις μη γραμμικές καταστάσεις.** Όπως διευκρινίζεται από τον Fischbein (1987) και άλλους, είναι σημαντικός ο προσδιορισμός των διαισθητικών κριτηρίων των μαθητών για την επιλογή μεταξύ των γραμμικών και μη γραμμικών προτύπων, η συζήτηση της προέλευσής τους και η πληροφόρηση για τις ασυνέπειες στις οποίες μπορεί να τους οδηγήσει η προσκόλληση της σκέψης τους σε κάποια μαθηματικά πρότυπα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, η ικανότητα αυτή διάκρισης των αναλογικών χαρακτηριστικών μιας κατάστασης αποτελεί μια από τις τρεις βασικές διαστάσεις ενός μοντέλου που προτείνεται για την μαθηματική αναλογική σκέψη από τους Μοδέστου και Γαγάτση (2007), *και καλείται μετα-αναλογική ενημερότητα*.

Είναι σημαντικό κατά την διδασκαλία της αναλογίας στην στοιχειώδη εκπαίδευση, να συζητιούνται στην τάξη καταστάσεις στις οποίες ισχύουν τα γραμμικά πρότυπα και να αντιπαραβάλλονται με άλλες μη γραμμικές. Επειδή σύμφωνα με τα ερευνητικά ευρήματα η τάση εμμονής στην γραμμικότητα εγκαθίσταται παράλληλα με την ανάπτυξη των δεξιοτήτων του γραμμικού συλλογισμού και την διδακτική προσοχή που λαμβάνουν αυτές (Van Dooren κ.α. 2005), η αντιπαραβολή αυτή μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών καταστάσεων πρέπει να γίνεται από την πρώτη στιγμή που διδάσκεται η αναλογία. Η αντιμετώπιση ανάλογων μόνο προβλημάτων, ισχυροποιεί την εντύπωση των μαθητών για την αποτελεσματικότητα του γραμμικού μοντέλου, ενθαρρύνει την τάση των μαθητών να εργάζονται με πρότυπα και δημιουργεί ένα γνωστικό εμπόδιο για την κατανόηση άλλων μη γραμμικών μεταβολών. Η έρευνα επισημαίνει επίσης την δυσκολία επιτυχίας, μιας εκ των υστέρων προσπάθειας θεραπείας του φαινομένου κατάχρησης της γραμμικότητας, καθώς αυτό έχει βαθιές διαισθητικές ρίζες. Φαίνεται λοιπόν πως μάλλον θα ήταν αποτελεσματικότερη μια έγκαιρη αποτροπή της εμφάνισής του. Η προσπάθεια ανάδειξης των ασυνεπειών του γραμμικού μοντέλου και της δημιουργίας οποιασδήποτε μορφής γνωστικής σύγκρουσης μάλλον δεν αρκούν. Οι Tirosh, Ruth και Cohen (1998) που εξετάζουν το φαινόμενο μέσα από το πρίσμα της θεωρίας των «διαισθητικών κανόνων», μιλούν για την ανεπάρκεια εκπαιδευτικών παρεμβάσεων βασισμένων στην γνωστική σύγκρουση, και την ανάγκη διαφορετικών προσεγγίσεων. Εξ άλλου, μέσα από την διδακτική μας εμπειρία μπορούμε όλοι να θυμηθούμε περιπτώσεις όπου κάποια επαναλαμβανόμενα λάθη μαθητών συνεχίζονται με την ίδια ένταση, παρ όλη την διάψευσή τους μέσα από κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα. Πόσες φορές για παράδειγμα δεν έχουμε διαψεύσει την πεποίθηση των μαθητών πως το τετράγωνο του αθροίσματος δυο αριθμών ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων τους, χωρίς όμως το αναμενόμενο αποτέλεσμα; Σε μελέτη των De Bock κ.α. , όπου οι ερευνητές μέσα από ημιδομημένες συνεντεύξεις, προσπαθούσαν να οδηγήσουν τους μαθητές να επανεξετάσουν τις λανθασμένες γραμμικές λύσεις που είχαν δώσει σε μη γραμμικά προβλήματα, ακόμα και μετά από τέσσερα στάδια αυξανόμενων γνωστικών συγκρούσεων, το ένα πέμπτο των μαθητών συνέχισε να κολλά στην γραμμική λύση. (De Bock κ.α. 2002)

Επί πλέον μια εκ των υστέρων διάψευση του ήδη εγκατεστημένου γραμμικού προτύπου, δεδομένου πως οι μαθητές έχουν μάθει να λειτουργούν μέσω προτύπων μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να δημιουργήσει αισθήματα ανασφάλειας και σύγχυσης και να οδηγήσει σε άλλες λανθασμένες υπεργενικεύσεις. Μόλις δηλαδή οι μαθητές ανακαλύψουν το μη γραμμικό χαρακτήρα ορισμένων καταστάσεων, είναι δυνατό να αρχίσει η εφαρμογή των μη γραμμικών ιδεών και στις απλές γραμμικές καταστάσεις. Ο ισχυρισμός αυτός στηρίζεται και από τα αποτελέσματα της εκπαιδευτικής παρέμβασης των Van Dooren κ.α. (2004) σε Φλαμανδούς μαθητές. Το παρεμβατικό αυτό πρόγραμμα ήταν διάρκειας 10 ωριαίων μαθημάτων και στόχος του ήταν να μπορούν οι μαθητές να διακρίνουν τις γραμμικές από τις μη γραμμικές καταστάσεις κατά τη μεταβολή του μήκους πλευράς/πλευρών ενός επιπέδου σχήματος. Οι ερευνητές αυτοί ανέτρεξαν σε αρχές σχεδιασμού από τη βιβλιογραφία για στη ρεαλιστική εκπαίδευση μαθηματικών, ισχυρά μαθησιακά περιβάλλοντα, εννοιολογική αλλαγή και η αύξηση των δεξιοτήτων σκέψης ανώτερης τάξης (Collins, & Newman, 1989; De Corte,Verschaffel, & Masui, 2004; Gravemeijer, 1994 Treffers, 1987; De Lange, 1987; Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou, & Papademetriou, 2001). Συγκρίθηκαν οι επιδόσεις της ομάδας των μαθητών που παρακολούθησε το πειραματικό πρόγραμμα με αυτές μιας ομάδας ελέγχου, που ακολούθησε το κανονικό πρόγραμμα του σχολείου. Η σύγκριση αυτή έγινε σε τρεις φάσεις ένα τεστ πριν την παρέμβαση, ένα αμέσως μετά και ένα τρίτο 3 μήνες αργότερα. Αποτέλεσμα του προγράμματος ήταν η πειραματική ομάδα να κάνει σημαντική πρόοδο στα μη γραμμικά προβλήματα σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, και η πρόοδος αυτή να παραμείνει για αρκετούς μήνες. Ταυτόχρονα όμως μειώθηκαν οι επιδόσεις της πειραματικής ομάδας στα γραμμικά προβλήματα, σε αντίθεση με την ομάδα ελέγχου που παρέμεινε σταθερή. Όταν δηλαδή οι μαθητές της πειραματικής ομάδας ανακάλυψαν ότι μερικά προβλήματα δεν μπορούν να λυθούν με αναλογίες, άρχισαν να γενικεύουν τους μη γραμμικούς τρόπους λύσης και στα γραμμικά προβλήματα. Για να περιοριστούν τέτοιες γενικεύσεις προτύπων οι προηγούμενοι ερευνητές προτείνουν: *«από την πρώτη στιγμή διδασκαλίας της αναλογίας στην στοιχειώδη εκπαίδευση, οι μαθητές πρέπει να έρχονται αντιμέτωποι και με παραδείγματα εξαίρεσης του κανόνα (καταστάσεων στις οποίες η γραμμικότητα δεν λειτουργεί), και να μαθαίνουν να διακρίνουν μεταξύ των καταστάσεων που μπορούν να μοντελοποιηθούν γραμμικά και καταστάσεων με μια άλλη υποκρύπτουσα μαθηματική δομή. Με αυτόν τον τρόπο, θα μπορούσε ίσως να αποτραπεί η δημιουργία της πρώιμης διαισθητικής υπόθεσης πως οποιαδήποτε σχέση μεταξύ των μεγεθών είναι ανάλογη»(* De Bock κ.α 2007, σελ 125*)*. Μια τέτοια προοπτική στην διδασκαλία θα βοηθούσε αφενός στην εξασθένηση της αντίστασης του γραμμικού προτύπου, και ενδεχομένως στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων από τους μαθητές, ώστε σε κάθε μεταβολή που συναντούν στο μέλλον να είναι σε θέση να κρίνουν έγκαιρα την ορθότητα ή όχι της χρήσης του γραμμικού μοντέλου, που εξ αιτίας των διαισθητικών του ριζών τείνει να προκαταλάβει οποιαδήποτε άλλη λύση. Οι Tirosh, Stavy και Cohen (1998,σελ 1267) επισημαίνουν: *«Σε κάθε περίπτωση, οι εκπαιδευτικοί επιστήμης και μαθηματικών πρέπει να προσπαθήσουν να ωθήσουν τις μεταγνωστικές δεξιότητες των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές πρέπει να ενθαρρυνθούν για να εξετάζουν αυστηρά τις απαντήσεις τους, λαμβάνοντας υπόψη την τυπική τους γνώση».*

Στην κατεύθυνση της ενίσχυσης της ικανότητας των μαθητών να διακρίνουν τις γραμμικές από τις μη γραμμικές καταστάσεις θα βοηθούσε και η συμπερίληψη στα σχολικά εγχειρίδια εναλλακτικών μορφών έργων όπως έργα ταξινόμησης και έργα επινόησης προβλημάτων.

Σε ένα έργο ταξινόμησης, οι μαθητές καλούνται να ομαδοποιήσουν τα προβλήματα σε διαφορετικές κατηγορίες και να εξηγήσουν το κίνητρο για την ομαδοποίησή τους (De Bock, Van Dooren, & Verschaffel, 2005). Η ενασχόλησή τους με έργα, χωρίς την ανάγκη να παραχθούν μόνο οι υπολογιστικές απαντήσεις, ίσως τους υποκινήσει να συμμετέχουν σε ένα ποιοτικά διαφορετικό είδος μαθηματικής σκέψης και να αναπτύξουν μια διάθεση προς τη διαφοροποίηση των γραμμικών και μη γραμμικών προβλημάτων. Η υπόθεση αυτή επιβεβαιώνεται και ερευνητικά, καθώς σε μελέτη των Van Dooren κ.α, η απόδοση των μαθητών σε μη γραμμικά προβλήματα , ήταν καλύτερη, όταν είχαν κληθεί προηγουμένως να τα ταξινομήσουν (Van Dooren κ.α 2010).

Επινόηση προβλήματος σημαίνει ότι οι δάσκαλοι δημιουργούν τις ευκαιρίες ώστε τα παιδιά να παραγάγουν τα δικά τους προβλήματα, αυξάνοντας συμπληρωματικά, την εμπειρία τους στην επίλυση προβλήματος (π.χ., CAI & Hwang, 2002 Ellerton, 1986 Verschaffel κ.α. 2000 , από De Bock κ.α. 2007, σελ 155). Τέτοιοι εναλλακτικοί στόχοι μπορούν να μετατοπίσουν την προσοχή πιο πέρα από τους αριθμητικούς υπολογισμούς, και σε συζητήσεις στην τάξη, σχετικά με τη σύνδεση καθημερινών καταστάσεων και αριθμητικών διαδικασιών.

Από τους ερευνητές γίνεται επίσης λόγος για την ανάγκη έμφασης της διδασκαλίας στην έννοια της *διάστασης (dimentionality).* Τι σημαίνουν δηλαδή οι διαφορετικές διαστάσεις ενός γεωμετρικού σχήματος και πώς αυτές συμπεριφέρονται κάτω από τις διαδικασίες της διεύρυνσης και της σμίκρυνσης; Όπως δηλώνεται από τον Freudenthal*: «οι τύποι για την περίμετρο και το εμβαδόν του κύκλου όπως και για το εμβαδόν και τον όγκο της σφαίρας επισκιάζονται διδακτικά και ουσιαστικά, από τη γνώση για τη συμπεριφορά τους κάτω από τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση, η οποία συνιστά έναν μεγάλο τομέα που δεν καλύπτεται από τους τύπους».* (Freudenthal 1983 από De Bock κ.α. 2007, σελ 158) Η μέχρι τώρα αντιμετώπιση της προοπτικής αυτής μέσα από την διδασκαλία της ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων φαίνεται να είναι ανεπαρκής μια και περιορίζεται σε εφαρμογή έτοιμων συμπερασμάτων, χωρίς να δίνει έμφαση στην προέλευσή τους. Οι De Bock κ.α προτείνουν πως αυτή η έμφαση θα μπορούσε να υποστηριχθεί διδακτικά με την εξέταση αυτών των διαδικασιών μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις (γραφικές παραστάσεις, τύπους, σχέδια, και πίνακες). Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί, αντιπαραβάλλοντας τις εικονικές αναπαραστάσεις με τους τύπους και τους υπολογισμούς, και συμπεριλαμβάνοντας δραστηριότητες με εκτίμηση εμβαδών και όγκων, όχι μόνο κανονικών, αλλά και μη κανονικών σχημάτων που έχουν υποστεί μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Υποστηρίζουν επίσης ότι θα ήταν σημαντικό το να συζητηθούν οι περιορισμοί στο να ισχύσουν οι μαθηματικές ιδέες στην φυσική και βιολογική πραγματικότητα (Haldane, 1928 Thompson, 1961 αναφορά από De Bock κ.α 2007, σελ 159).

Μια δεύτερη ομάδα προτάσεων, έχει να κάνει με την γενικότερη βελτίωση της στάσης και της επίδοσης των μαθητών, κατά την επίλυση λεκτικών προβλημάτων.

Στοχεύουν στην αντιμετώπιση λανθασμένων στάσεων και πεποιθήσεων που έχουν παρατηρηθεί ιδιαίτερα σε μαθητές της στοιχειώδους εκπαίδευσης. Τέτοιες πεποιθήσεις είναι πως τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να λυθούν μόνο με εφαρμογή μιας ή δυο απλών πράξεων, όλα τα δεδομένα και μόνον αυτά πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά την λύση τους, κάθε πρόβλημα έχει μοναδική ακριβή αριθμητική απάντηση, και πως ο ρόλος ενός σχήματος δεν είναι ουσιαστικός στην επίλυση του προβλήματος. Παραθέτουμε μερικές τέτοιες συστάσεις από τους Verschaffel, η Greer, και De Corte, από De Bock κ.α. 2007, σελ 154)

• ***«Εξοβελίστε την προσδοκία πως οποιοδήποτε λεκτικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί μόνο με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, ή από έναν απλό συνδυασμό αυτών των πράξεων» .***

Ένα επεξηγηματικό παράδειγμα αυτής της άποψης, είναι το μη γραμμικό *«πρόβλημα των χειραψιών»* (πόσες χειραψίες θα γίνουν σε ένα σημείο συνάντησης εάν καθένας από τους φιλοξενουμένους χαιρετηθεί μια φορά με καθ έναν από τους άλλους;)

Αν και το πρόβλημα αυτό εμπεριέχει μια μάλλον σύνθετη μη γραμμική μαθηματική δομή, ακόμη και οι μαθητές μέσων τάξεων του σχολείου μπορούν να το προσεγγίσουν, διερευνώντας π.χ συνεργατικά τις ευκολότερες εκφράσεις του (για ν = 3, 4,…), κάνοντας σχέδια ή άλλους σχηματισμούς, κ.λ.π.

• «***Αποβάλετε από τα σχολικά εγχειρίδια τα «παραθυράκια» που επιτρέπουν σε επιφανειακές στρατηγικές λύσεων να είναι επιτυχείς».*** Σε περιπτώσεις που ένα συγκεκριμένο σχήμα διατύπωσης (π.χ. σχήμα προσδιορισμού άγνωστης τιμής (missing value)) τείνει να αποσπάσει μια συγκεκριμένη στρατηγική επίλυσης προβλήματος, θα ωφελούσε οι μαθητές να έρθουν αντιμέτωποι αφενός με προβλήματα που διατυπώνονται με αυτή την δομή αλλά έχουν διαφορετικό μαθηματικό περιεχόμενο, και αφετέρου με προβλήματα ίδιου περιεχομένου, διατυπωμένα όμως με διαφορετικά σχήματα .

• «***Διαφοροποιείστε τα προβλήματα έτσι ώστε να μην δημιουργείται η πεποίθηση πως πρέπει όλα τα δεδομένα και μόνον αυτά να χρησιμοποιηθούν για τη λύση. Όπως και στην πραγματική ζωή, οι μαθητές πρέπει να μάθουν να επιλέγουν***

τα στοιχεία που απαιτούνται για να λύσουν ένα πρόβλημα, καθώς και να αναζητούν αυτά που τους λείπουν».

Από αυτή την άποψη, θα μπορούσε να σκεφτεί κάποιος έργα ενσωματωμένα σε ένα πλούσιο πλαίσιο, με πολλά επιμέρους ερωτήματα. Ο μαθητής για να απαντήσει σε καθένα από αυτά θα πρέπει να αναζητήσει τα στοιχεία που του χρειάζονται είτε μέσα από την εκφώνηση, ή κάνοντας τις απαραίτητες μετρήσεις, υπολογισμούς κ.α.

• «***Απομακρύνετε εκείνα τα λεκτικά προβλήματα στα οποία η κατάσταση, οι αριθμοί, τα ερωτήματα δεν αντιστοιχούν στην πραγματική ζωή, ή εκείνα για τα οποία το μαθηματικό μοντέλο που αναμένεται να βρουν και να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές, δεν ταιριάζει απόλυτα με την κατάσταση που περιγράφεται στην διατύπωση του προβλήματος».*** Οι μαθητές μέσα από τέτοιους στόχους μαθαίνουν σιωπηρά να θέτουν την πραγματικότητα σε αγκύλες στην τάξη μαθηματικών!

• «***Νομιμοποιείστε και άλλες μορφές απάντησης πέρα από τις ακριβείς αριθμητικές απαντήσεις»,*** π.χ. εκτιμήσεις, σχόλια, σχέδια, γραφικές παραστάσεις, κ.λ.π. Αυτή η σύσταση ταιριάζει με το αίτημα πολλών μαθηματικών εκπαιδευτών να δοθεί βάρος στην διαδικασία και όχι μόνο στο αποτέλεσμα μιας δραστηριότητας επίλυσης προβλήματος. Μπορεί επίσης να υποκινήσει τους μαθητές στο να αυξήσουν το ρεπερτόριο των στρατηγικών και των προσεγγίσεων τους, κατά την επίλυση προβλήματος

• «***Κατά την εστίαση ειδικά στη διδασκαλία και την εκμάθηση της αναλογίας, τα εγχειρίδια των δημοτικών σχολείων πρέπει να περιέχουν μεγαλύτερη ποικιλία τόσο στις δραστηριότητες όσο και στα παραδείγματα που περιέχουν».*** Ο χειρισμός των παραδειγμάτων καθώς ο τρόπος που οι μαθητές μαθαίνουν επαγωγικά από τα παραδείγματα, έχει συζητηθεί από τους συμπεριφοριστές ψυχολόγους από τον προηγούμενο αιώνα (π.χ., Thorndike 1924 αναφορά από De Bock κ.α. 2007) και η χρήση των παραδειγμάτων την διδασκαλία και την εκμάθηση αποσπούσε και συνεχίζει να αποσπά μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Πολλές από τις προηγούμενες προτάσεις των Verschaffel, Greer, και De Corte (2002) εντάσσονται σε μια γενικότερη προσέγγιση στην μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών, μέσα από μια γνήσια προοπτική μοντελοποίησης (Blum και λοιποί., 2002 Lesh & Lehrer, 2003 Εθνικό Συμβούλιο των δασκάλων των μαθηματικών 1989, 2000 Verschaffel κ.α 2000, από De Bock κ.α. 2007, σελ 159). Οι καθημερινές καταστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να αναπτύξουν την δυνατότητα των μαθητών να αναγνωρίσουν εύκολα τα μαθηματικά πρότυπα και να εφαρμόσουν με ευχέρεια τις σχετικές στρατηγικές τους. Ταυτόχρονα όμως είναι απαιτούμενη η ικανότητα από τους μαθητές να ελέγχουν τον βαθμό συσχετισμού των αυθεντικών πραγματικών καταστάσεων με τα μαθηματικά πρότυπα χρησιμοποιούν, ώστε να αποφευχθεί μια υπεραπλουστευμένη άποψη του κόσμου που πολλές υποτιθέμενες εφαρμογές των μαθηματικών τείνουν να καθιερώσουν. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσα από μια σειρά κύκλων μοντελοποίησης όπου τα δεδομένα, οι στόχοι, και οι προτεινόμενες λύσεις πρέπει συνεχώς να επανεξετάζονται και να αξιολογούνται εκ νέου (De Bock κ.α. 2007, σελ 160).

Ίσως πολλές από τις επιβλαβείς συνέπειες της εκπαιδευτικής πρακτικής, σχετίζονται με την συνήθη φυσική ροή της διδασκαλίας από το απλό στο σύνθετο (Greer 2010). Για τον λόγο αυτό θα ήταν σκόπιμο να είμαστε ενήμεροι για τον κίνδυνο που ελλοχεύει πίσω από την χρήση μιας τεχνικής του παρόντος, στο μέλλον. Ένας τρόπος διδασκαλίας που θα λαμβάνει υπ όψη και θα προετοιμάζει τις φάσεις που θα ακολουθήσουν, θα μπορούσε ίσως να αποτρέψει κάποια από τα αρνητικά αυτά αποτελέσματα.

Μέσα από όλα τα προαναφερθέντα σε αυτήν την εργασία, γίνεται φανερό πως παρά την διαισθητική διάσταση του φαινομένου εμμονής στις γραμμικές λύσεις, και την σύνδεσή του με μια ιδιαιτερότητα του ανθρώπινου νου, πολλά οφέλη μπορούν να επιτευχθούν μέσα από την βελτίωση της εκπαιδευτικής πρακτικής. Αυτή μπορεί να συμβάλει γενικότερα στην ωριμότερη στάση των μαθητών κατά την αντιμετώπιση των μαθηματικών προβλημάτων. Κανείς δεν μπορεί να ισχυριστεί πως κάποια από τις προηγούμενες προτάσεις μπορεί να αποτελέσει πανάκεια για την εξάλειψη του φαινομένου. Η αποτελεσματικότητα κάθε μιας από αυτές, οφείλει να αξιολογηθεί από εμπειρικές μελέτες. Το πιθανότερο είναι πως ακόμη και μετά από μια πλήρη ενσωμάτωση των παραπάνω σε μια διδασκαλία για την αναλογία, οι μαθητές θα συνεχίσουν να κάνουν γραμμικά λάθη. Όμως μια προοπτική στην διδασκαλία των μαθηματικών η οποία λαμβάνοντας υπ΄ όψιν της τα ερευνητικά ευρήματα, θα εστιάζει σε περιοχές που έχουν καταγραφεί πολλά λάθη, μόνο θετικά αποτελέσματα μπορεί να έχει. Ίσως το σημαντικότερο όπλο για τον περιορισμό της διολίσθησης της σκέψης σε γραμμικά μονοπάτια, όπως και πολλών άλλων λαθών, είναι η ανάπτυξη από τους μαθητές της συνήθειας για αμφισβήτηση και έλεγχο. Πρέπει σε κάθε περίπτωση που καταπιάνονται με μαθηματικά προβλήματα, να έχουν κατά νου πως η πρώτη σκέψη δεν είναι πάντα η σωστή και απαιτείται επανέλεγχός της, ειδικά σε περιοχές για τις οποίες είναι ενημερωμένοι πως υπάρχει μεγάλη πιθανότητα λάθους. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων μιας εκπαίδευσης με στόχο την ανάπτυξη μιας ωριμότερης μεταγνωστικής στάσης, με κάποια διδασκαλία που επικεντρώνεται στην διάκριση των γραμμικών από τις μη γραμμικές καταστάσεις, θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο επόμενων ερευνών.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching: Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*, 404–407.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159–178). New York: Macmillan.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002a) Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 311–334.

De Bock, D., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Task design and small-scale experiment. In H. L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 97–102). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

De Bock, D., Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2001). Secondary school pupils' improper proportional reasoning: An in-depth study on the nature and persistence of pupils' errors. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 321–328).

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D Verschaffel, L. & Janssens, D. (2007). *'The Illusion of Linearity From Analysis to Improvement' (Mathematics Education Library).* New York: Springer..

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 65–83.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning, 4*, 65–89.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, *13*(4), 441–463.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Masui, C. (2004). The CLIA-model: A framework for designing powerful learning environments for thinking and problem solving. *European Journal for Psychology of Education, 19*, 365–384.

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about non-linear growth. *Child Development*, *78*, 296–308.

Ebersbach M, Van Dooren Goudriaan M, Verschaffel (2010) Discriminating Non-linearity from Linearity: Its Cognitive Foundations in Five-Year-Olds *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–16,

Esteley, C., Villarreal, M., & Alagia, H. (2004). Extending linear models to non-linear contexts: An in-depth study about two university students' mathematical productions. In M. J. Hones & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 343–350). Bergen, Norway.

Esteley C,. Villarreal M,. Alagia H (2010) The Overgeneralization of Linear Models among University Students' Mathematical Productions: A Long-Term Study *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–23

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of functions. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad(Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 351–358). Bergen, Norway.

Evans, J. S. B. T. (2003). In two minds: Dual process accounts of reasoning. *Trends in Cognitive Sciences, 7*, 454–459.

Fernández C, linares L & Valls J (2008) . Implicative analysis of strategies in solving nonproportional problems *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, and the XX North American Chapter Vol. 3, pp. 1-8. Morelia, Michoacán, México: PME

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 11–50.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation, 6*(1), 24–58.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Greer, B. (1993). The mathematical modelling perspective on word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 239–250.

Greer, B. (1997). Modelling reality in the classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293–307.

Greer B (2010). Overview of the Papers: Why is Linear Thinking so Dominant? *Mathematical Thinking and Learning,* 12: 1–7.

Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child Development, 41*, 55–70.

Hadjidemetriou C, Williams J (2010). The Linearity Prototype for Graphs: Cognitive and Sociocultural Perspectives *Mathematical Thinking and Learning,* 12: 1–18.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J.Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235–287). New York: State University of New York Press.

Lamprianou, I., & Lamprianou, T. A. (2002). The nature of pupils' probabilistic thinking in primary school pupils in Cyprus. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 273–280). Norwich, U.K.

Mason, L. (2001). Introduction to special issue "Instructional practices for conceptual change in science domains". *Learning and Instruction, 11*, 259–263.

Modestou, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: The case of area and volume of rectangular figures. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics.*

Modestou, M & Gagatsis, A (2006) *Can* the spontaneous and uncritical application of the linear model be questioned? *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4 169.*

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students’ improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of “linearity.” *Educational Psychology*, *27* (1), 75–92.

Μοδέστου Μ. (2007). Μαθηματική αναλογική σκέψη στο Δημοτικό και Γυμνάσιο: Ένα πολυδιάστατο γνωστικό και μεταγνωστικό μοντέλο. *Προβλήματα Μάθησης Των Μαθηματικών Κατά τη Μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο 81- 102*

Modestou M, Elia I, Gagatsis A, Spanoudes G (2007) Problem solving in geometry the case of the illusion of proportionality . *Proceedings of CERME 5*

Modestou M Gagatsis A. (2010) Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–18

National Council of Teachers of Mathematics. (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Rouche, N. (2001, November). *La linéarité dans l’enseignement des mathématiques* [Linearity in the teaching of mathematics]. Exposé et discussion, Mons, Belgium.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164.

Tirosh, D., & Stavy,R Cohen S.(1998). Cognitive conflict and intuitive rules *Sci. educat., 1998, vol. 20, No. 10, 1257-1269*

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students’ reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 51–66.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999b). Intuitive rules and comparison tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(3), 179–194.

Van Dooren, W., De Bock, D., De Bolle, E., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003a). The illusion of linearity: The role of direct versus indirect perimeter and area measures. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2*, 1–18.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003b). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 113– 138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57–86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14,* 485–501.

Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D., & Verschaffel, L. (2004). Challenging the predictive power of intuitive rules: A replication and extension study on the impact of 'More A–more B' and 'Same A–same B'. *Educational Studies in Mathematics, 56*, 179–207.

Van Dooren, De Bock, Janssens, Verschaffel (2008) The Linear Imperative:An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 39*

Van Dooren, De Bock, Vleugels, Verschaffel (2010) Just Answering . . . or Thinking? Contrasting Pupils' Solutions and Classifications of Missing-Value Word Problems *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–16.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic modelling in the elementary school. A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 577–601.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*, 273–294.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Design and evaluation of a learning environment for mathematical modelling and problem solving in upper elementary school children. *Mathematical Thinking and Learning, 1,* 195–229.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lowyck J., Dhert S., & Vandeput, L. (2000). Supporting mathematical problem solving and posing in upper elementary school children by means of Knowledge Forum. (Deliverable of project No. 2017 CL-Net: *Computer Supported Collaborative Learning Networks in Primary and Secondary Education.*) Leuven, Belgium: Center for Instructional Psychology and Technology, University of Leuven.

Villarreal, M., Esteley, C., & Alagia, H. (2004). University students' extension of linear models to non-linear situations. In M. J. Høines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 364). Bergen, Norway.

Vlahovic-Stetic, V. (1999). Word-problem solving as a function of problem type, situational context and drawing. *Studia Psychologica*, *41*(1), 49–62.

Vlahovic-Stetic, Bernardic, Rajter (2010) Illusion of Linearity in Geometry: Effect in Multiple-Choice Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–14

Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., & Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction*, *11*, 381–419.

Vosniadou, S. (2003). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning.In G. M. Sinatra, & P. R. Pintrich(Eds.), Intentional conceptual change (pp. 377–406). Lawrence Erlbaum Associates: London

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΧΟΛΕΙΟ :……………………………………………………………………
ΤΜΗΜΑ:……………………………………………………………………………
ΦΥΛΟ:………………………ΑΓΟΡΙ………………………ΚΟΡΙΤΣΙ………

ΜΕΡΟΣ 1^o

Να σημειώσετε την σωστή απάντηση σε καθ' ένα από τα επόμενα προβλήματα δικαιολογώντας την επιλογή σας στον κενό χώρο που υπάρχει.

1) Ένας κηπουρός φροντίζει δυο τετράγωνους κήπους. Η πλευρά του δεύτερου κήπου είναι τριπλάσια σε μήκος από την πλευρά του πρώτου.
   α) Για να περιφράξει τον πρώτο κήπο, ο κηπουρός χρειάστηκε 60 ξύλινους πασσάλους .
   Πόσους πασσάλους θα χρειαστεί ώστε να περιφράξει με τον ίδιο τρόπο τον δεύτερο κήπο;

Α. 240 **Β**. 360 **Γ**. 180 **Δ.** Άλλο:……...

Εξηγήστε γιατί: ……………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..

β) Αν ο κηπουρός χρειάστηκε περίπου 400 γραμμάρια σπόρου για να φυτέψει γκαζόν στον πρώτο κήπο, πόσα περίπου γραμμάρια σπόρου θα χρειαστεί στον κήπο με την τριπλάσια πλευρά;

Α. περίπου 1000γρ **Β**. περίπου 3600γρ **Γ**. περίπου 1200 γρ **Δ.** Άλλο:…………

Εξηγήστε γιατί: ……………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..

2) Μια ένωση καταναλωτών παρατήρησε ότι η τιμή ενός προϊόντος που παρέμενε σταθερή για πολλά χρόνια, αυξάνεται τώρα κάθε έτος κατά 20% σε σχέση με το προηγούμενο. Αν συνεχίσει με τον ίδιο ρυθμό, τότε η τιμή θα έχει διπλασιαστεί σε σχέση με την αρχική

   Α: σε λιγότερα από 5 χρόνια
   Β: ακριβώς σε 5 χρόνια
   Γ: σε περισσότερα από 5 χρόνια

Εξηγήστε γιατί: ……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

3) Μια πιτσαρία προσφέρει δυο μεγέθη πίτσας κυκλικού σχήματος , ώστε το μεγάλο μέγεθος να έχει διπλάσια ακτίνα του μικρού. Ο Πέτρος αγόρασε 2 μικρές πίτσες. Η Μαρία αγόρασε μία μεγάλη. Αν και η τιμή του μεγάλου είναι διπλάσια της τιμής του μικρού τότε:

   α) Η αγορά του Πέτρου είναι πιο συμφέρουσα.
   β) Η αγορά της Μαρίας είναι πιο συμφέρουσα.
   γ) Η αγορά του Πέτρου και της Μαρίας συμφέρουν εξ ίσου

Εξηγήστε γιατί: ……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

4) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ισόπλευρα. Η περίμετρος του ΑΒΓ είναι διπλάσια της περιμέτρου του ΚΛΜ. Τότε:

α) Το εμβαδό του ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του ΚΛΜ	Σ	Λ
β) Το ύψος του ΚΛΜ είναι το μισό του ύψος του ΑΒΓ	Σ	Λ

Εξηγήστε γιατί: ……………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

ΜΕΡΟΣ 2^{Ο}

5) Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι α.
   α) Η περίμετρός του είναι
      Α. 2α cm **Β**. 4α **Γ**. $α^2$ **Δ.** Άλλο:……..
   β) Το εμβαδόν του είναι
      Α. 4α cm^2 **Β**. $2α^2$ cm^2 **Γ**. $α^2$ cm^2 **Δ.** Άλλο:……..

6) Η ακτίνα ενός κύκλου είναι ρ.
   α) Το μήκος του είναι
      Α. 2π **Β**. 2πρ **Γ**. $2πρ^2$ **Δ**. Άλλο:……..
   β) Το εμβαδόν του είναι
      Α. $2π^2$ **Β**. $πρ^2$ **Γ**. $4πρ^2$ **Δ.** Άλλο:…….

7) Αν η πλευρά ενός τετραγώνου μειωθεί στο μισό, τότε
   α) η περίμετρός του θα μειωθεί στο μισό Σ Λ
   β) το εμβαδόν του θα μειωθεί στο μισό Σ Λ

8) Δεκαπλασιάζοντας την ακτίνα ενός κύκλου
   α) δεκαπλασιάζεται και το μήκος του Σ Λ
   β) δεκαπλασιάζεται και το εμβαδόν του Σ Λ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΕΙΟ :………………………………………………………………………
ΤΜΗΜΑ:…………………………………………………………………………
ΦΥΛΟ:………………………ΑΓΟΡΙ………………………ΚΟΡΙΤΣΙ……….

ΜΕΡΟΣ 1^{ο}

Να σημειώσετε την σωστή απάντηση σε καθ΄ ένα από τα επόμενα προβλήματα ,δικαιολογώντας την επιλογή σας στον κενό χώρο που υπάρχει.

1) Ένας κηπουρός φροντίζει δυο τετράγωνους κήπους. Η πλευρά του δεύτερου κήπου είναι τριπλάσια σε μήκος από την πλευρά του πρώτου.
   α) Για να περιφράξει τον πρώτο κήπο, ο κηπουρός χρειάστηκε 60 ξύλινους πασσάλους .
   Πόσους πασσάλους θα χρειαστεί ώστε να περιφράξει με τον ίδιο τρόπο τον δεύτερο κήπο;

Α. 240 **Β**. 360 **Γ**. 180 **Δ.** Άλλο:……...

Εξηγήστε γιατί: ……………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..

β) Αν ο κηπουρός χρειάστηκε περίπου 400 γραμμάρια σπόρου για να φυτέψει γκαζόν στον πρώτο κήπο, πόσα περίπου γραμμάρια σπόρου θα χρειαστεί στον κήπο με την τριπλάσια πλευρά;

Α. περίπου 1000γρ **Β**. περίπου 3600γρ **Γ**. περίπου 1200 γρ **Δ**. Άλλο:…………

Εξηγήστε γιατί: ……………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………..

2) Μια ένωση καταναλωτών παρατήρησε ότι η τιμή ενός προϊόντος που παρέμενε σταθερή για πολλά χρόνια, αυξάνεται τώρα κάθε έτος, κατά 20% σε σχέση με το προηγούμενο. Αν συνεχίσει με τον ίδιο ρυθμό, τότε η τιμή θα έχει διπλασιαστεί σε σχέση με την αρχική

   Α: σε λιγότερα από 5 χρόνια

   Β: ακριβώς σε 5 χρόνια

   Γ: σε περισσότερα από 5 χρόνια

Εξηγήστε γιατί: ………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

3) Μια πιτσαρία προσφέρει δυο μεγέθη πίτσας κυκλικού σχήματος , ώστε το μεγάλο μέγεθος να έχει διπλάσια ακτίνα του μικρού. Ο Πέτρος αγόρασε 2 μικρές πίτσες. Η Μαρία αγόρασε μία μεγάλη. Αν και η τιμή του μεγάλου είναι διπλάσια της τιμής του μικρού τότε:

   α) Η αγορά του Πέτρου είναι πιο συμφέρουσα.

   β) Η αγορά της Μαρίας είναι πιο συμφέρουσα.

   γ) Η αγορά του Πέτρου και της Μαρίας συμφέρουν εξ ίσου

Εξηγήστε γιατί: ………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

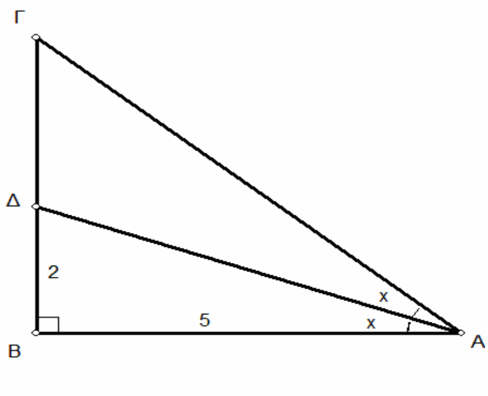
…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

4) Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α .



Ποια από τις επόμενες τιμές αντιστοιχεί στην εφΑ;

Υπενθύμιση: *Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς, προς την προσκείμενη κάθετη.*

Α. $\frac{5}{4}$ **Β.** $\frac{4}{5}$ **Γ.** $\frac{20}{21}$ **Δ.** Άλλη τιμή

Εξηγήστε

γιατί: ……………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

5) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι ισόπλευρα. Η πλευρά του ΑΒΓ είναι διπλάσια της πλευράς του ΚΛΜ. Τότε

α) Το εμβαδό του ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του ΚΛΜ Σ Λ
β) Το ύψος του ΚΛΜ είναι το μισό του ύψος του ΑΒΓ Σ Λ

Εξηγήστε γιατί: ………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………

6) Στο μάθημα της άλγεβρας της Β Λυκείου δόθηκε στους μαθητές, από τον καθηγητή των μαθηματικών η επόμενη άσκηση.

« *Αν* ***log2=α*** *και* ***log3=β****, να εκφραστούν συναρτήσει των* ***α,β*** *οι λογάριθμοι*
*Α***:** ***log5*** *Β :* ***log9*** *και* *Γ:* ***log20***»

Ο Γιώργος απάντησε ως εξής:

Α. ***log5*** $= log\ (3 + 2) =$ $\boldsymbol{\alpha+\beta}$
Β. ***log9*** $= log\ 3^2 = 2\ log3 =$ $\boldsymbol{2\beta}$
Γ ***log20*** $= log(6.3 + 2) =$ $\boldsymbol{6\beta + \alpha}$

Σχολιάστε κάθε μια από τις λύσεις του Γιώργου

	ΣΥΜΦΩΝΩ	**ΔΙΑΦΩΝΩ**
Α		
Β		
Γ		

Στην περίπτωση που διαφωνείτε με κάποια (κάποιες) απ’ αυτές , δικαιολογείστε για ποιόν λόγο και αν μπορείτε προτείνετε εσείς μια λύση
…………………………………………………………………………………………….
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..

ΜΕΡΟΣ $2^{Ο}$

7) Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι α cm.
α) Η περίμετρός του είναι
Α. 2α cm **Β**. 4α cm **Γ**. $α^2$ cm **Δ**. Άλλο:……..
β) Το εμβαδόν του είναι
Α. 4α cm^2 **Β**. $2α^2$ cm^2 **Γ**. $α^2$ cm^2 **Δ**. Άλλο:……..

8) Η ακτίνα ενός κύκλου είναι ρ.
α) Το μήκος του είναι
Α. 2π **Β**. 2πρ **Γ**. $2πρ^2$ **Δ**. Άλλο:……..
β) Το εμβαδόν του είναι
Α. $2π^2$ **Β**. $πρ^2$ **Γ**. $4πρ^2$ **Δ**. Άλλο:…….

9) Αν η πλευρά ενός τετραγώνου μειωθεί στο μισό, τότε
α) η περίμετρός του θα μειωθεί στο μισό_________Σ_______Λ
β) το εμβαδόν του θα μειωθεί στο μισό__________Σ_______Λ

10) Δεκαπλασιάζοντας την ακτίνα ενός κύκλου
α) δεκαπλασιάζεται και το εμβαδόν του Σ Λ
β) δεκαπλασιάζεται και το μήκος του Σ Λ

11) Η εφ2α ισούται με:

Α. 2.εφα **Β**. $\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$ **Γ**. Άλλη τιμή

12) Η παράσταση $\log(x \cdot y)$ όπου $x>0$, $y>0$ ισούται με :

Α. $\log(x + y)$ **Β**. $\log x+\log y$ **Γ**. $\log x \cdot \log y$ **Δ**. Άλλη τιμή

13) Η παράσταση $κ \cdot \log x$ όπου $x>0$, $κ \in R$ ισούται με :

Α. $\log(κ \cdot x)$ **Β**. $\log x^{κ}$ **Γ** . Άλλη τιμή