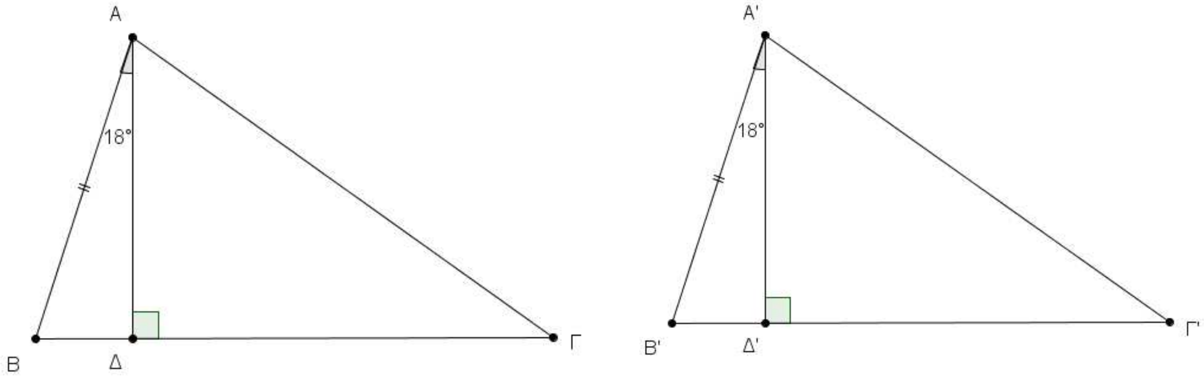
Άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ισοσκελή (με ΓΑ = ΓΒ και Γ΄Α΄ = Γ΄Β΄) και έχουν ΑΒ = Α΄Β΄. Έχουμε φέρει τα ύψη τους ΑΔ και Α΄Δ΄ και ισχύει: $\mathrm{B\hat{A}\Delta = B'\hat{A}'\Delta' = 18^\circ}$.



Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄είναι ίσα και ότι $\mathrm{\hat{B} = \hat{B}'}$.

Β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

Γ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΓ.

Απαντήσεις

Α. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄. Έχουν: ΑΒ = Α΄Β΄, είναι ορθογώνια ($\mathrm{\hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90^\circ}$) και $\mathrm{B\hat{A}\Delta = B'\hat{A}'\Delta' = 18^\circ}$, οπότε από κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ είναι ίσα και άρα $\mathrm{\hat{B} = \hat{B}'}$.

Β. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (με ΓΑ = ΓΒ) ισχύει ότι οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες είναι ίσες, άρα $\mathrm{\hat{B} = B\hat{A}\Gamma}$. Ομοίως για το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄, οπότε $\mathrm{\hat{B}' = B'\hat{A}'\Gamma'}$ και λόγω του ερωτήματος Α) ισχύει $\mathrm{\hat{B} = \hat{B}'}$ συνεπώς: $\mathrm{\hat{B} = B\hat{A}\Gamma = \hat{B}' = B'\hat{A}'\Gamma'}$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Έχουν:

$\mathrm{\hat{B} = B\hat{A}\Gamma = \hat{B}' = B'\hat{A}'\Gamma'}$ και ΑΒ = Α΄Β΄, οπότε από το κριτήριο Γ-Π-Γ είναι ίσα.

Γ. Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\mathrm{B\hat{A}\Delta = 18^\circ}$ και $\mathrm{\hat{\Delta} = 90^\circ}$, άρα $\mathrm{\hat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ}$.
Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές $\mathrm{\hat{B} = \hat{A} = 72^\circ}$, οπότε $\mathrm{\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{A} = 36^\circ}$.
Τέλος η γωνία $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta = 72^\circ - 18^\circ = 54^\circ}$. Συνεπώς οι γωνίες του τριγώνου ΑΓΔ είναι: $\mathrm{\hat{\Delta} = 90^\circ}$, $\mathrm{\hat{\Gamma} = 36^\circ}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta = 54^\circ}$.