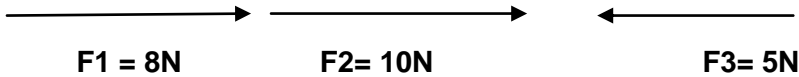


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

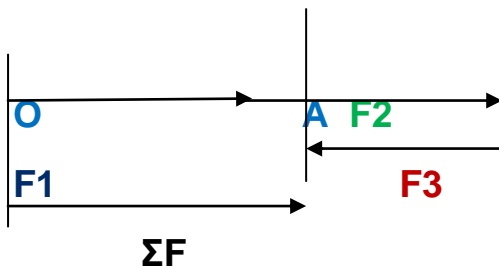
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 : ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Να βρεθεί η συνισταμένη των παρακάτω δυνάμεων



Γραφική μέθοδος

Η συνισταμένη των δυνάμεων σε αυτή την περίπτωση προκύπτει αν τοποθετήσουμε υπό κλίμακα τις δυνάμεις F_1 , F_2 και F_3 την μια μετά την άλλη με οποιαδήποτε σειρά θέλουμε.

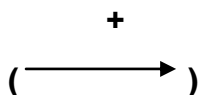


Η συνισταμένη (ΣF) προκύπτει αν ενώσουμε το σημείο O (αρχή πρώτης δύναμης) με το σημείο A που προκύπτει μετά την ένωση όλων των δυνάμεων.

Η διεύθυνση της ΣF συμπίπτει με τη διεύθυνση των συνιστωσών της. Το μέτρο αν μετρήσουμε με την κλίμακα που έχουμε προεπιλέξει το διάνυσμα OA και η φορά ορίζεται από την αρχή O της πρώτης δύναμης προς το τέλος A .

Αναλυτική μέθοδος

1ο βήμα: Ορίζουμε τυχαία πια φορά θα χρησιμοποιήσουμε σαν θετική.



2ο βήμα: Γράφουμε τον τύπο της διανυσματικής πράξης που θα

εκτελέσουμε: $\vec{\Sigma F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

3ο βήμα: Από τη φορά που έχουμε επιλέξει ως θετική προκύπτει ότι η F_1 και η F_2 είναι θετικές, ενώ η F_3 είναι αρνητική. Έτσι γράφουμε:

$\Sigma F = F_1 + F_2 - F_3$

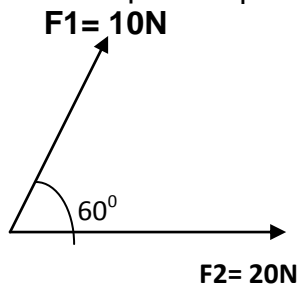
4ο βήμα: Κάνουμε αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο. Έτσι έχουμε:

$\Sigma F = 8N + 10N - 5N = 18N - 5N = 13N$

- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1:** Αν το αποτέλεσμα που βρήκαμε προέκυπτε αρνητικό τότε η φορά της ΣF θα ήταν αντίθετη από την φορά που εμείς θεωρήσαμε ως θετική.

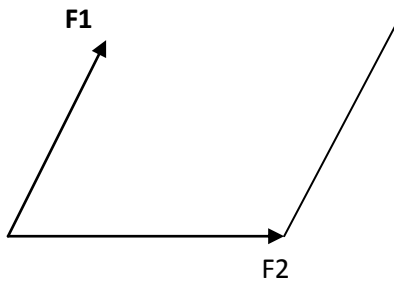
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2: Πρόσθεση δυο συντρεχουσών δυνάμεων

Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη των παρακάτω δυνάμεων.

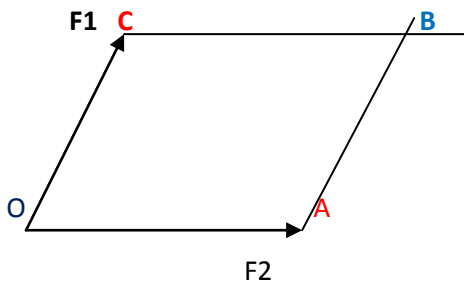


1^ο βήμα: Κατασκευή παραλληλογράμμου

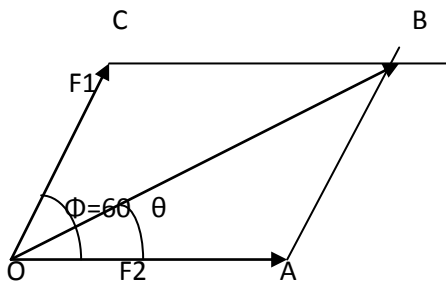
- i. Από το τέλος της δύναμης F_2 φέρνουμε παράλληλη στο φορέα της δύναμης F_1



- ii. Από το τέλος της δύναμης F_1 φέρνουμε παράλληλη στο φορέα της δύναμης F_2



- iii. Στο παραλληλόγραμμο OABC που σχηματίστηκε φέρνουμε τη διαγώνιο OB



- iv. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέτρο της ΣF από τον τύπο:

$$\Sigma F = \sqrt{F1^2 + F2^2 + 2 * F1 * F2 * \sigma\upsilon\nu\phi}$$

$$\Sigma F = \sqrt{10^2 + 20^2 + 2 * 10 * 20 * 1/2}$$

$$\Sigma F = \sqrt{100 + 400 + 200}$$

$$\Sigma F = \sqrt{700}$$

$$\Sigma F = 10\sqrt{7}N$$

v. Για να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση της ΣF υπολογίζουμε τη γωνία θ

$$\epsilon\phi\theta = \frac{F1 * \eta\mu\phi}{F2 + F1 * \sigma\upsilon\nu\phi}$$

$$\epsilon\phi\theta = \frac{10 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{20 + 10 * \frac{1}{2}}$$

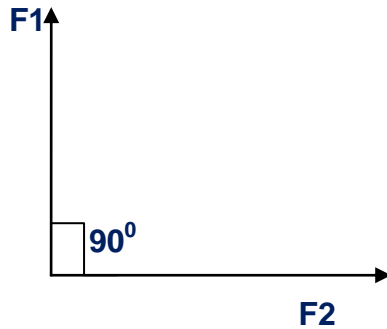
$$\epsilon\phi\theta = \frac{5 * \sqrt{3}}{25}$$

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0,346$$

$$\theta = 19,12^{\circ}$$

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Στην ισότητα $\epsilon\phi\theta=0,346$ αυτό που ψάχνουμε είναι μια γωνία όπου η εφαπτομένη της είναι 0,346. Για να βρούμε αυτή τη γωνία ή θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες ή την αντίστροφη συνάρτηση .

- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2:** Σε περίπτωση που οι φορείς των δυνάμεων σχηματίζουν γωνία 90° στο σημείο τομής (τέμνονται κάθετα)



τότε ο τύπος υπολογισμού της συνισταμένης γίνεται:

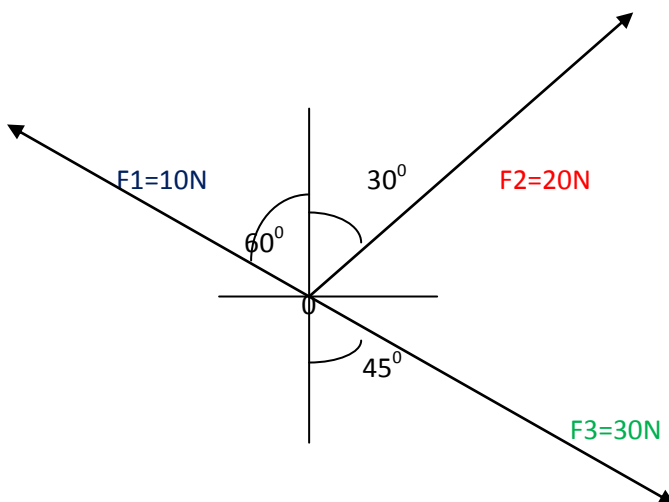
$$\Sigma F = \sqrt{\Sigma F_1^2 + \Sigma F_2^2}$$

$$\epsilon\phi\theta = F_1 / F_2$$

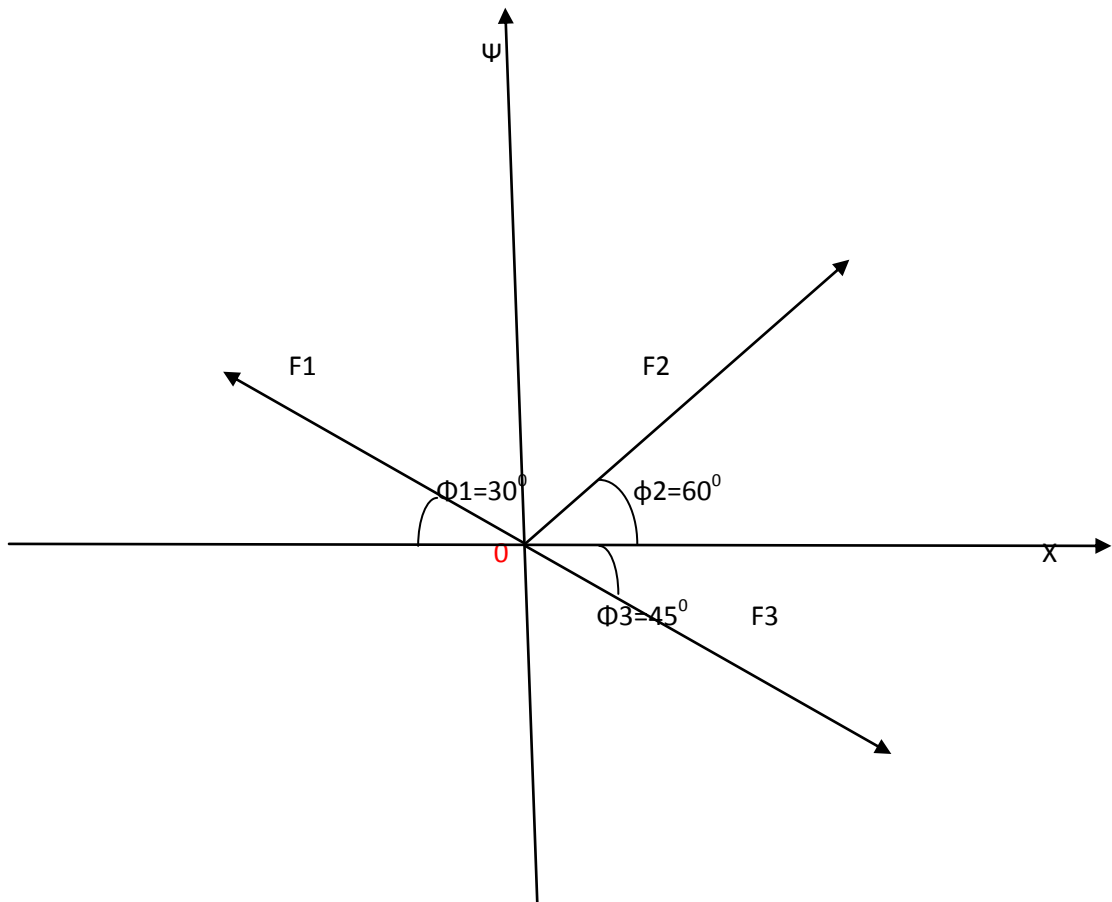
Αφού $\eta\mu 90=1$ και $\sigma\upsilon\nu 90=0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3: Πρόσθεση περισσότερων συντρεχουσών δυνάμεων

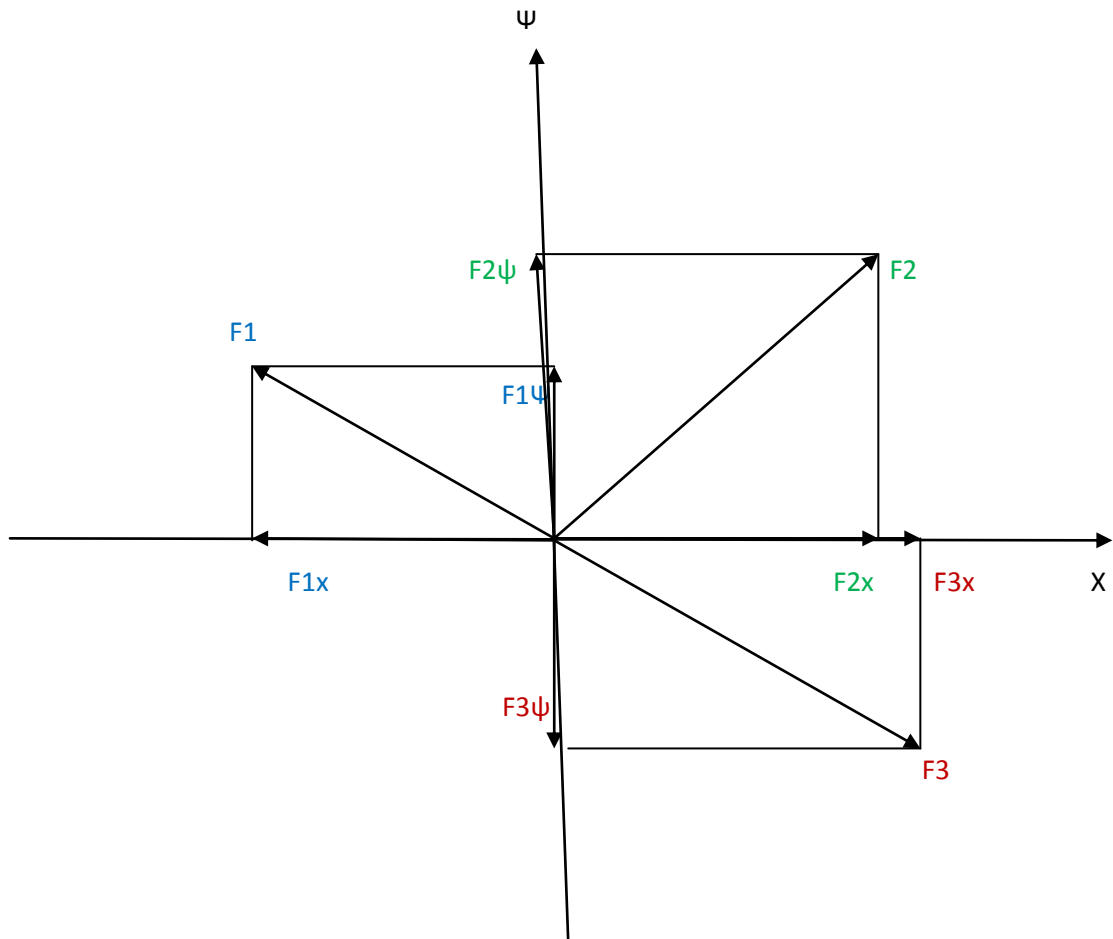
Να βρεθεί η συνισταμένη των παρακάτω δυνάμεων.



1^ο βήμα: τοποθετούμε τις δυνάμεις σε σύστημα αξόνων χ - ψ . Το σημείο O πρέπει να ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Υπολογίζουμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι F με τον άξονα χ



2^ο βήμα : αναλύουμε τις δυνάμεις F_1, F_2, F_3 σε συνιστώσες F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} και $F_{1\psi}, F_{2\psi}, F_{3\psi}$.




$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x}$$

$$\Sigma F_x = -5\sqrt{3} + 10\sqrt{2} + 15$$

$$\Sigma F_x = -8,66 + 14,14 + 15$$

$$\Sigma F_x = 20,48 \text{ N}$$

Θεωρούμε θετική φορά για τις F_ψ + ()

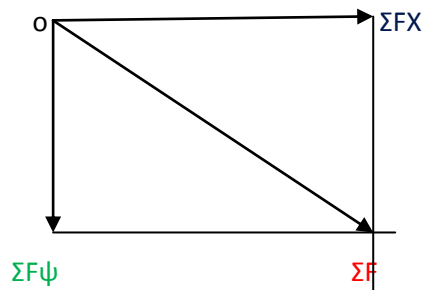
$$\Sigma \vec{F}_\psi = \vec{F}_{1\psi} + \vec{F}_{2\psi} + \vec{F}_{3\psi}$$

$$\Sigma F_\psi = -5 - 10 * \sqrt{2} + 15 * \sqrt{3}$$

$$\Sigma F_\psi = -19,14 + 25,98$$

$$\Sigma F_\psi = 6,84 \text{ N}$$

5^ο βήμα: Με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου όπως στην εφαρμογή 2 θα υπολογίσουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων ΣF_x και ΣF_ψ .



$$\Sigma F = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2}$$

$$\Sigma F = \sqrt{20,48^2 + 6,84^2}$$

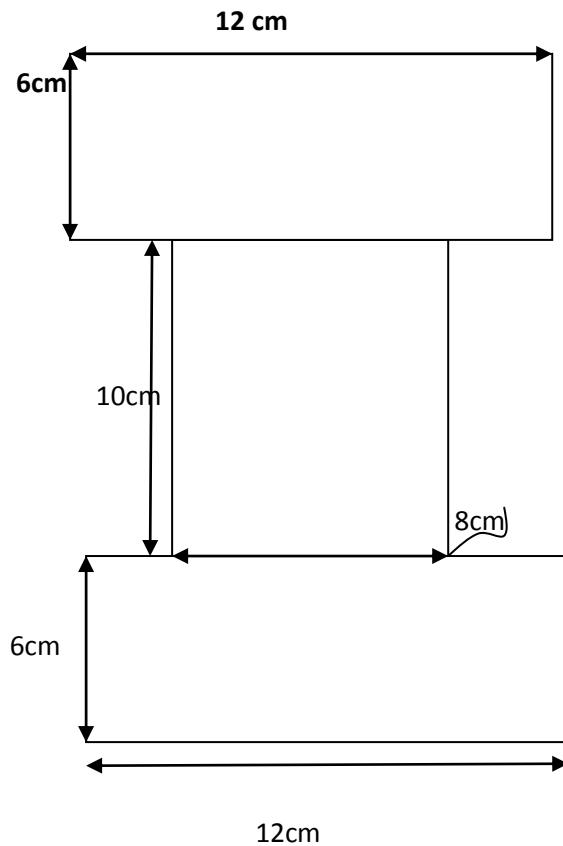
$$\Sigma F = 21,59 N$$

$$\tan \theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{6,84}{21,59} = 0,3168 \Rightarrow$$

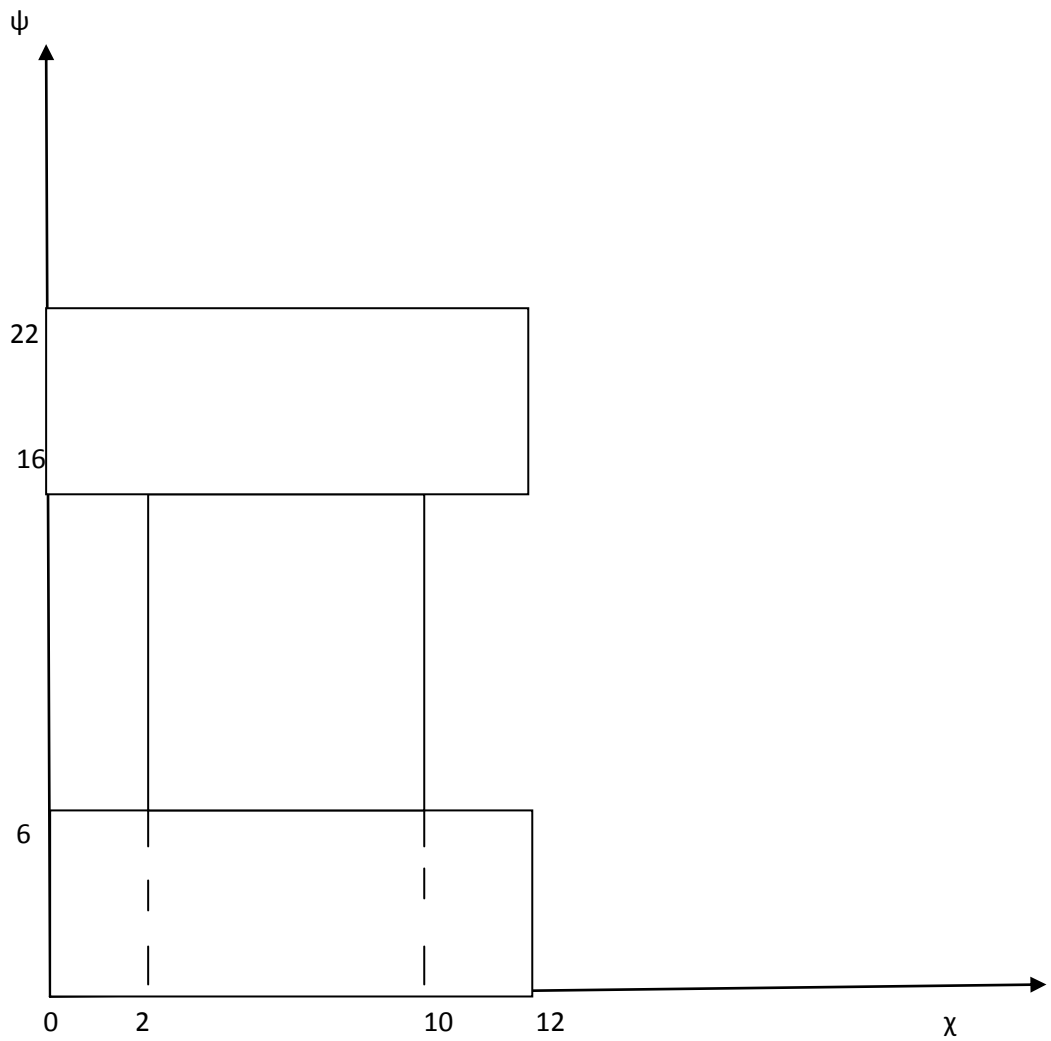
$$\Rightarrow \theta = 17,57^\circ$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4^η : Υπολογισμός κέντρου βάρους σύνθετης επιφάνειας

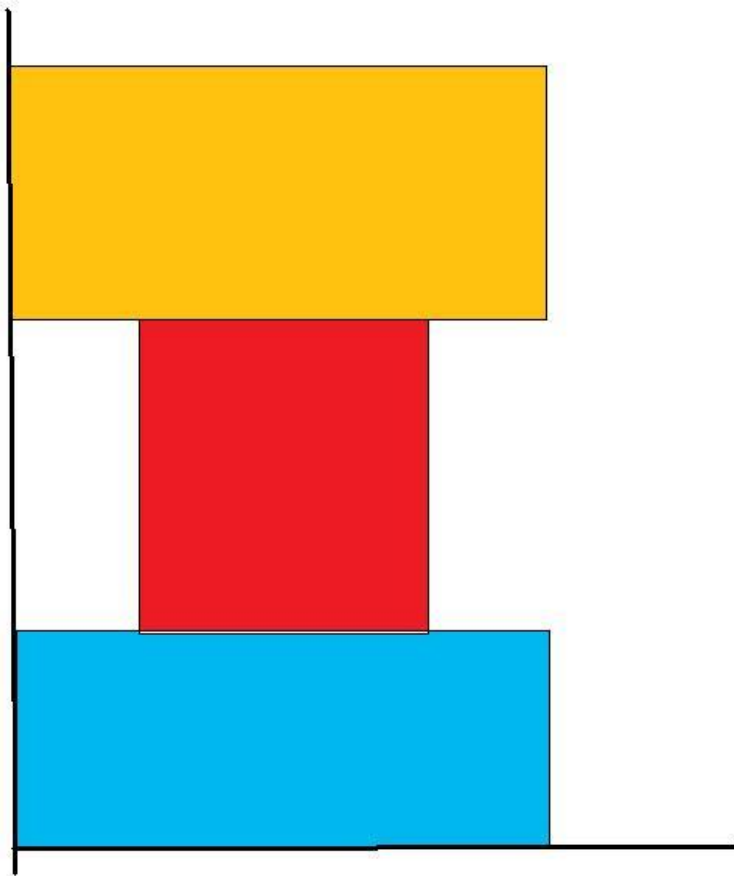
Να υπολογιστεί το κέντρο βάρους της παρακάτω επιφάνειας.



Βήμα 1^ο: Προσαρμόζουμε το παραπάνω σχήμα σε σύστημα αξόνων χ - ψ .

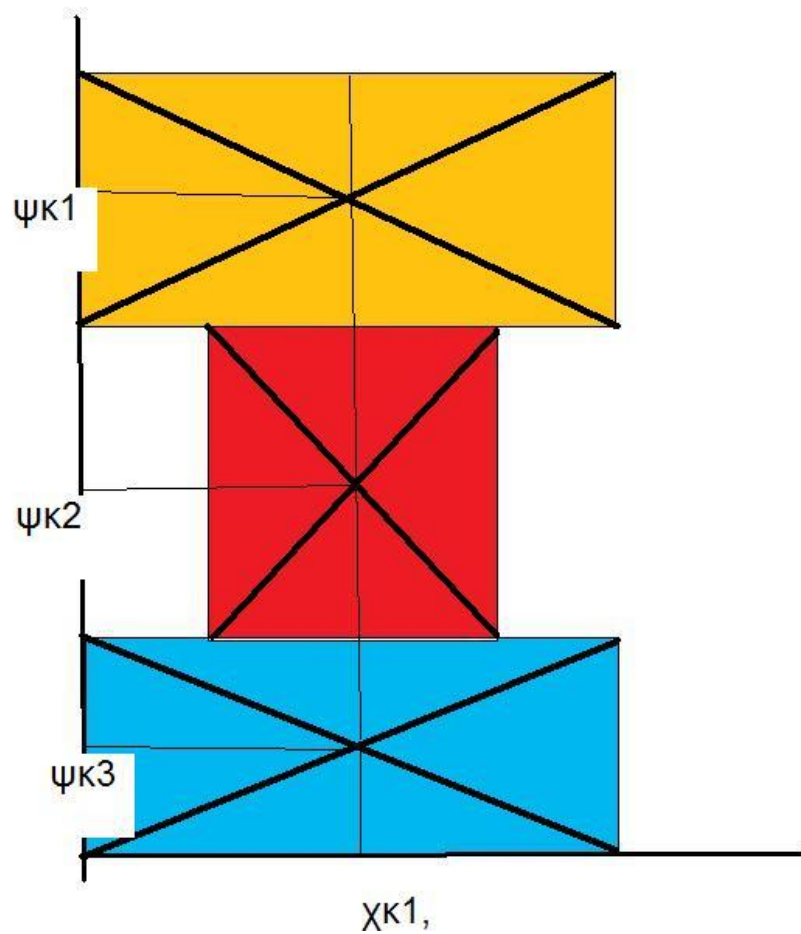


Βήμα 2^ο: Χωρίζουμε το σύνθετο σώμα σε επιφάνειες τις οποίες γνωρίζουμε τα κέντρα βάρους.



Έτσι έχουμε τρία ορθογώνια. Έστω 1 το ορθογώνιο με το κίτρινο χρώμα, 2 το ορθογώνιο με το κόκκινο χρώμα και 3 το ορθογώνιο με το μπλε χρώμα.

3ο βήμα: βρίσκουμε τις τετμημένες και τις τεταγμένες των κέντρων βάρους των επιμέρους ορθογωνίων.



$$K1 (\chi_{κ1}, \psi_{κ1}) \rightarrow K1(6,19)$$

$$K2(\chi_{κ2}, \psi_{κ2}) \rightarrow K2(6,11)$$

$$K3(\chi_{κ3}, \psi_{κ3}) \rightarrow K3(6,3)$$

4ο βήμα: Υπολογίζουμε το εμβαδόν των επιμέρους επιφανειών

$$E1=6 * 12=72 \text{ cm}^2$$

$$E2=10*8=80 \text{ cm}^2$$

$$E3=6*12=72\text{cm}^2$$

5ο βήμα: υπολογίζουμε την τετμημένη και τεταγμένη του κέντρου βάρους της σύνθετης επιφάνειας χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους.

$$\chi_K = \frac{\sum_{l=1}^{\nu} E_l * X_l}{E}$$

$$\psi_K = \frac{\sum_{l=1}^{\nu} E_l * \psi_l}{E}$$

$$E = \sum_{l=1}^{\nu} E_l$$

$$\chi_K = \frac{\chi_1 * E_1 + \chi_2 * E_2 + \chi_3 * E_3}{E_1 + E_2 + E_3}$$

$$\chi_K = \frac{6 * 72 + 6 * 80 + 6 * 72}{72 + 80 + 72}$$

$$\chi_K = \frac{432 + 480 + 432}{224}$$

$$\chi_K = \frac{1344}{224} = 6cm$$

$$\psi_K = \frac{\psi_1 * E_1 + \psi_2 * E_2 + \psi_3 * E_3}{E_1 + E_2 + E_3}$$

$$\psi_K = \frac{19 * 72 + 11 * 80 + 3 * 72}{72 + 80 + 72}$$

$$\psi_K = \frac{1368 + 880 + 216}{224}$$

$$\psi_K = \frac{2464}{224} = 11cm$$

Άρα το κέντρο βάρους του σώματος θα βρίσκεται στο σημείο K (6,11)

- ✚ Παρατήρηση 1 : Κατά τον προσδιορισμό των κέντρων βαρών των επιμέρους σωμάτων δεν ξεχνάμε να προσθέτουμε την απόσταση από την οποία ξεκινάμε.
- ✚ Παρατήρηση 2: Αν στην σύνθετη επιφάνεια υπάρχει κάποια οπή τότε στον υπολογισμό του σημείου K αντί να προσθέτουμε αφαιρούμε.