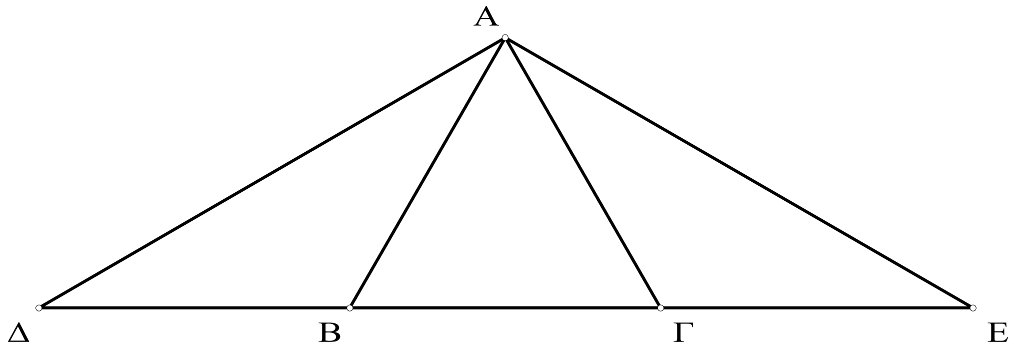
Άσκηση

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς x. Προεκτείνουμε την πλευρά του ΒΓ και προς τα δυο μέρη και παίρνουμε ίσα τμήματα ΒΔ = ΓΕ = x.



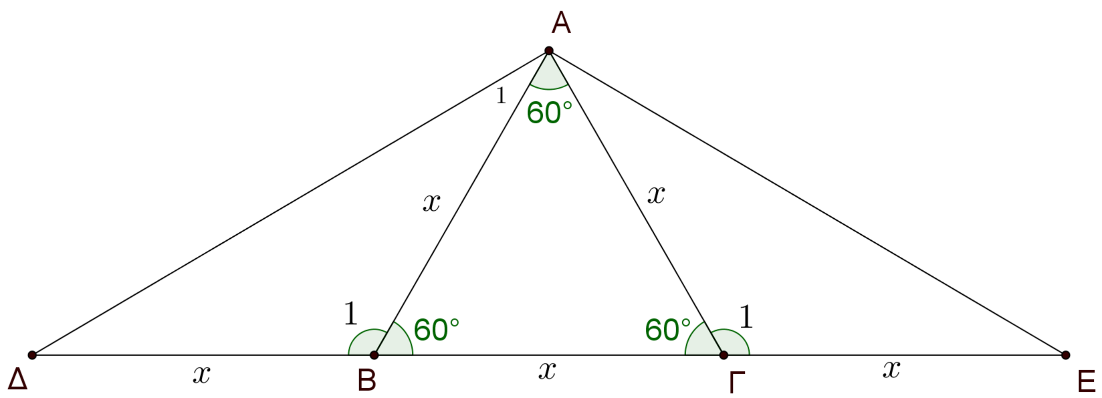
Α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ και να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

Γ. Αν το μήκος του τμήματος ΑΔ είναι $\sqrt{x+2}$, να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Απαντήσεις

Α. Για να δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές αρκεί να δείξουμε ότι ΑΔ = ΑΕ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Έχουν ΑΒ = ΑΓ = x και ΒΔ = ΓΕ = x και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 120° = 180° - 60°$. Συνεπώς, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα (Π-Γ-Π) και ΑΔ = ΑΕ.



Β. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΒΔ = x) με $\hat{B}_1 = 120°$ οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Delta} = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$, συνεπώς η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma = 60° + 30° = 90°$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

Γ. Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο με πλευρές ΑΓ = x, ΔΓ = 2x και $ΑΔ = \sqrt{x+2}$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΔΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2$$
$$(2x)^2 = x^2 + (\sqrt{x+2})^2$$
$$4x^2 = x^2 + x + 2$$
$$\underline{3x^2 - x - 2 = 0}$$
$$\alpha = 3,\ \beta = -1,\ \gamma = -2$$
$$\boxed{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot(-2)$$
$$\Delta = 1 + 24 = 25$$
$$\text{Οπότε } \boxed{x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 3}$$
$$x = \frac{1+5}{6} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1-5}{6}$$
$$\boxed{x = 1} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{4}{6}$$

Επειδή όμως το x είναι μήκος πρέπει να είναι θετικός αριθμός οπότε $x = 1$ και η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι Π = 3.