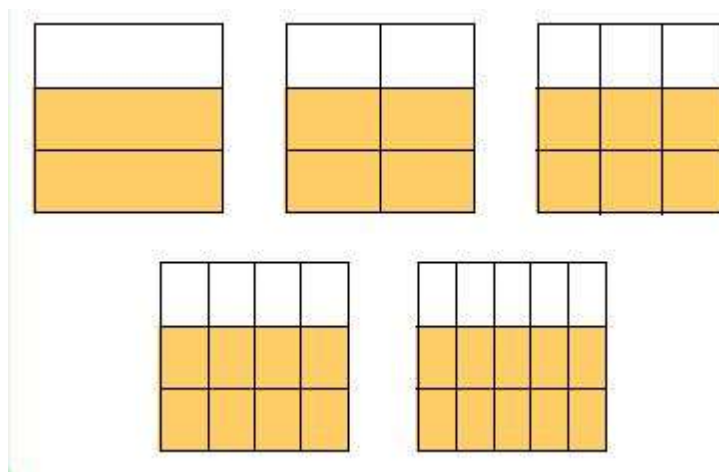


ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Τα παρακάτω πέντε τετράγωνα είναι χωρισμένα αντίστοιχα, σε ίσα μέρη. Προσπάθησε να βρεις για καθεμία περίπτωση το κλάσμα του τετραγώνου που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του; Στη συνέχεια σύγκρινε τα κλάσματα, που θα βρεις μεταξύ τους. Τι παρατηρείς για κάθε κλάσμα που βρήκες;



Απάντηση

Σε κάθε περίπτωση το κλάσμα που αποτελεί το χρωματισμένο μέρος του τετραγώνου είναι: $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}$ αντίστοιχα.

Επειδή όλα τα προηγούμενα κλάσματα εκφράζουν το ίδιο μέρος του τετραγώνου είναι ίσα μεταξύ τους.

Γενικά:

Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός

μεγέθους. Για το λόγο αυτό γράφουμε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Ιδιότητες

1. Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα χιαστί γινόμενα $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$

είναι ίσα. Δηλαδή: Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ τότε $1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$

2. Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο μη μηδενικό φυσικό αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \kappa}{\beta \cdot \kappa}$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$

3. Οι όροι ενός κλάσματος μπορούν να διαιρεθούν με τον ίδιο μη μηδενικό φυσικό

αριθμό και να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha : \kappa}{\beta : \kappa}$

Για παράδειγμα: $\frac{5}{10} = \frac{5 : 5}{10 : 5} = \frac{1}{2}$

- Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση** του κλάσματος και το αποτέλεσμα της είναι να προκύψει ισοδύναμο κλάσμα με μικρότερους όρους.
- Το κλάσμα εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί λέγεται **ανάγωγο**.

Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται **ομώνυμα** και με διαφορετικό παρονομαστή λέγονται **ετερόνυμα**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσεις ποια από τα κλάσματα είναι ισοδύναμα:

α) $\frac{2}{3}$ και $\frac{18}{27}$

β) $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{2}$

γ) $\frac{7}{8}$ και $\frac{30}{40}$

δ) $\frac{13}{14}$ και $\frac{26}{28}$

Λύση

α) Θα εξετάσουμε αν είναι ίσα τα χιαστί γινόμενα.

Είναι $2 \cdot 27 = 54$ και $3 \cdot 18 = 54$, δηλαδή $2 \cdot 27 = 3 \cdot 18$, άρα $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$

β) Είναι $3 \cdot 2 = 6$ και $4 \cdot 1 = 4$. Επειδή $3 \cdot 2 \neq 4 \cdot 1$ είναι και $\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$

γ) Είναι $7 \cdot 40 = 280$ και $8 \cdot 30 = 240$. Επειδή $7 \cdot 40 \neq 8 \cdot 30$ είναι και $\frac{7}{8} \neq \frac{30}{40}$

δ) Είναι $13 \cdot 28 = 364$ και $14 \cdot 26 = 364$. Επειδή $13 \cdot 28 = 14 \cdot 26$ είναι και $\frac{13}{14} = \frac{26}{28}$

2. Να μετατρέψεις καθένα από τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 100:

α) $\frac{3}{4}$

β) $\frac{8}{5}$

γ) $\frac{60}{75}$

Λύση

α) Επειδή $100 : 4 = 25$ πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το 25 και έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100}$$

β) Επειδή $100 : 5 = 20$, έχουμε: $\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{160}{100}$

γ) Επειδή $100 : 75 = 1,333\dots$, δεν είναι σαφές με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε. Γι αυτό θα απλοποιήσουμε το κλάσμα και έτσι θα χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο ισοδύναμό του.

Ισοδύναμα κλάσματα

$$\text{Είναι } \frac{60}{75} = \frac{60:3}{75:3} = \frac{20}{25}$$

$$\text{Επειδή τώρα } 100:25=4, \text{ έχουμε: } \frac{20}{25} = \frac{20 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{80}{100}, \text{ άρα } \frac{60}{75} = \frac{80}{100}$$

3. Να μετατρέψεις τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 3:

α) $\frac{10}{6}$

β) $\frac{50}{30}$

γ) $\frac{18}{27}$

Λύση

α) $\frac{10}{6} = \frac{10:2}{6:2} = \frac{5}{3}$

β) $\frac{50}{30} = \frac{50:10}{30:10} = \frac{5}{3}$

γ) $\frac{18}{27} = \frac{18:9}{27:9} = \frac{2}{3}$

4. Να μετατρέψεις το κλάσμα $\frac{2}{3}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή:

α) 6

β) 15

Λύση

α) Επειδή $6:3=2$, είναι: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$

β) Επειδή $15:3=5$, είναι: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$

5. Να συμπληρώσεις τα κενά, ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα.

α) $\frac{2}{3} = \frac{22}{\dots}$

β) $\frac{\dots}{5} = \frac{9}{15}$

δ) $\frac{48}{36} = \frac{\dots}{24}$

Λύση

α) Επειδή $22:2=11$ είναι $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{22}{33}$

β) Επειδή $15:5=3$, είναι $\frac{9}{15} = \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}$

γ) Επειδή $36:24=1,5$, είναι: $\frac{48}{36} = \frac{48:1,5}{36:1,5} = \frac{32}{24}$

6. Να βρεις ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ανάγωγα:

α) $\frac{32}{20}$

β) $\frac{15}{14}$

γ) $\frac{51}{16}$

Λύση

Ισοδύναμα κλάσματα

α) Επειδή $\text{ΜΚΔ}(20,32) = 4$, οι όροι του κλάσματος $\frac{32}{20}$, διαιρούνται με το 4, οπότε το κλάσμα δεν είναι ανάγωγο.

β) Επειδή $\text{ΜΚΔ}(14,15) = 1$, το κλάσμα $\frac{15}{14}$ δεν απλοποιείται και είναι ανάγωγο.

γ) Επειδή $\text{ΜΚΔ}(16, 51) = 1$, το κλάσμα $\frac{51}{16}$ δεν απλοποιείται και είναι ανάγωγο.

7. Να γίνουν ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{9}$

β) $\frac{7}{8}$ και $\frac{3}{10}$

γ) $\frac{11}{3}$ και $\frac{7}{12}$

Λύση

α) Επειδή $\text{ΕΚΠ}(5, 9) = 45$, έχουμε: $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{27}{45}$ και $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{35}{45}$

β) Επειδή $\text{ΕΚΠ}(8, 10) = 40$, έχουμε: $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{35}{40}$

γ) Επειδή $\text{ΕΚΠ}(3, 12) = 12$, έχουμε: $\frac{11}{3} = \frac{11 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{44}{12}$ και $\frac{7}{12} = \frac{7}{12}$

8. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$ και $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 3$, να βρείτε τα α, β .

Λύση

Επειδή τα α, β διαιρούνται με το 3, θα είναι πολλαπλάσια του 3.

Επειδή πρέπει $\alpha : 3 = 4$ είναι $\alpha = 4 \cdot 3 = 12$ και επειδή $\beta : 3 = 5$ είναι $\beta = 5 \cdot 3 = 15$

9. Να βρείτε ένα κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{15}{23}$ του οποίου οι όροι να έχουν άθροισμα 228.

Λύση

Επειδή $15 + 23 = 38$, οι όροι του κλάσματος που ψάχνουμε θα είναι πολλαπλάσια του 15 και του 23 αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι $228 : 38 \cong 5$, οπότε δοκιμάζοντας, έχουμε:

$$\frac{15}{23} = \frac{15 \cdot 5}{23 \cdot 5} = \frac{75}{115} \text{ και } 115 + 75 = 190 \neq 228$$

Επειδή προέκυψε μικρότερο άθροισμα από το 228, δοκιμάζουμε τον πολλαπλασιασμό με το 6 και έχουμε:

$$\frac{15}{23} = \frac{15 \cdot 6}{23 \cdot 6} = \frac{90}{138} \text{ και } 90 + 138 = 228. \text{ Άρα το κλάσμα που αναζητούσαμε είναι το } \frac{90}{138}.$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

10. Να εξετάσετε ποια από τα κλάσματα είναι ισοδύναμα:
α) $\frac{3}{8}$ και $\frac{45}{120}$ **β)** $\frac{7}{9}$ και $\frac{91}{117}$ **γ)** $\frac{8}{9}$ και $\frac{95}{108}$
11. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω κλάσματα είναι ίσα: $\frac{2}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \frac{10}{16}, \frac{15}{18}$.
12. Να μετατρέψετε το καθένα από τα κλάσματα $\frac{4}{9}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{7}{18}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 36.
13. Να βρείτε κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{1}{3}$ και με αριθμητή: **α)** 7 **β)** 18 **γ)** 15
14. Δίνεται το κλάσμα $\frac{4}{5}$.
α) Να βρείτε ισοδύναμο κλάσμα με αριθμητή το 28.
β) Να βρείτε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 40.
15. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα: $\frac{34}{14}, \frac{75}{225}, \frac{168}{192}, \frac{222}{333}$
16. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα:
α) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{24}$ **β)** $\frac{12}{7} = \frac{36}{\dots}$ **γ)** $\frac{\dots}{16} = \frac{15}{12}$
17. Να γίνουν ομώνυμα τα κλάσματα:
α) $\frac{5}{6}$ και $\frac{1}{8}$ **β)** $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}$ και $\frac{7}{10}$ **γ)** $\frac{7}{12}, \frac{15}{30}$ και $\frac{11}{18}$
18. Να βρείτε όλα τα κλάσματα τα οποία είναι ισοδύναμα με το $\frac{8}{400}$ και έχουν παρονομαστή μικρότερο του 200.
19. Να βρείτε όλα τα κλάσματα τα οποία είναι ισοδύναμα με το $\frac{17}{52}$ και έχουν παρονομαστή μεταξύ του 400 και του 500.
20. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{7}$ και ΜΚΔ (α, β) = 4, να βρείτε τα α,β.
21. Να βρείτε ένα κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{28}{40}$ του οποίου οι όροι να έχουν άθροισμα 204.
22. Να βρείτε ένα κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{60}{44}$ του οποίου οι όροι να έχουν διαφορά 44.

Στέλιος Μιχαήλογλου