

Άσκηση

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό $\alpha = 5 + 2\sqrt{6}$.

- A.** Να δείξετε ότι ο αντίστροφος του α είναι ο αριθμός $5 - 2\sqrt{6}$.
- B.** Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ είναι φυσικός αριθμός.
- Γ.** Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 98$.

Απαντήσεις

- A.** Αρκεί να δείξουμε ότι οι δυο αριθμοί έχουν γινόμενο 1. Πράγματι:

$$\begin{aligned}(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) &= 5^2 - (2\sqrt{6})^2 \\ &= 25 - 4 \cdot 6 \\ &= 25 - 24 = 1\end{aligned}$$

- B.** Αφού ο αντίστροφος του $\alpha = 5 + 2\sqrt{6}$ είναι ο $\frac{1}{\alpha} = 5 - 2\sqrt{6}$, ισχύει:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10 \text{ που είναι φυσικός.}$$

- Γ.**

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = (5 + 2\sqrt{6})^2 + (5 - 2\sqrt{6})^2$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 25 + 20\sqrt{6} + 24 + 25 - 20\sqrt{6} + 24$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = 98$$