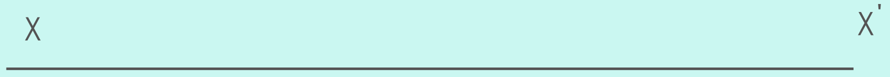
Η πυξίδα

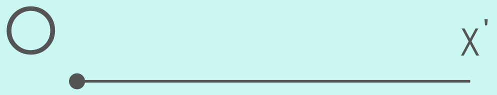
Τι διαφέρει η ευθεία χχ΄ από την ημιευθεία Οχ΄ και από το ευθύγραμμο τμήμα (τμήμα) ΟΑ ;

ΑΠ:

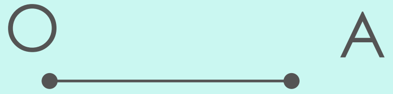
Η ευθεία χχ΄ εκτείνεται απεριόριστα →
δεξιά και αριστερά.



Η ημιευθεία Οχ΄ εκτείνεται απεριόριστα →
μόνο προς τα δεξιά.



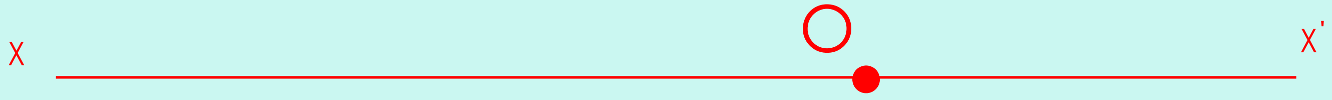
Το ευθύγραμμα τμήμα ΟΑ δεν εκτείνεται απεριόριστα →
δεξιά και αριστερά.



Τι είναι αντικείμενες ημιευθείες ;

ΑΠ:

Οι ημιευθείες Κψ και Κψ΄ δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.



Οι ημιευθείες Οχ και Οχ΄ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Οι αντικείμενες ημιευθείες έχουν την ίδια αρχή και η μία είναι προέκταση της άλλης.

Πως μετρώ τις γωνίες;

Τι είναι η μοίρα;

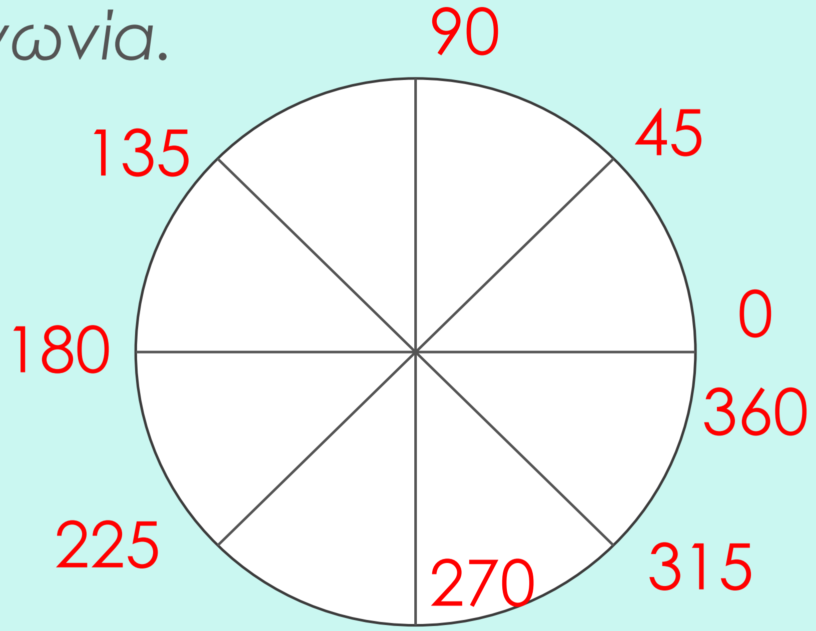
ΑΠ:

- *Τις γωνίες τις μετρώ με μοίρες.*

- *Μια μοίρα (1^0)είναι το ένα τριακοσιαεξήκοντα του τυχαίου κύκλου. Δηλαδή χωρίζω τον τυχαίο κύκλο σε 360 ίσα μέρη και παίρνω το ένα. Τον χωρίζω σε 360 ίσα τόξα και παίρνω το ένα τόξο, Τον χωρίζω σε 360 ίσες γωνίες και παίρνω την μία γωνία.*

- *1 μοίρα* $= 1^0 = \dfrac{1}{360}$ *του τυχαίου κύκλου.*

- *Στο σχήμα δίπλα ο κύκλος χωρίστηκε σε 8 ίσα μέρη* →

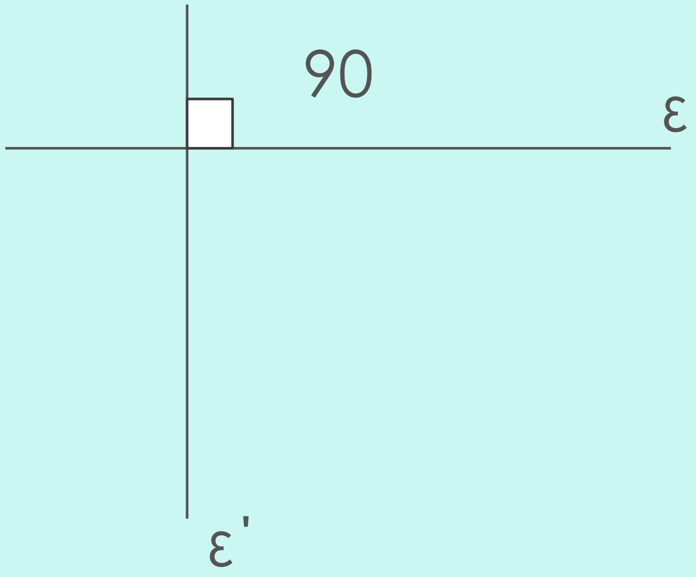


Τι είναι ορθή γωνία;

ΑΠ

Η γωνία που ισούται με 90 μοίρες.

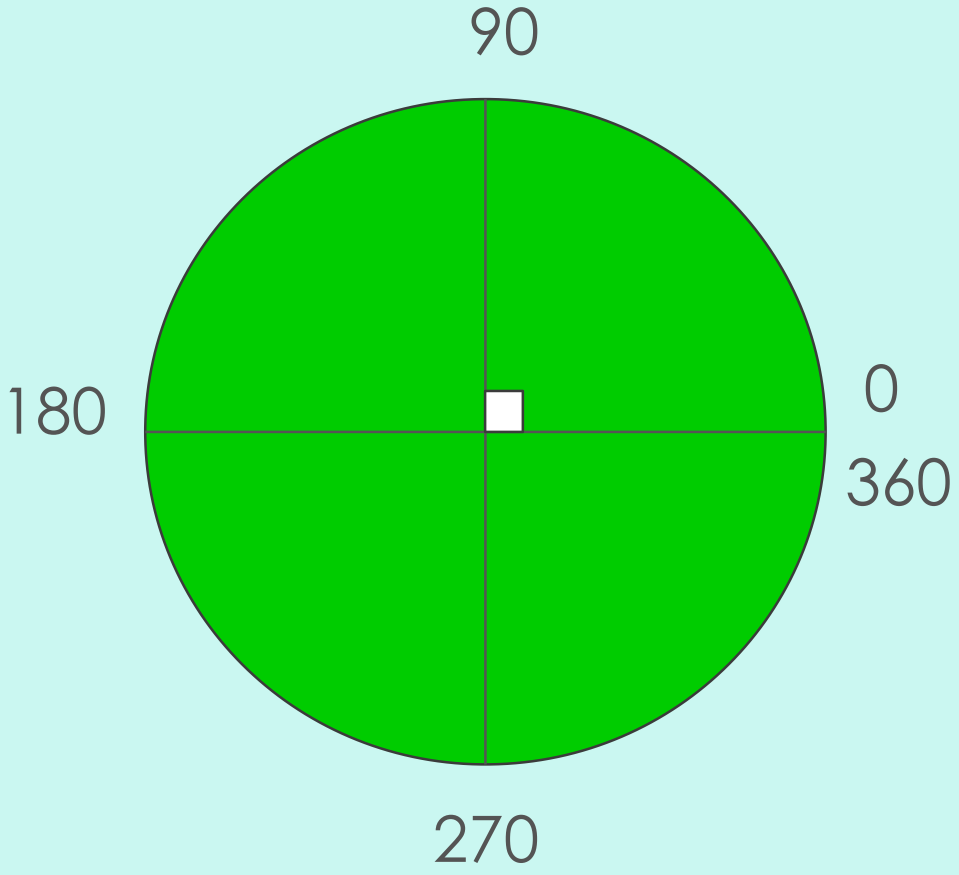
Δύο κάθετες ευθείες ε , ε'
σχηματίζουν 4 ορθές γωνίες.



Με πόσες μοίρες και ορθές ισούται ο κύκλος;

ΑΠ:

Με 360 μοίρες = 4 ορθές.

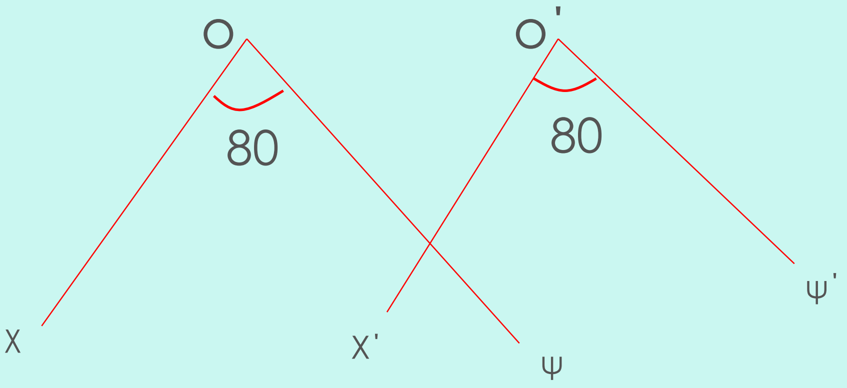


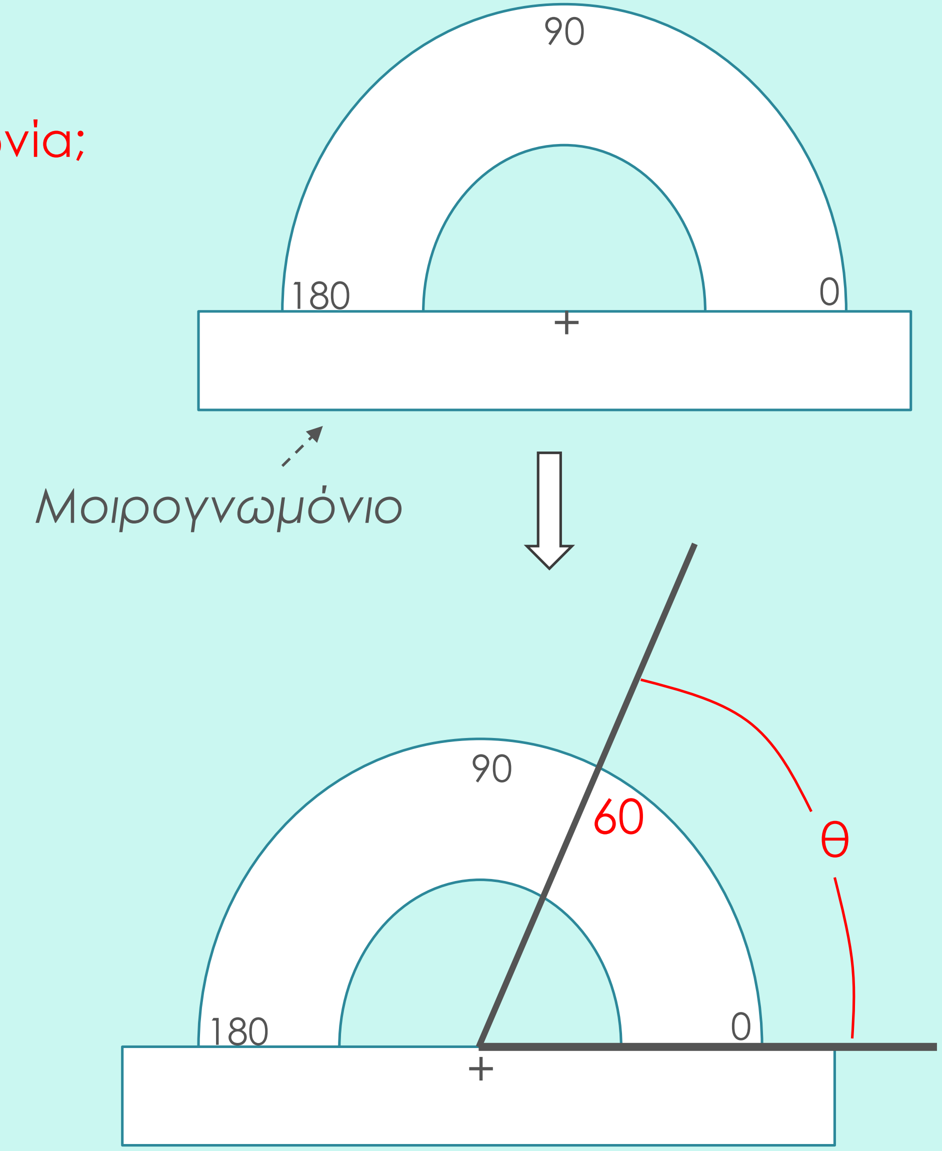
Τι λέμε ίσες γωνίες;

Πως τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο για να μετρήσουμε μία γωνία;

ΑΠ: *Ίσες γωνίες είναι οι γωνίες που « ταυτίζονται » στην μεταφορά, δηλαδή*
η κορυφή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Ο΄
και η πλευρά Οχ ταυτίζεται με την πλευρά Οχ΄
και η πλευρά Οψ ταυτίζεται με την πλευρά Οψ΄.

Οι ίσες γωνίες, έχουν τις ίδιες μοίρες.

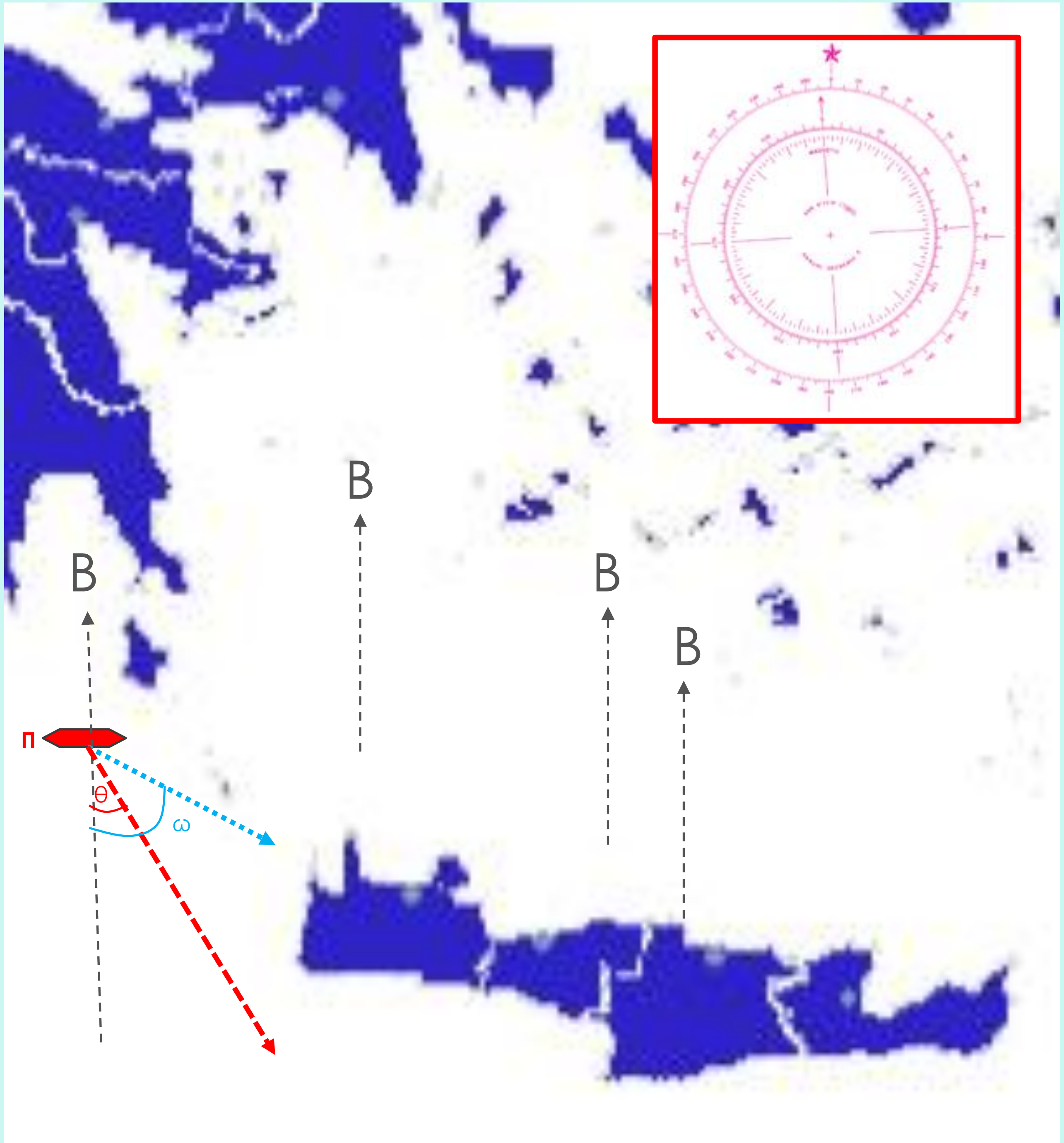




Διαβάζω πάνω στο μοιρογνωμόνιο ότι η γωνία θ είναι 60 μοίρες,
δηλαδή $\theta = 60^0$

Γιατί έχει μεγάλη σημασία η ακρίβεια της γωνίας στην ναυσιπλοΐα;

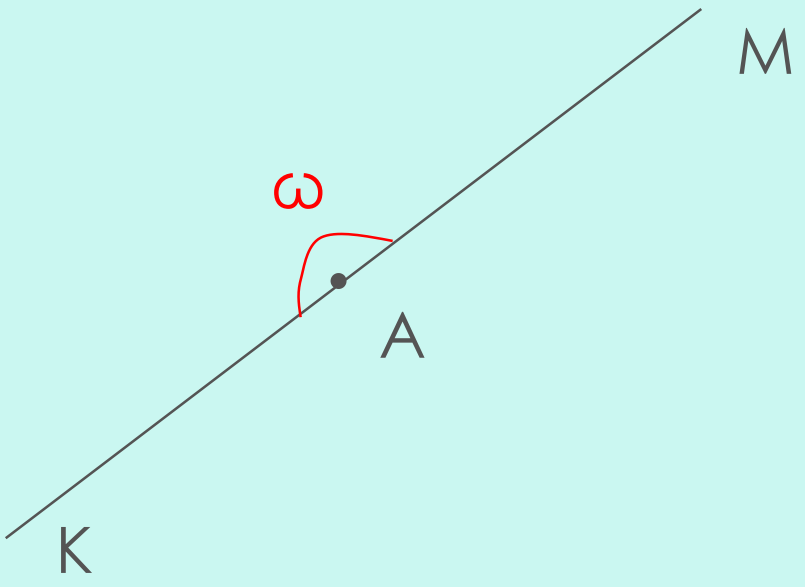
Το πλήρωμα παρακολουθεί την γωνία που σχηματίζει η γραμμή πλώρης (άξονας συμμετρίας) του πλοίου Π με τον βορρά Β, στην πυξίδα της γέφυρας (θάλαμος διακυβέρνησης) του πλοίου Π. Με την βοήθεια του τιμονιού, η γωνία που δείχνει η πυξίδα διατηρείται σταθερή ή μεταβάλλεται. Στην γωνία θ, το πλοίο Π που είναι κάτω από την Πελοπόννησο, κατευθύνεται την νύχτα προς την Αφρική, ενώ στην γωνία ω κατευθύνεται προς την Κρήτη.



Τι είναι ευθεία γωνία;

ΑΠ:

Η γωνία ΚΑΜ = ω που είναι ίση με 180 μοίρες = 2 ορθές.

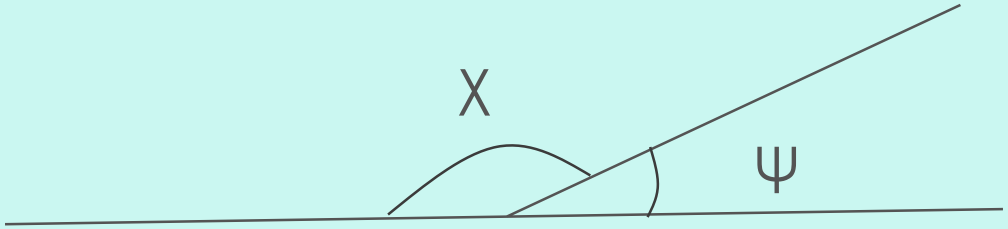


Οι πλευρές της ευθείας γωνίας ω, είναι αντικείμενες ημιευθείες

Τι είναι παραπληρωματικές γωνίες;

ΑΠ:

Οι γωνίες που έχουν άθροισμα 180 μοίρες



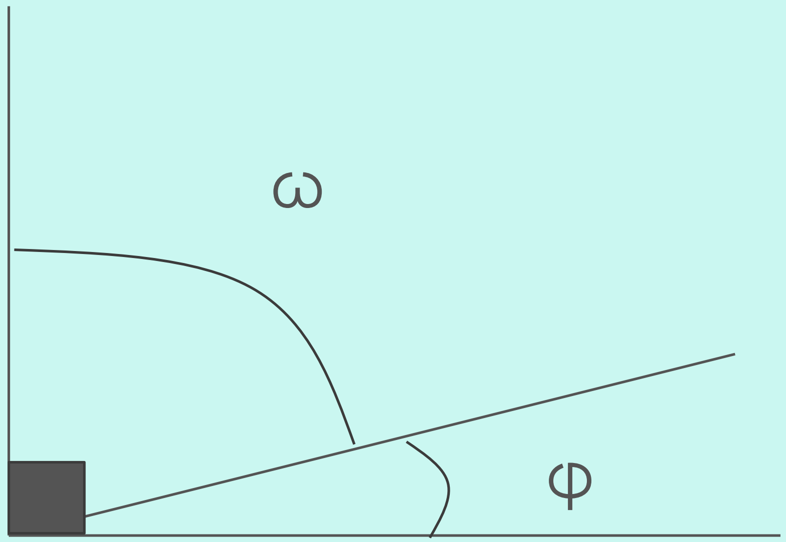
ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ.

χ + ψ = 180 μοίρες = 2 ορθές = μια ευθεία γωνία.

Τι είναι συμπληρωματικές γωνίες;

ΑΠ:

Οι γωνίες που έχουν άθροισμα 90 μοίρες



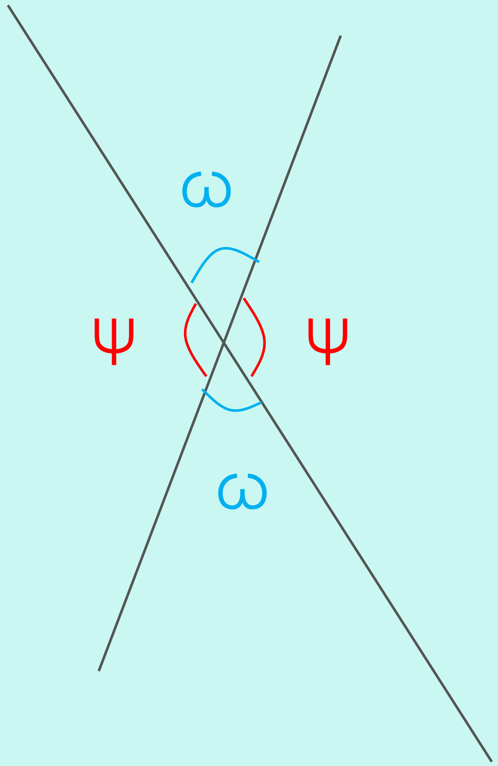
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

ω + φ = 90 μοίρες = 1 ορθή

Τι είναι κατακορυφή γωνίες;

ΑΠ:

Φέρω δυο τεμνόμενες ευθείες.
Οι απέναντι κόκκινες
ίσες γωνίες ψ είναι κατακορυφή.
Οι απέναντι μπλε
ίσες γωνίες ω είναι κατακορυφή.

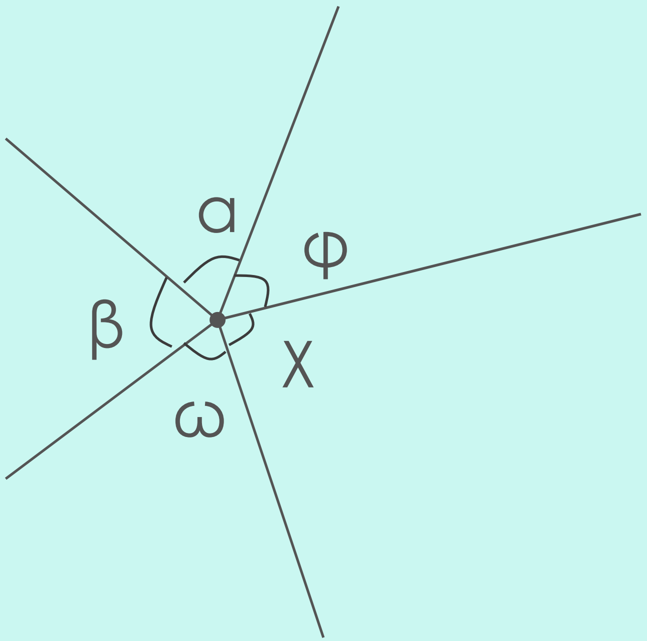


ΓΩΝΙΕΣ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ (ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΑ Χ).

$\psi = \psi$

$\omega = \omega$

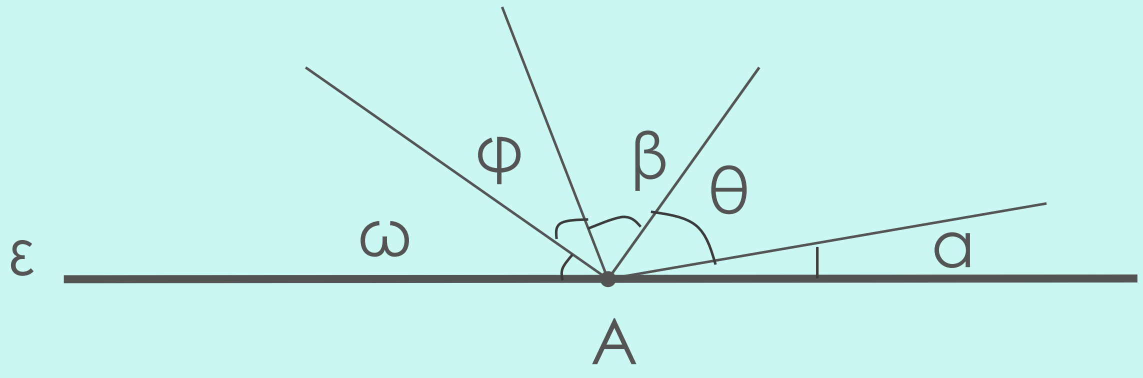
Το άθροισμα όλων των γωνιών
με κοινή κορυφή γύρω
από ένα σημείο, ισούται
με 360 μοίρες.



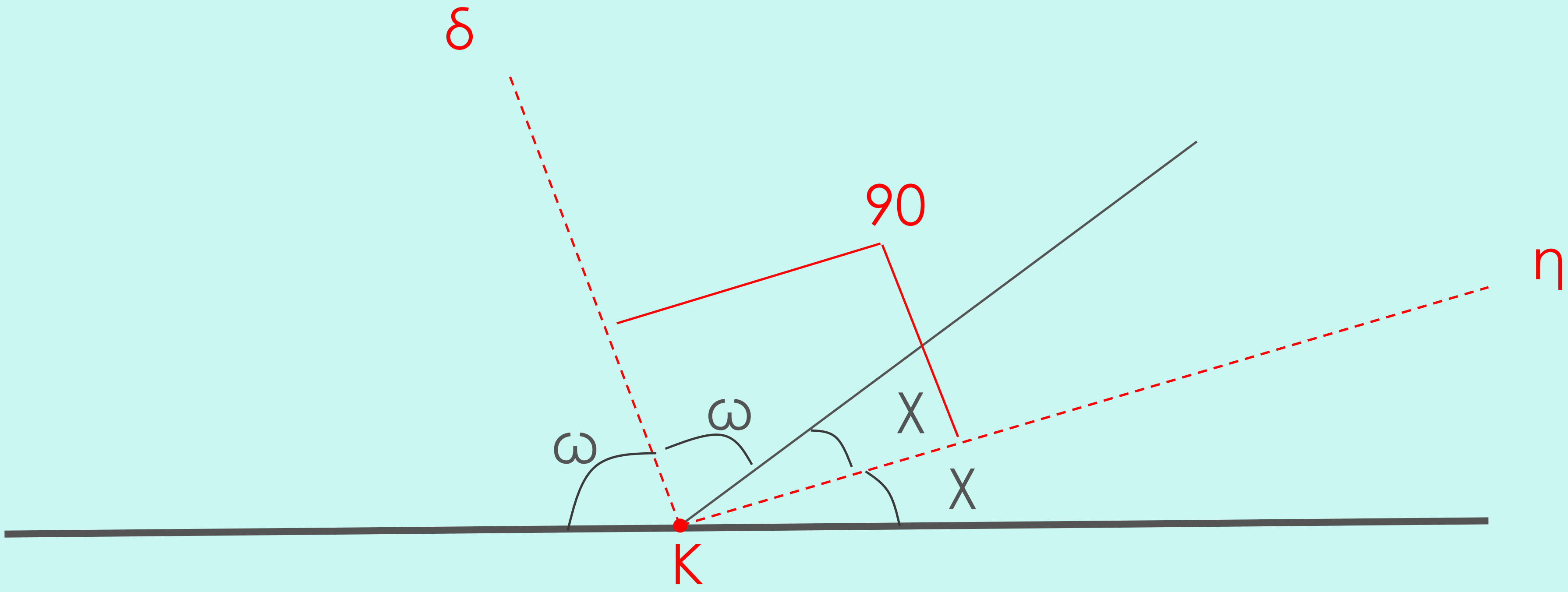
$$\alpha + \beta + \omega + \chi + \varphi = 360 = 4 \text{ ορθές}$$

Γωνίες σε ευθεία ε :

*Στο διπλανό σχήμα,
το άθροισμα όλων
των γωνιών
ισούται με 180 μοίρες.*



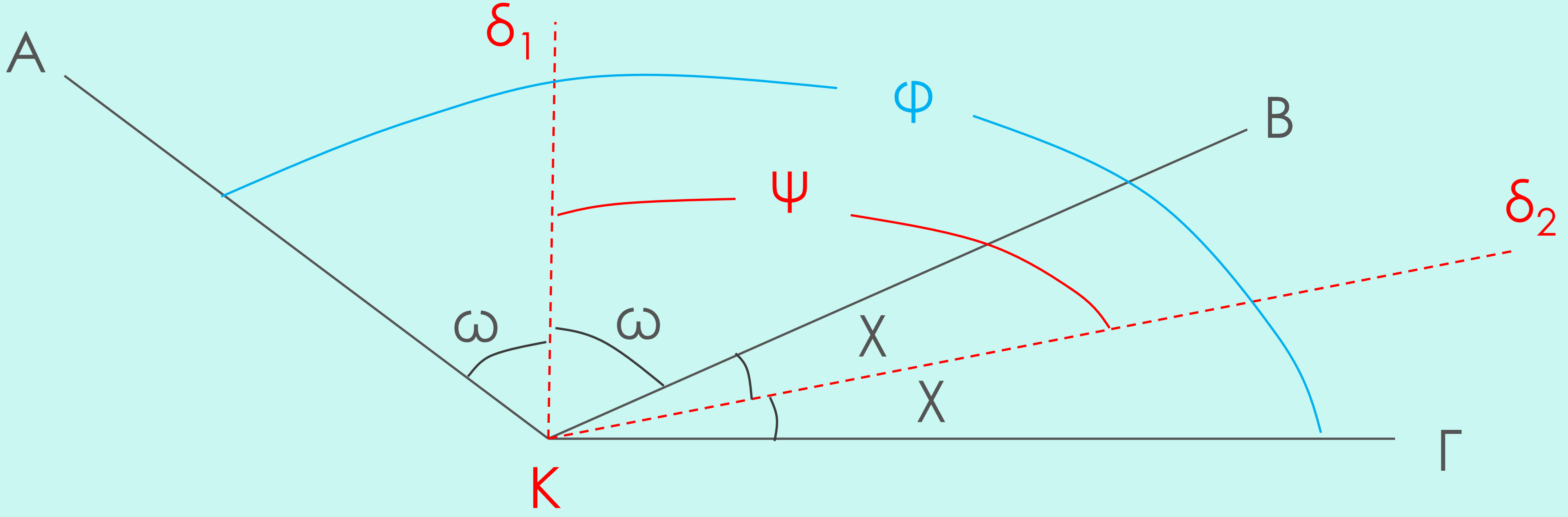
$\omega + \varphi + \beta + \theta + \alpha \quad = \quad 180$ *μοίρες* $\quad = \quad 2$ *ορθές*



ΣΤΟ ΔΙΠΛΑΝΟ ΣΧΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΓΩΝΙΑ $\widehat{\delta K \eta} = 90$ *μοίρες.*

ΑΠ: $180 = \omega + \omega + \chi + \chi =$
$= 2\omega + 2\chi =$
$= 2(\omega + \chi) =$
$= 2(\text{γωνία } \delta K\eta).$

Άρα $180 = 2(\text{γωνία } \delta K\eta) \Leftrightarrow 2(\text{γωνία } \delta K\eta) = 180 \Leftrightarrow \text{γωνία } \delta K\eta = 180/2 = 90$ *μοίρες.*

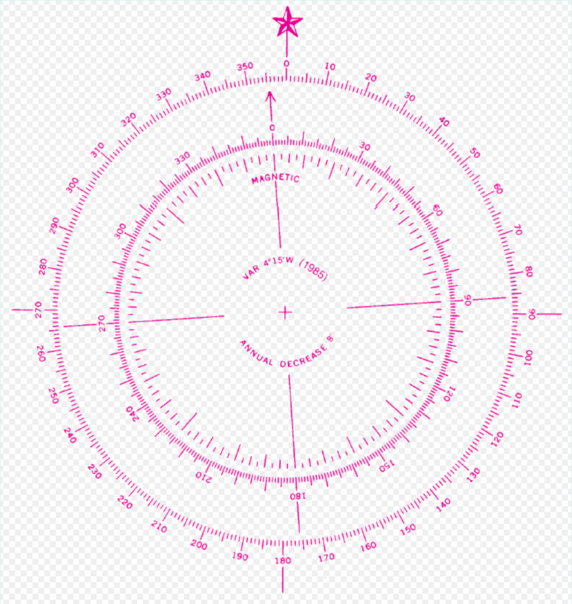


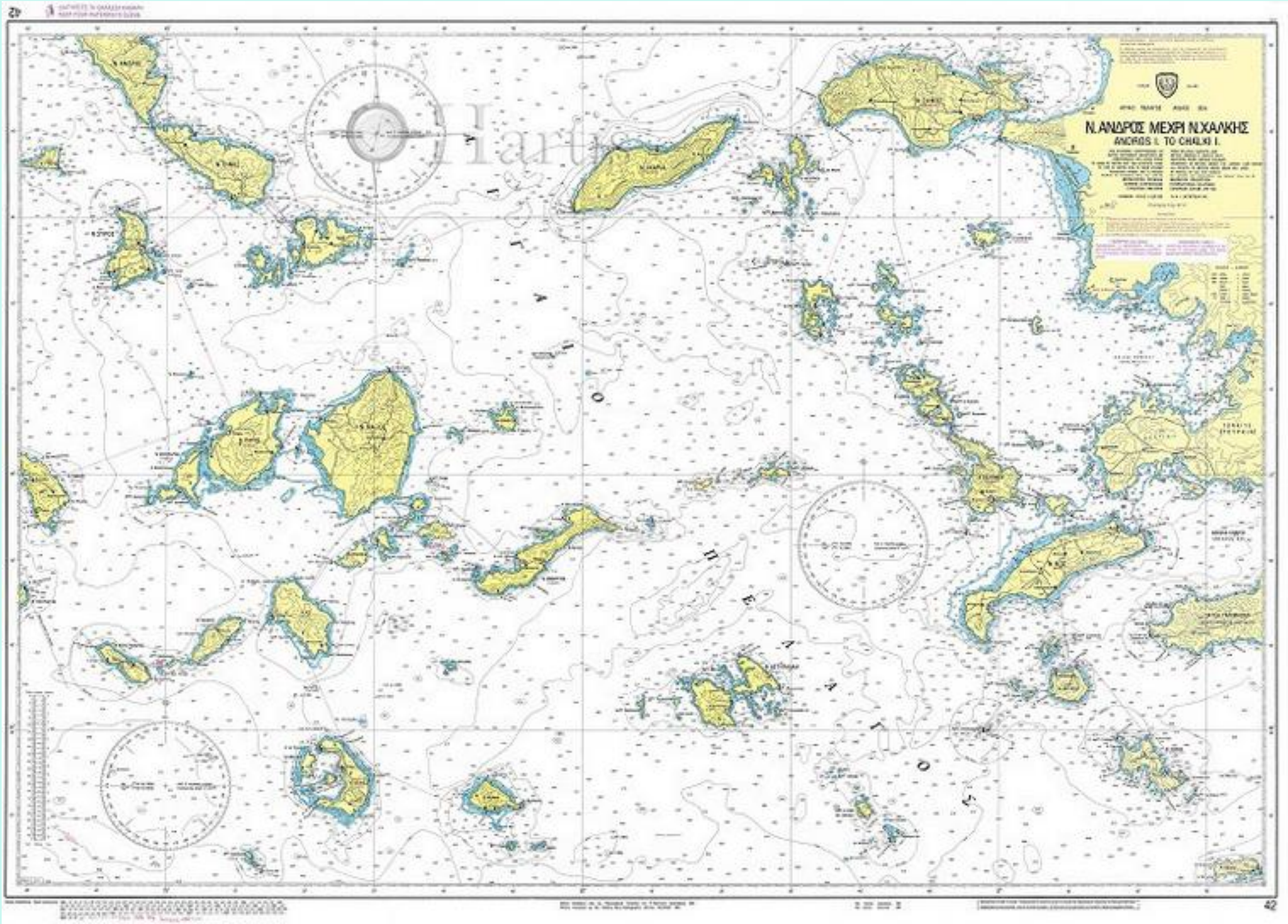
ΣΤΟ ΔΙΠΛΑΝΟ ΣΧΗΜΑ ΕΙΝΑΙ $\psi = \varphi / 2$.

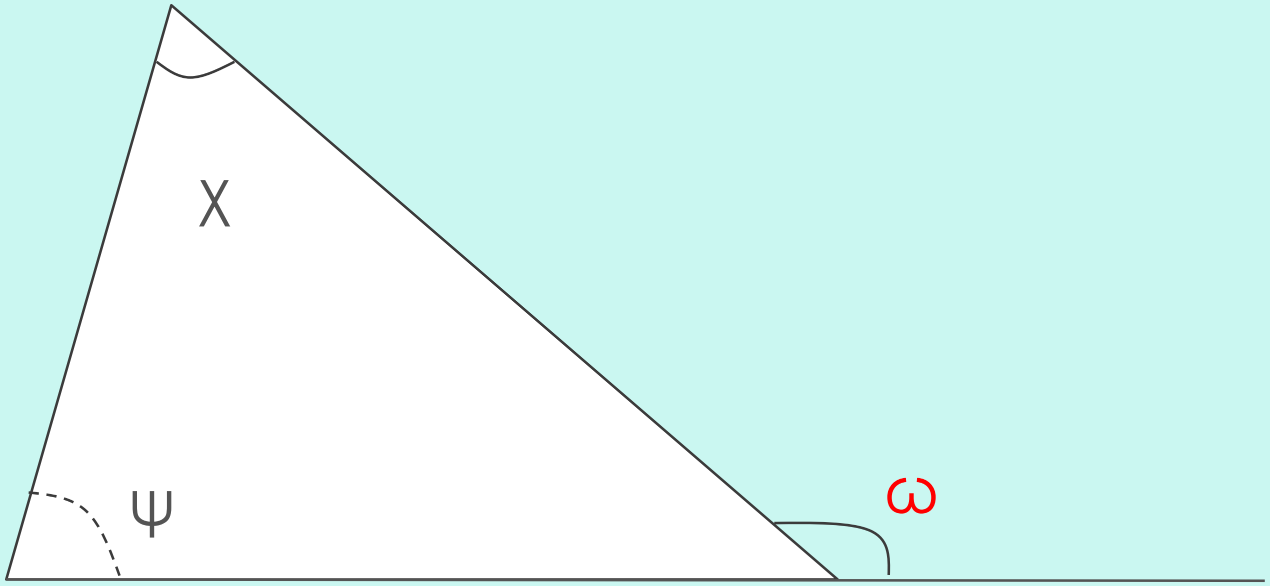
ΑΠ: $\varphi = \omega + \omega + \chi + \chi =$
$= 2\omega + 2\chi =$
$= 2(\omega + \chi) =$
$= 2\psi$.

Αρα $\varphi = 2\psi \Leftrightarrow 2\psi = \varphi \Leftrightarrow \psi = \varphi/2$.

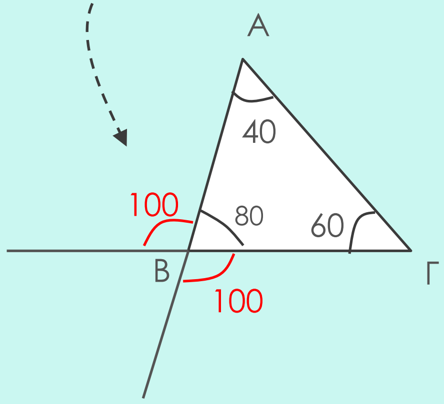
Ναυτικός χάρτης με ανεμολόγιο για γρήγορη μέτρηση γωνιών με μεταφορά







Εξωτερική Β = Βεξ = 100



Γωνία Β = 80
Γωνία Α = 40
Γωνία Γ = 60

Η εξωτερική Β και η Β είναι παραπληρωματικές.
Δηλαδή ισχύει το εξής:

Βεξ = 180 - Β = Α + Γ

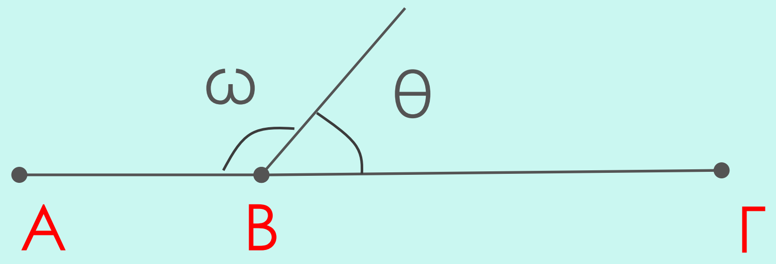
ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ = ω = $\chi + \psi$ =

= άθροισμα των δύο
εντός και απέναντι.

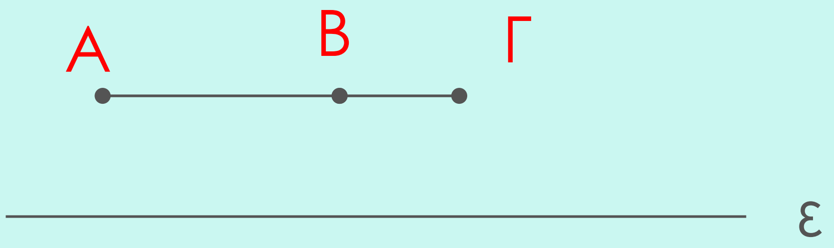
Τι κάνω για να αποδείξω ότι τρία σημεία Α , Β , Γ βρίσκονται πάνω σε ευθεία;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

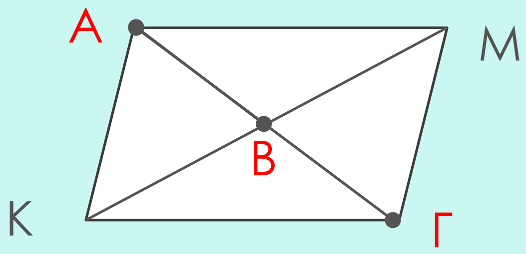
- $\Delta\varepsilon\acute{\iota}\chi\nu\omega\ \acute{o}\tau\iota \quad \hat{\omega}+\hat{\theta}=180^o \rightarrow$

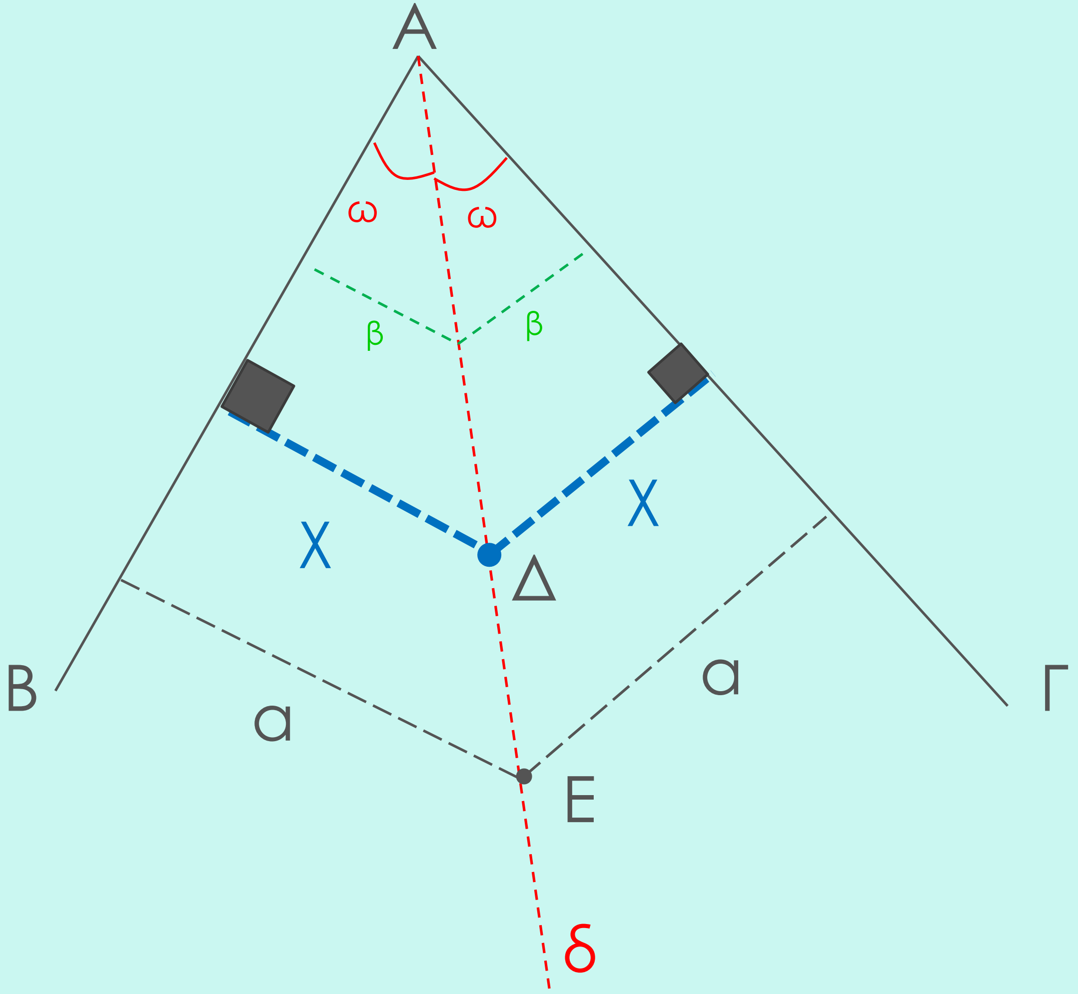


- $\acute{\eta}\ \ \delta\varepsilon\acute{\iota}\chi\nu\omega\ \acute{o}\tau\iota \quad \mathrm{AB}\ //\ \varepsilon \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{B\Gamma}\ //\ \varepsilon \rightarrow$



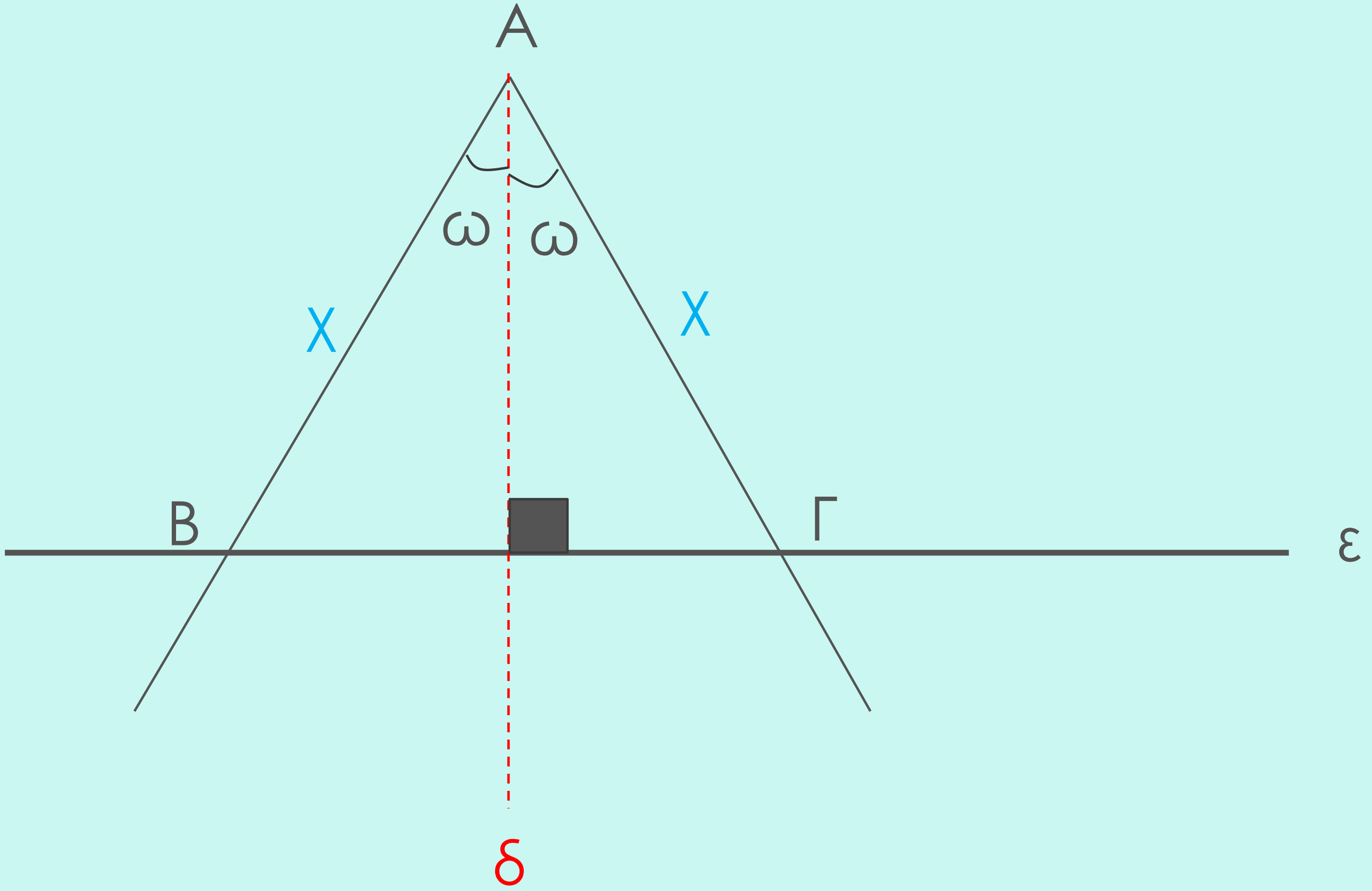
- Ή δείχνω ότι ΑΒΓ είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου.





ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ δ *ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ* $\widehat{ΒΑΓ}$, *ΙΣΑΠΕΧΕΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ.*

$\chi = \chi$, $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$

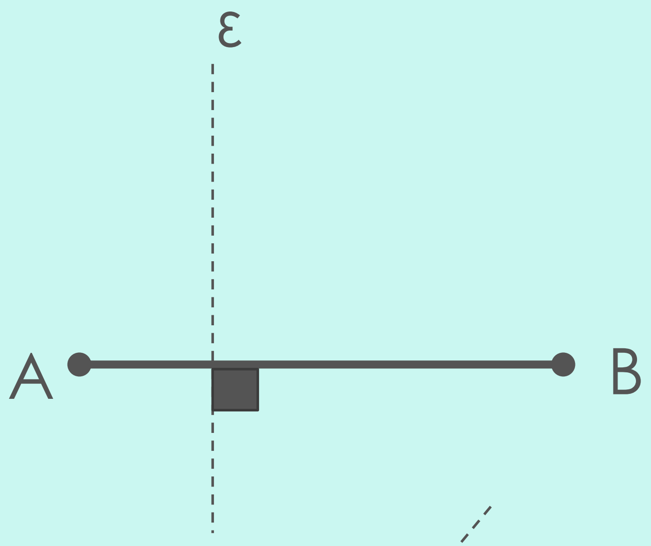


Η ΚΑΘΕΤΟΣ ε ΣΤΗΝ ΔΙΧΟΤΟΜΟ δ ΓΩΝΙΑΣ, ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ.

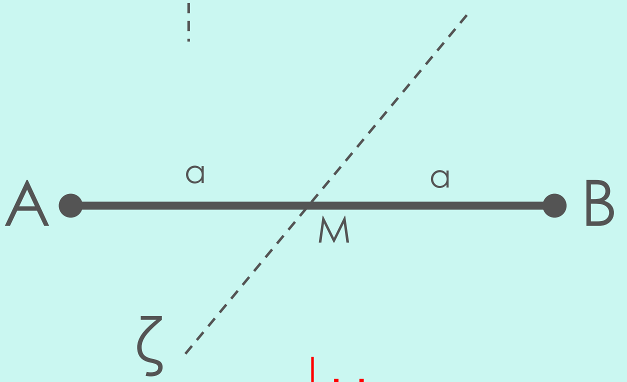
$\chi = \chi$ → Τρίγωνο ΑΒΓ, ισοσκελές

Τι είναι μεσοκάθετος σε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ:

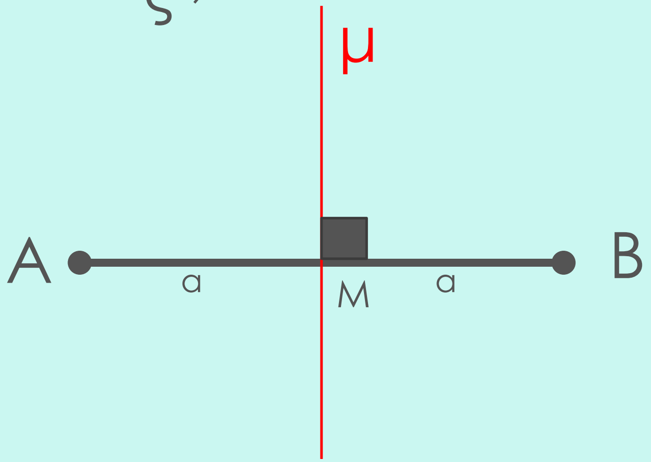
Η ευθεία ε, είναι κάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
Η ε δεν είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

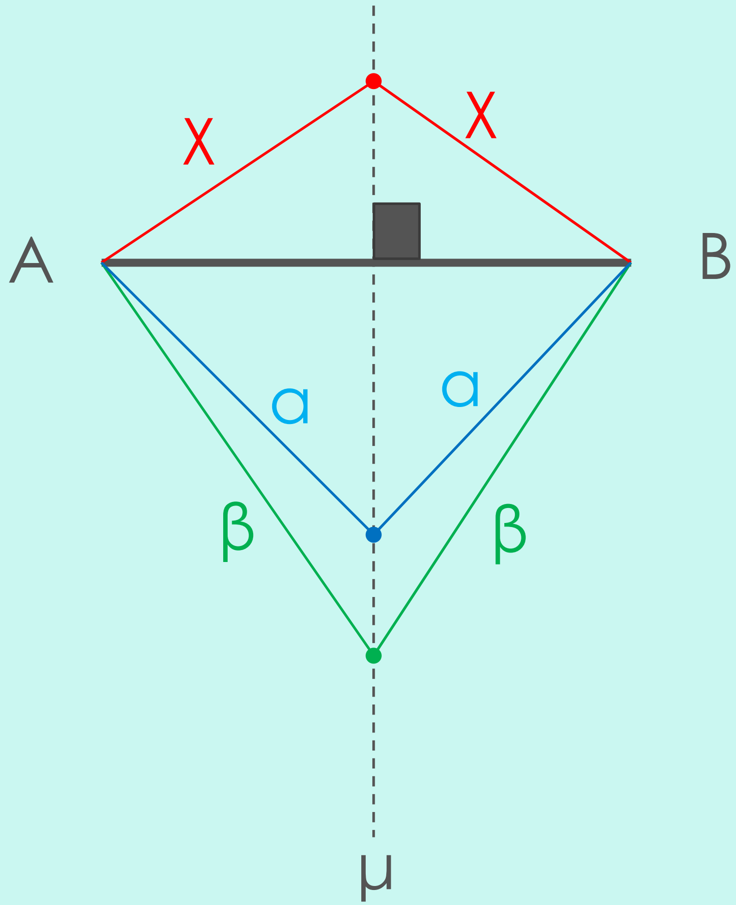


Η ευθεία ζ, διέρχεται από το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
Η ζ δεν είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.



Η ευθεία μ, διέρχεται από το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και ταυτόχρονα είναι κάθετος στο ΑΒ.
Η μ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.





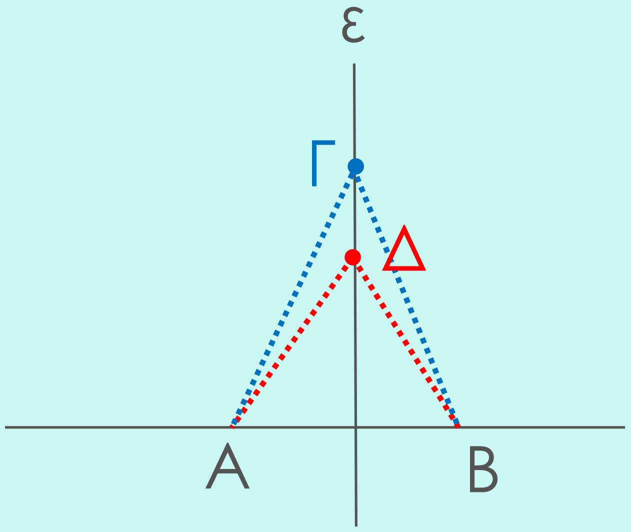
ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΥ μ ΕΝΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΑΒ, ΙΣΑΠΕΧΕΙ ΑΠΟ ΤΑ ΑΚΡΑ Α ΚΑΙ Β.

$\chi = \chi$, $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$

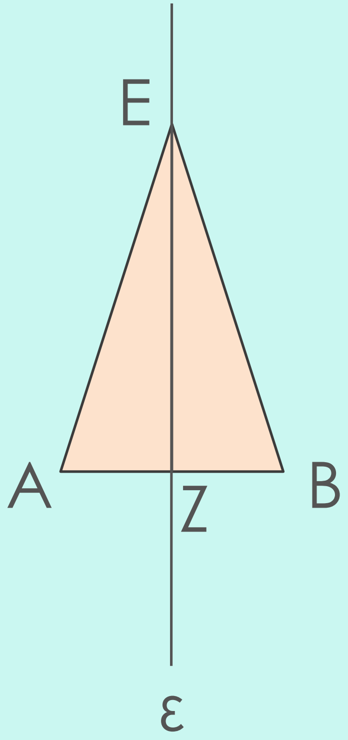
Τι κάνω για να δείξω ότι η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του ΑΒ ;

<u>*ΑΠΑΝΤΗΣΗ*</u>

- *Παίρνω δυο σημεία Γ και Δ της ε.*
  Δείχνω ότι ΓΑ = ΓΒ και ΔΑ = ΔΒ. →

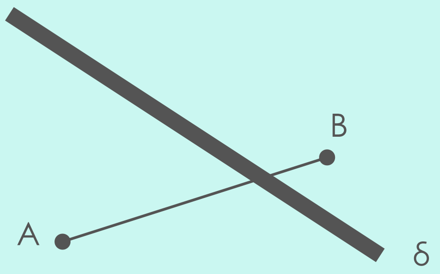


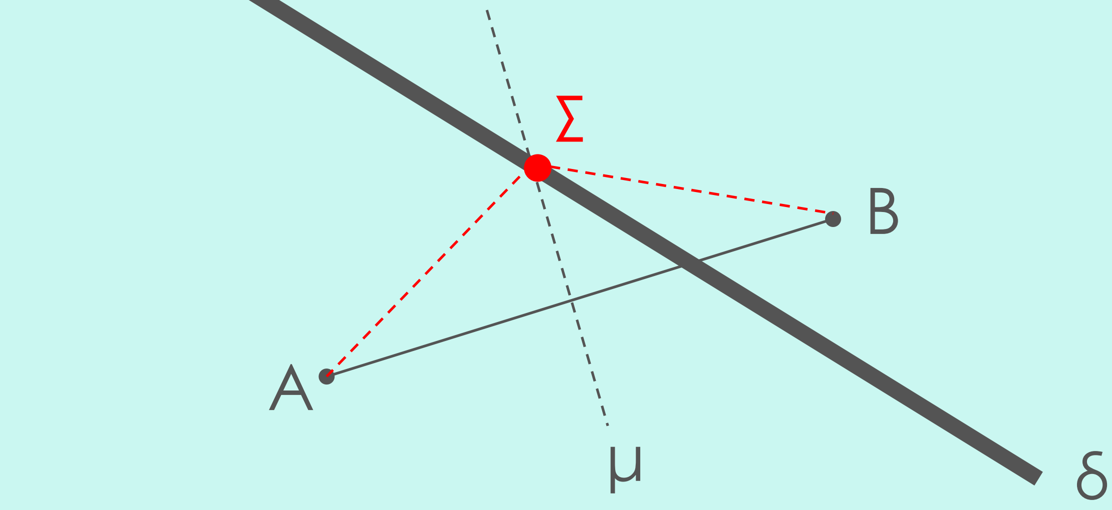
- *Ή παίρνω ένα σημείο Ε της ε.*
  Δείχνω ότι το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές, με ΕΖ ύψος ή διάμεσος ή διχοτόμος →



Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο χωριά στα σημεία Α και Β και την ευθεία του νέου δρόμου δ. Θέλουμε να κάνουμε στον δρόμο δ, μία στάση Σ, που θα ισαπέχει και από τα δύο χωριά.

Σε ποιο σημείο του δρόμου δ πρέπει να γίνει η στάση;





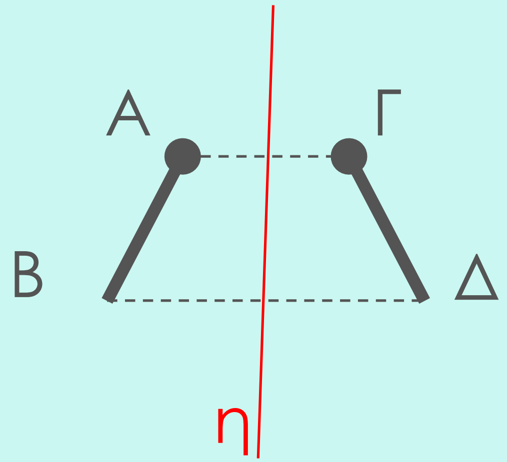
ΑΠ:

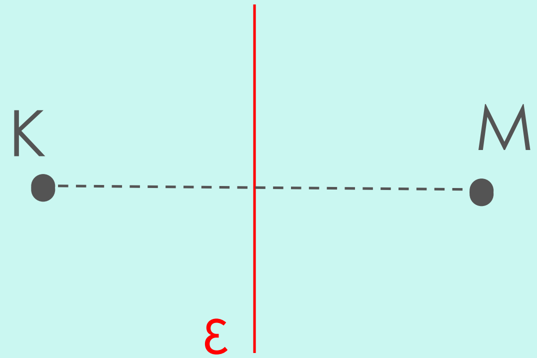
Φέρω το ΑΒ.
Φέρω την μεσοκάθετο μ του ΑΒ.
Η στάση Σ θα γίνει στο σημείο τομής της μεσοκαθέτου μ με την ευθεία του δρόμου δ, διότι τότε μόνο το τρίγωνο ΣΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε ΣΑ = ΣΒ.

Τι είναι συμμετρία ως προς άξονα;

Το K είναι συμμετρικό του M, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.

Παρατηρώ ότι η ευθεία ε, είναι μεσοκάθετος του KM.





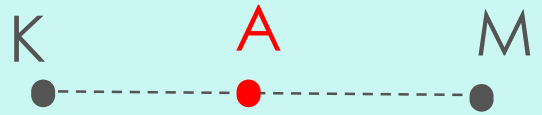
Το AB είναι συμμετρικό του ΓΔ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία η.

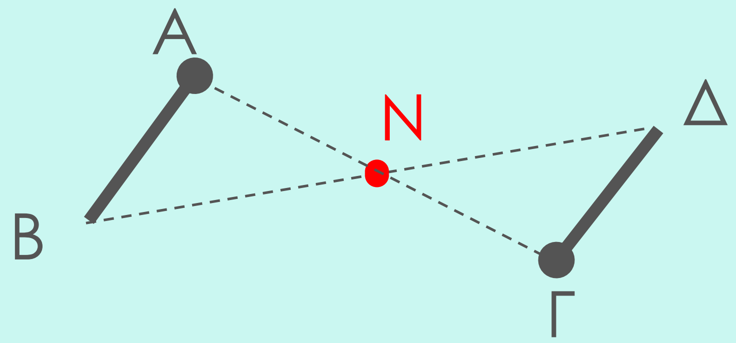
Παρατηρώ ότι η ευθεία η, είναι μεσοκάθετος του ΑΓ και του ΒΔ.

Τι είναι συμμετρία ως προς σημείο;

Το Κ είναι συμμετρικό του Μ, ως προς το σημείο Α.

Παρατηρώ ότι το σημείο Α, είναι το μέσον του ΚΜ.





Το ΑΒ είναι συμμετρικό του ΓΔ, ως προς το σημείο Ν.

Παρατηρώ ότι το σημείο Ν, είναι το μέσον του ΑΓ και του ΒΔ.

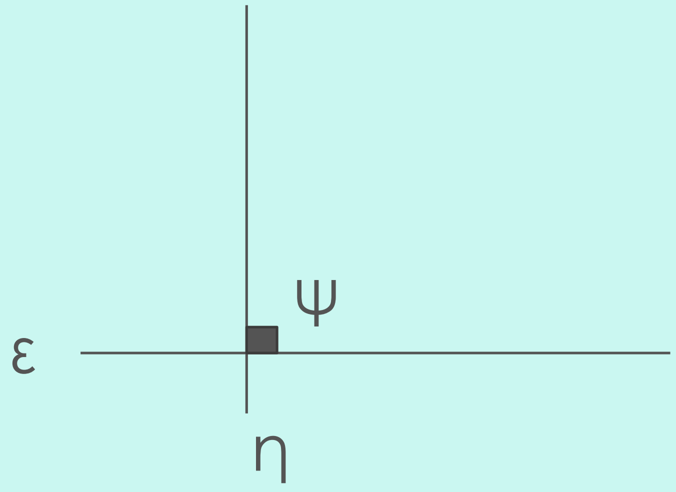
Η συμμετρία υπάρχει στις «κατασκευές της Ζωής».

Η συμμετρία υπάρχει στις «κατασκευές της Ζωής».

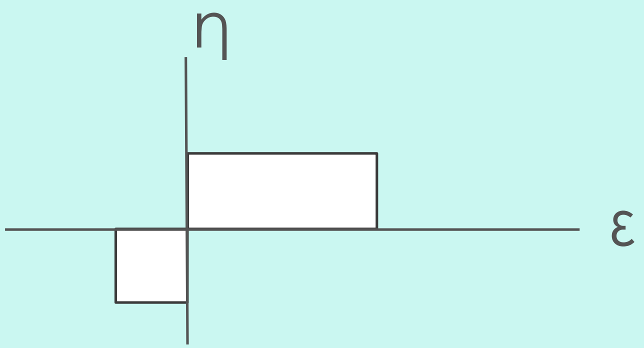
Τι κάνω για να αποδείξω ότι δυο ευθείες ε και η, είναι μεταξύ τους κάθετες;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

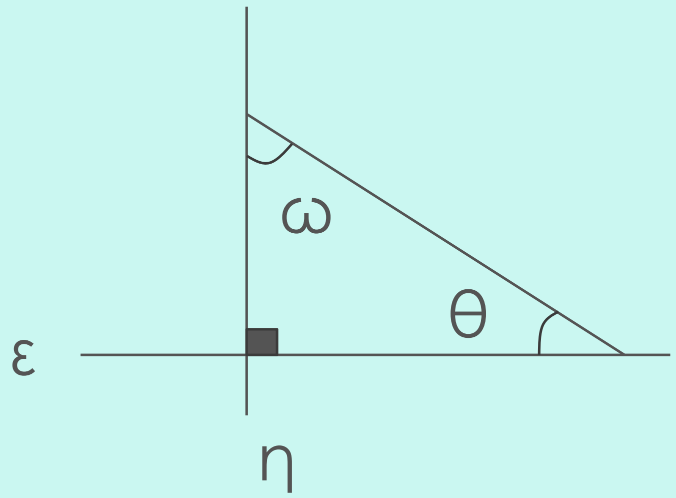
- $\Delta \varepsilon \acute{\iota} \chi \nu \omega \ \acute{o} \tau \iota \quad \hat{\psi} = 90^o \rightarrow$



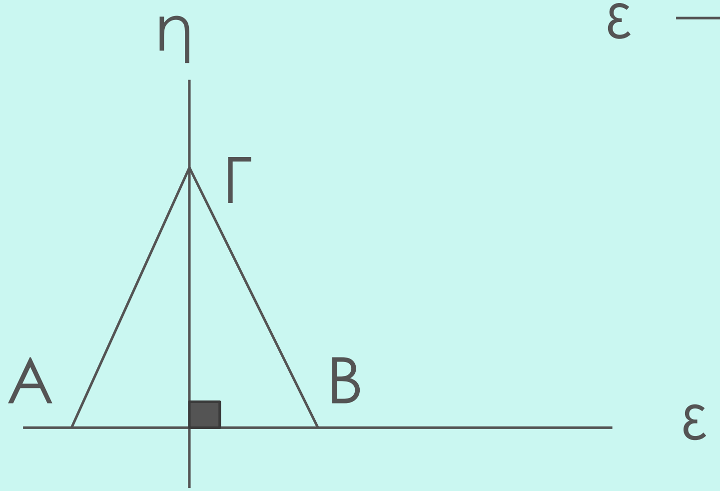
- *ή δείχνω ότι είναι σε πλευρές τετραγώνου ή ορθογωνίου* →



- $\acute{\eta} \quad \delta \varepsilon \acute{\iota} \chi \nu \omega \ \acute{o} \tau \iota \quad \hat{\omega} + \hat{\theta} = 90^o \rightarrow$

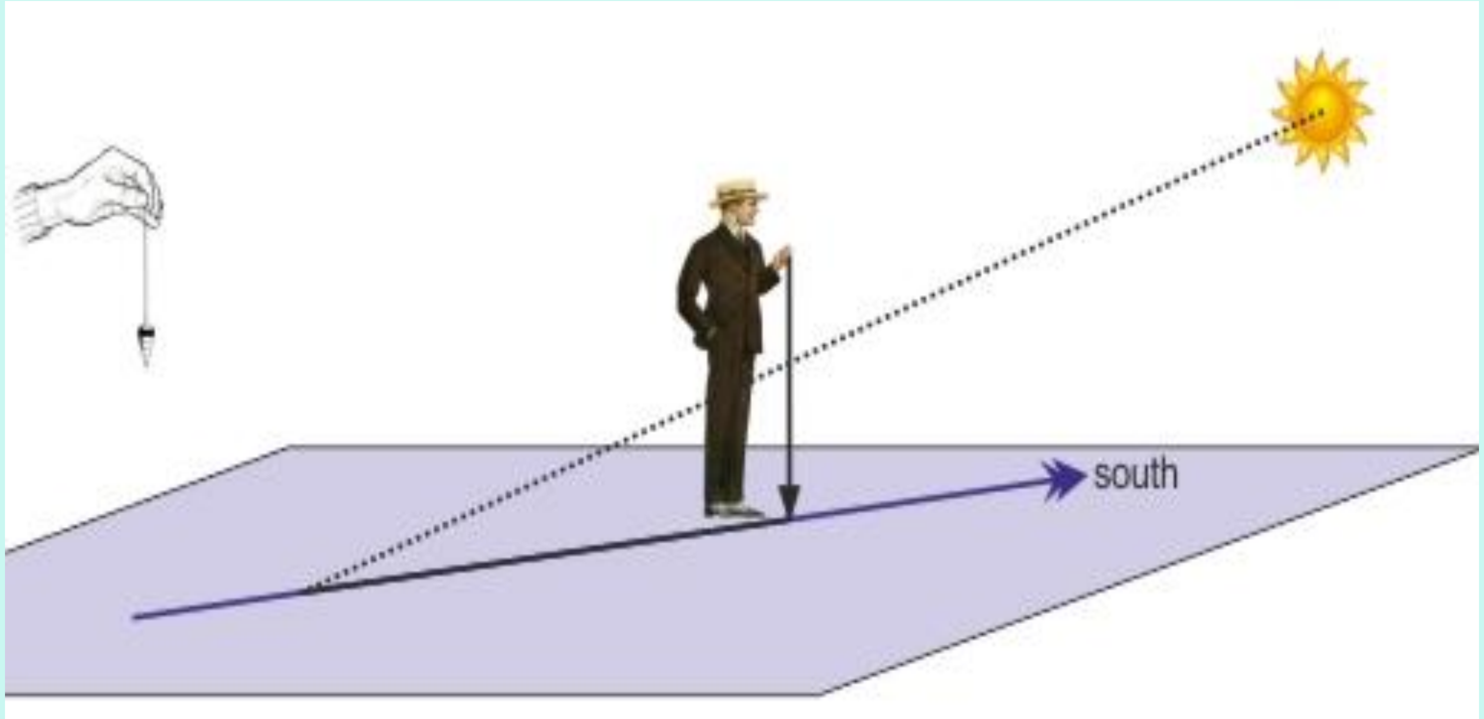


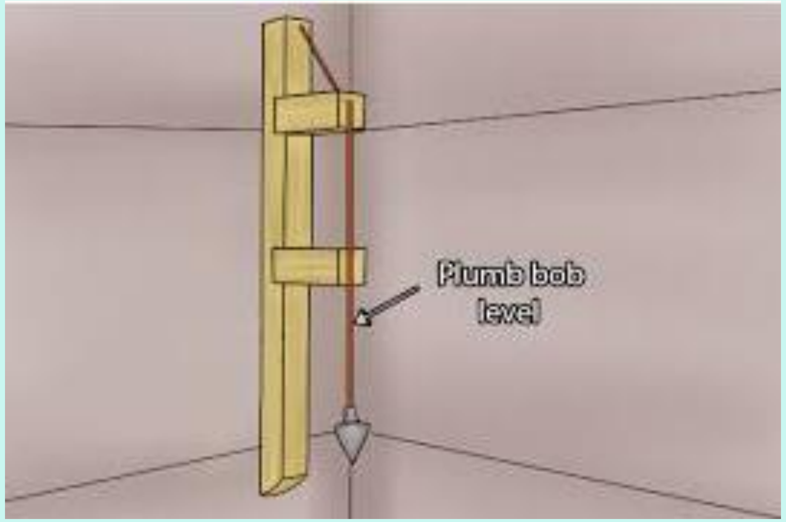
- $\acute{\eta}$ $\delta \varepsilon \acute{\iota} \chi \nu \omega \ \acute{o} \tau \iota \ \ \eta \ \ \varepsilon \acute{\iota} \nu \alpha \iota$ $\mu \varepsilon \sigma o \kappa \acute{\alpha} \theta \varepsilon \tau o \varsigma \ \sigma \varepsilon$ $\varepsilon \upsilon \theta \acute{\upsilon} \gamma \rho \alpha \mu \mu o \ \tau \mu \acute{\eta} \mu \alpha$ $AB, \ \ \tau \eta \varsigma \ \varepsilon \rightarrow$

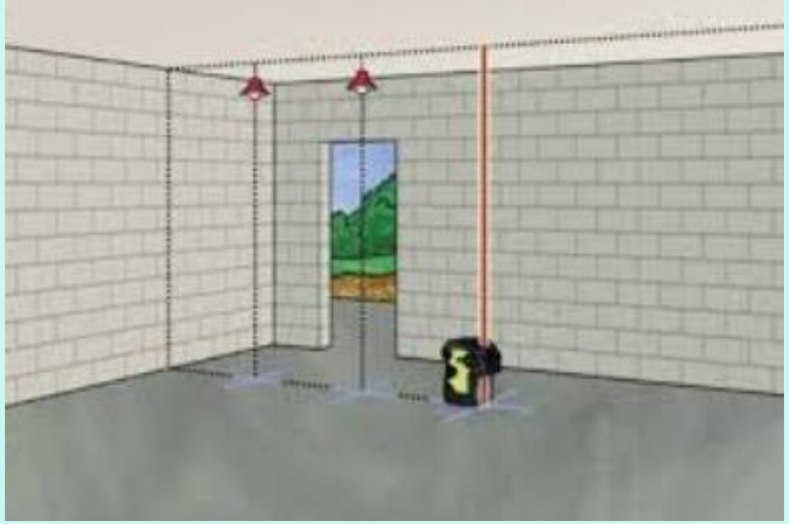


- *ή δείχνω ότι ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα.*

Με το <u>νήμα της στάθμης των μαστόρων</u>, μπορώ να κατασκευάσω μία κάθετη κολόνα από μπετόν αρμέ ή ένα κάθετο τοίχο, προς το έδαφος.



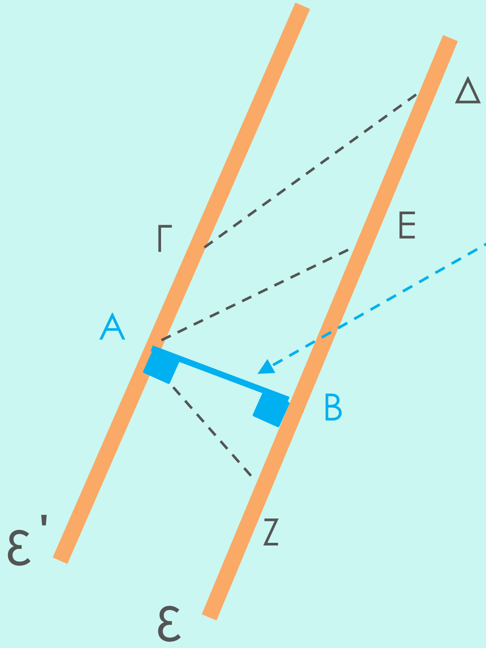




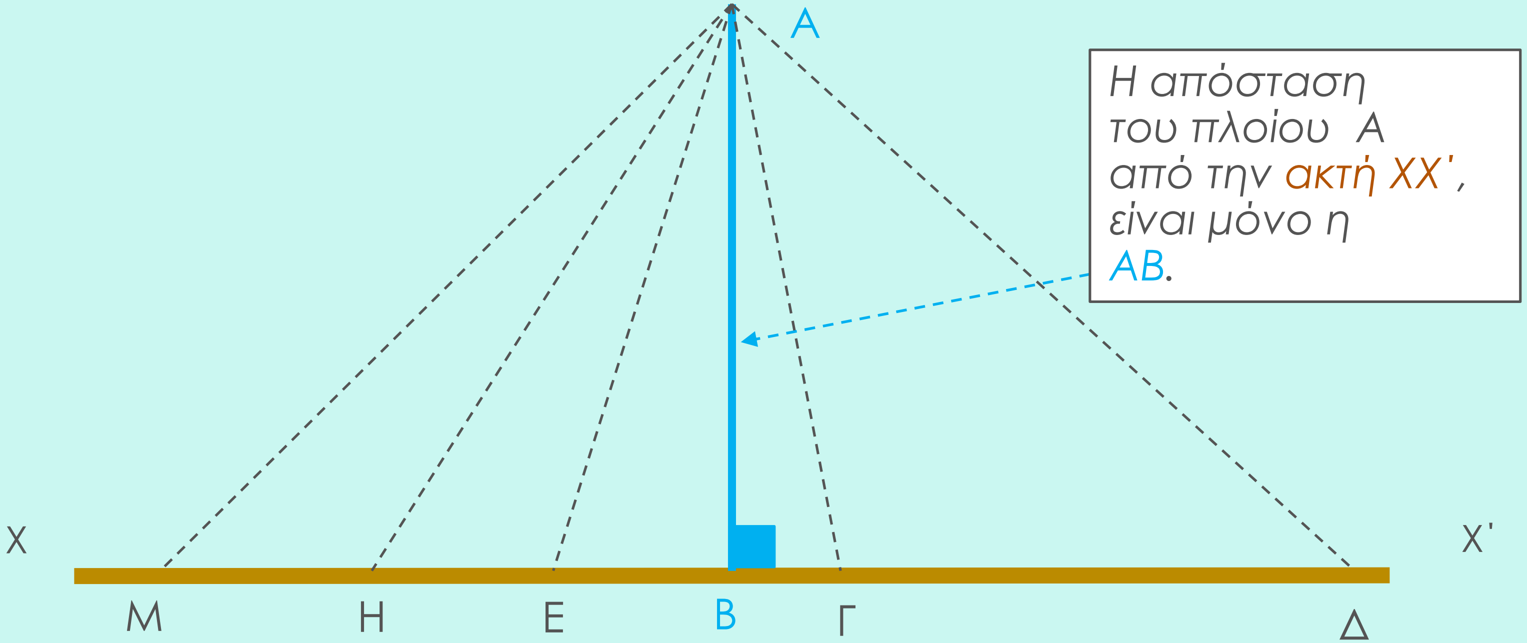
Τι γωνία «κρύβει» πάντα η λέξη απόσταση ;

ΑΠ

Γωνία ορθή = γωνία 90 μοιρών.



Η απόσταση των ε // ε' είναι μόνο η ΑΒ



Η απόσταση του πλοίου Α από την ακτή ΧΧ', είναι μόνο η ΑΒ.

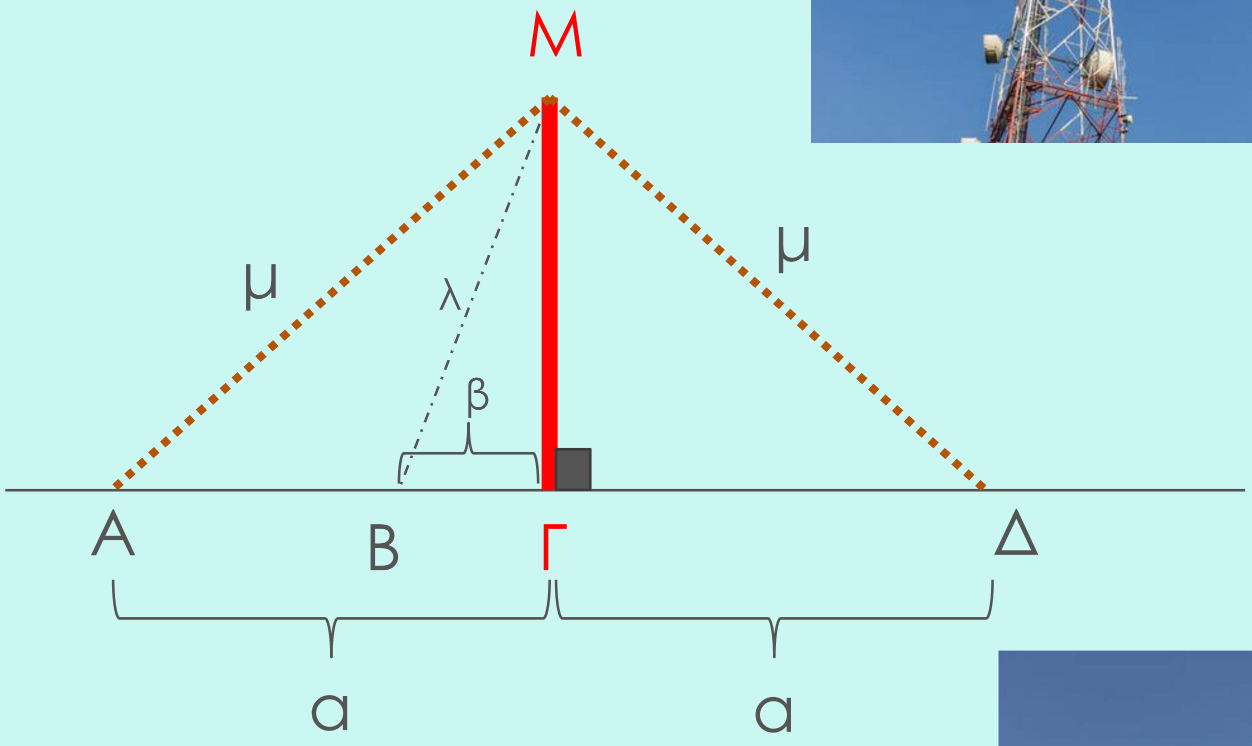
Οι πλάγιες και η κάθετη.

- *Η κάθετη προς το έδαφος αντένα* *ΜΓ* *του ραδιοφώνου, έχει τα συρματόσχοινα ΜΑ και ΜΔ μεταξύ τους ίσα.*
  Τότε και οι αποστάσεις ΓΑ και ΓΔ στο έδαφος, είναι μεταξύ τους ίσες.

$$\boxed{\alpha = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \mu}$$

- *Η απόσταση του Δ από το Γ στο έδαφος, είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του Β από το Γ.*
  Τότε και το συρματόσχοινο ΜΔ θα είναι σίγουρα μεγαλύτερο από το συρματόσχοινο ΜΒ.

$$\boxed{\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mu > \lambda}$$



ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΤΑ ΤΡΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

Π - Π - Π

Π - Γ – Π

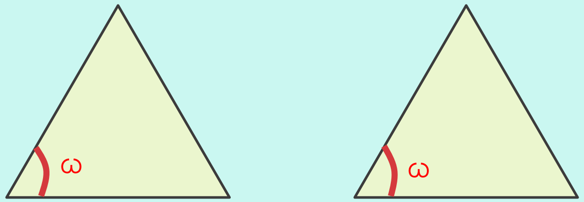
Γ – Π – Γ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΌΧΙ ΝΑ ΕΧΩ ΜΟΝΟ ΓΩΝΙΕΣ Γ.
ΠΡΕΠΕΙ ΠΑΝΤΑ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΛΕΥΡΑ Π.

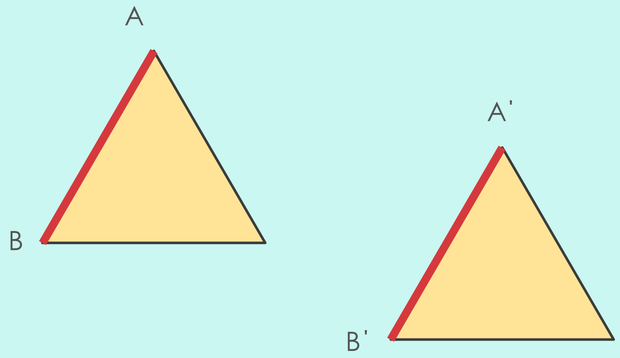
Τι κάνω για να αποδείξω ότι είναι μεταξύ τους ίσα, δυο ευθύγραμμα τμήματα ή δυο γωνίες ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- *Προσπαθώ να βρώ παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα, δυο τρίγωνα που να περιέχουν αυτά τα δυο ευθύγραμμα τμήματα ή αυτές τις δυο γωνίες.*
- *Αν αποδείξω με ένα από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, ότι αυτά τα δυο τρίγωνα είναι μεταξύ τους ίσα, τότε έχω αποδείξει το ζητούμενο.*



Δύο γωνίες ίσες
ω = ω

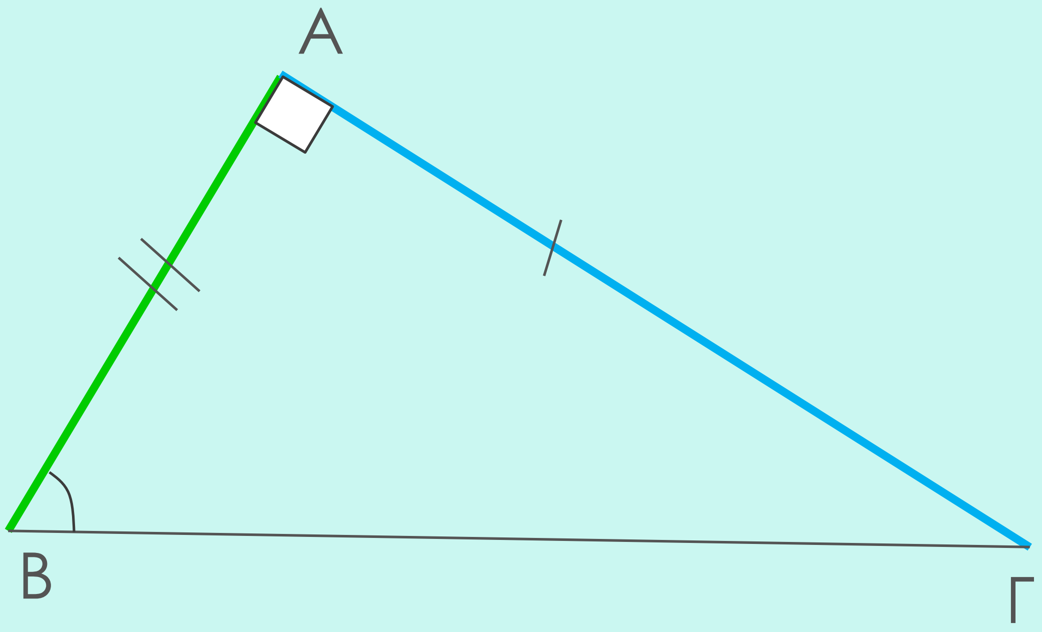


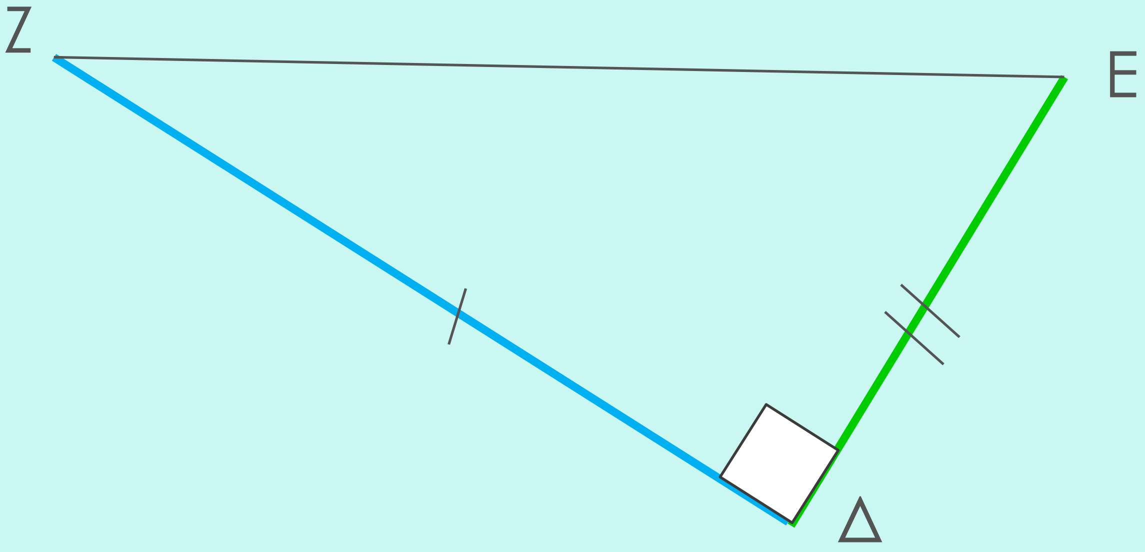
Δύο ευθύγραμμα τμήματα ίσα
AB = A'B'

Τι ισχύει στην ισότητα δυο ορθογωνίων τριγώνων;

ΑΠ:

Στα ορθογώνια τρίγωνα, έχω ήδη ένα στοιχείο. Δηλαδή έχουν μία γωνία ίση με 90 μοίρες ως ορθή και πρέπει να ισχύουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.



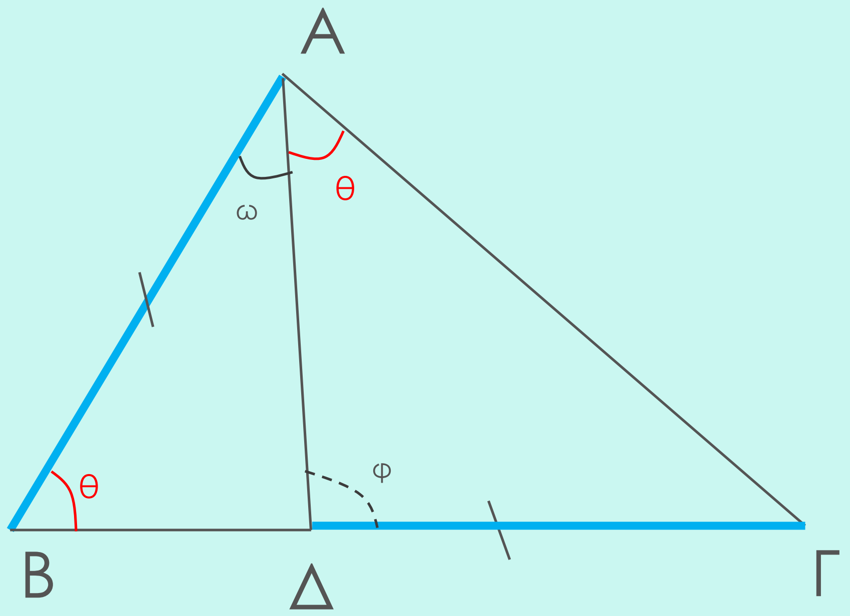


Στο διπλανό σχήμα των δύο ορθογωνίων τριγώνων, ισχύει το κριτήριο Π-Γ-Π διότι ΔΖ = ΑΓ , είναι ορθογώνια και ΔΕ = ΑΒ

Για να δείξω ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, αρκεί να δείξω ένα από τα εξής:
Π – Γ αντίστοιχα
Π – Π αντίστοιχα

Γιατί στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ
και ΑΔΓ, <u>δεν είναι ίσα</u> ενώ
έχουν μεταξύ τους τα εξής τρία στοιχεία ίσα:

Πλευρά ΑΔ = κοινή.
ΑΒ = ΔΓ.
Γωνία θ = γωνία θ.



ΑΠ:

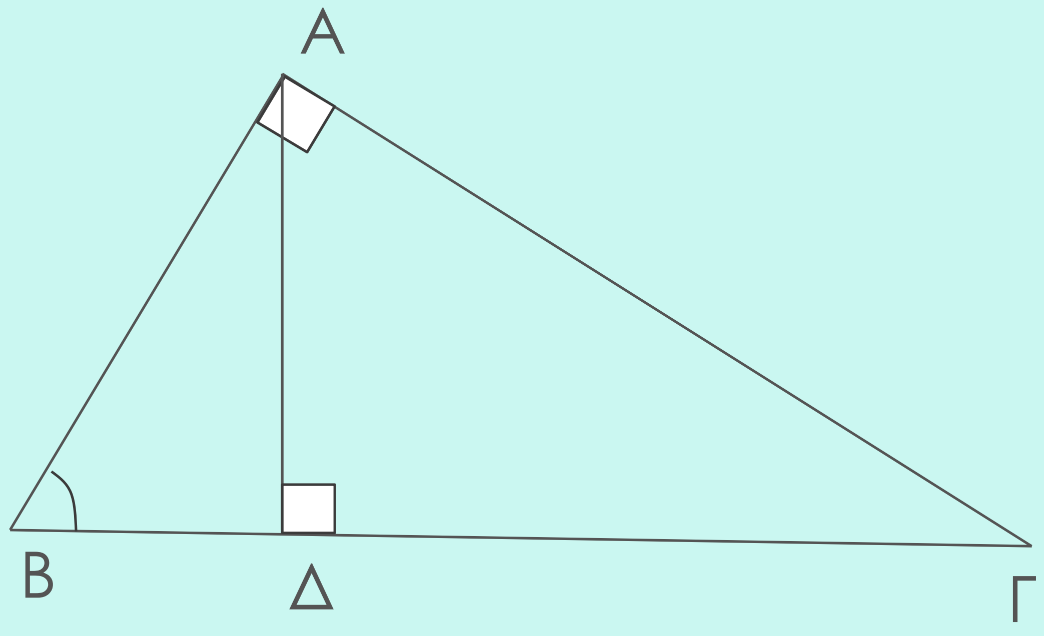
Δεν ισχύουν ακριβώς τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Δηλαδή ενώ έχουν την ΑΔ κοινή και ΑΒ = ΔΓ, η περιεχόμενη γωνία μεταξύ αυτών των ίσων πλευρών τους, δεν είναι αντίστοιχα ίση (ω ≠ φ).

Δηλαδή δεν ισχύει το Π – Γ – Π ακριβώς.

Γιατί στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ
και ΑΒΔ, δεν είναι ίσα ενώ
έχουν μεταξύ τους τα εξής τρία στοιχεία ίσα:

Πλευρά ΑΒ = κοινή.
Είναι ορθογώνια.
Γωνία Β = κοινή.

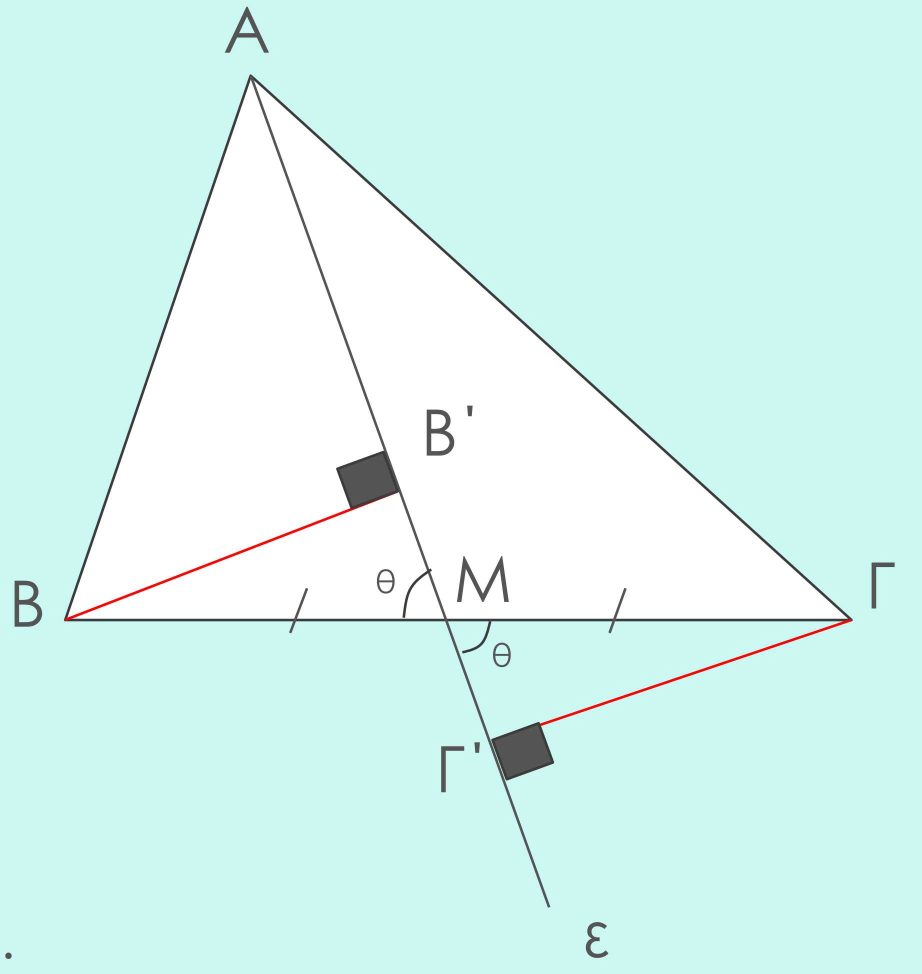


ΑΠ:

Δεν ισχύουν ακριβώς τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Δηλαδή ενώ έχουν την γωνία Β κοινή, οι προσκείμενες πλευρές ΒΔ του τριγώνου ΑΒΔ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, δεν είναι αντίστοιχα ίσες.
Δηλαδή δεν ισχύει το Π – Γ – Π ακριβώς.

Στο διπλανό σχήμα δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.
Φέρω τα ΒΒ' και ΓΓ' κάθετα προς την ε.
Να αποδειχθεί ότι ΒΒ' = ΓΓ'.



ΑΠ:

Αναζητώ δύο τρίγωνα που να έχουν τα ΒΒ' και ΓΓ' πλευρές.

Αρκεί να δείξω ότι τρίγωνο ΒΜΒ' = τρίγωνο ΓΜΓ'.

Τα τρίγωνα αυτά έχουν:

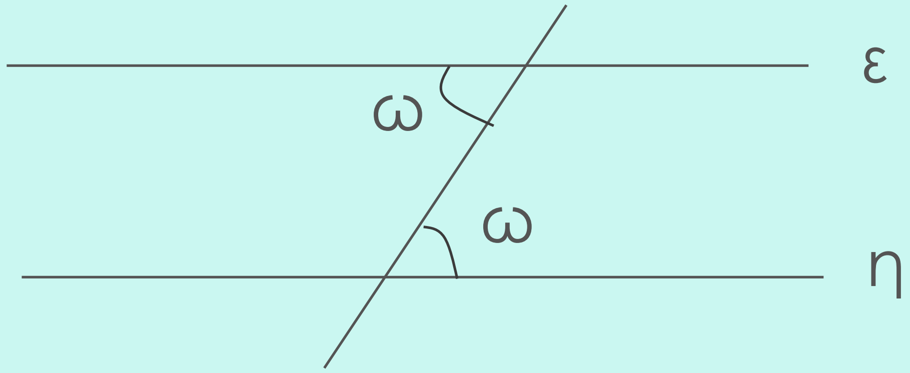
- *Είναι ορθογώνια (από την υπόθεση τα ΒΒ' και ΓΓ' είναι κάθετα στην ε).*
- *ΒΜ = ΜΓ (από την υπόθεση ΑΜ διάμεσος).*
- *θ = θ (ως κατακορυφήν γωνίες από το σχήμα).*

Άρα τρίγωνο ΒΜΒ' = τρίγωνο ΓΜΓ' → ΒΒ' = ΓΓ'

Παρατηρώ ότι ΒΜ = ΜΓ και θ = θ και τα τρίγωνα ΒΜΒ' , ΓΜΓ' είναι ορθογώνια.
Άρα θα έχουν και την άλλη γωνία ιση, διότι το άθροισμα και των τριών γωνιών ενός τρίγωνου, είναι ίσο με 180 μοίρες. Δηλαδή πράγματι ισχύει το κριτήριο Γ-Π-Γ

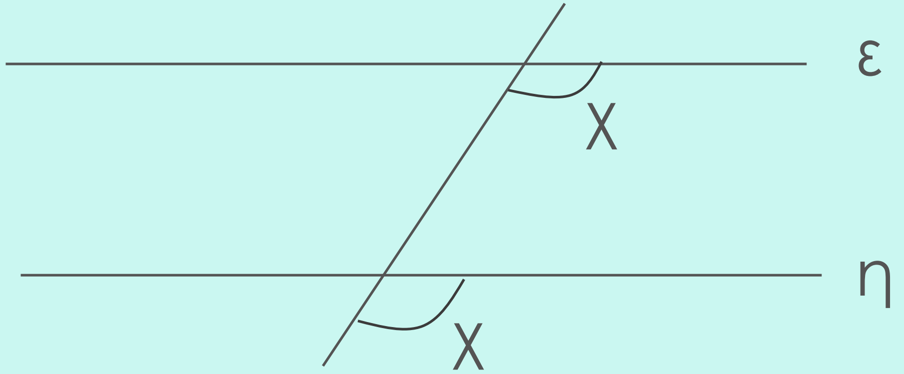
- *ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ (ΣΤΟ ΓΡΑΜΜΑ Ζ).*
  ω = ω

  $\boxed{\omega = \omega \Leftrightarrow \varepsilon // \eta}$



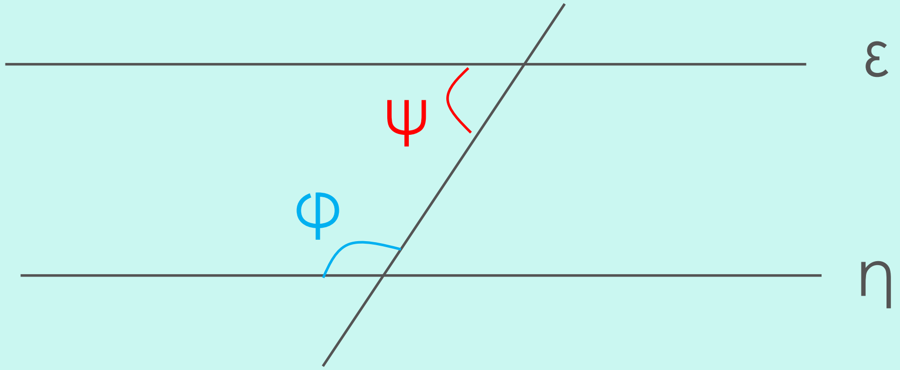
- *ΕΝΤΟΣ ΕΚΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ.*
  χ = χ

  $\boxed{\chi = \chi \Leftrightarrow \varepsilon // \eta}$



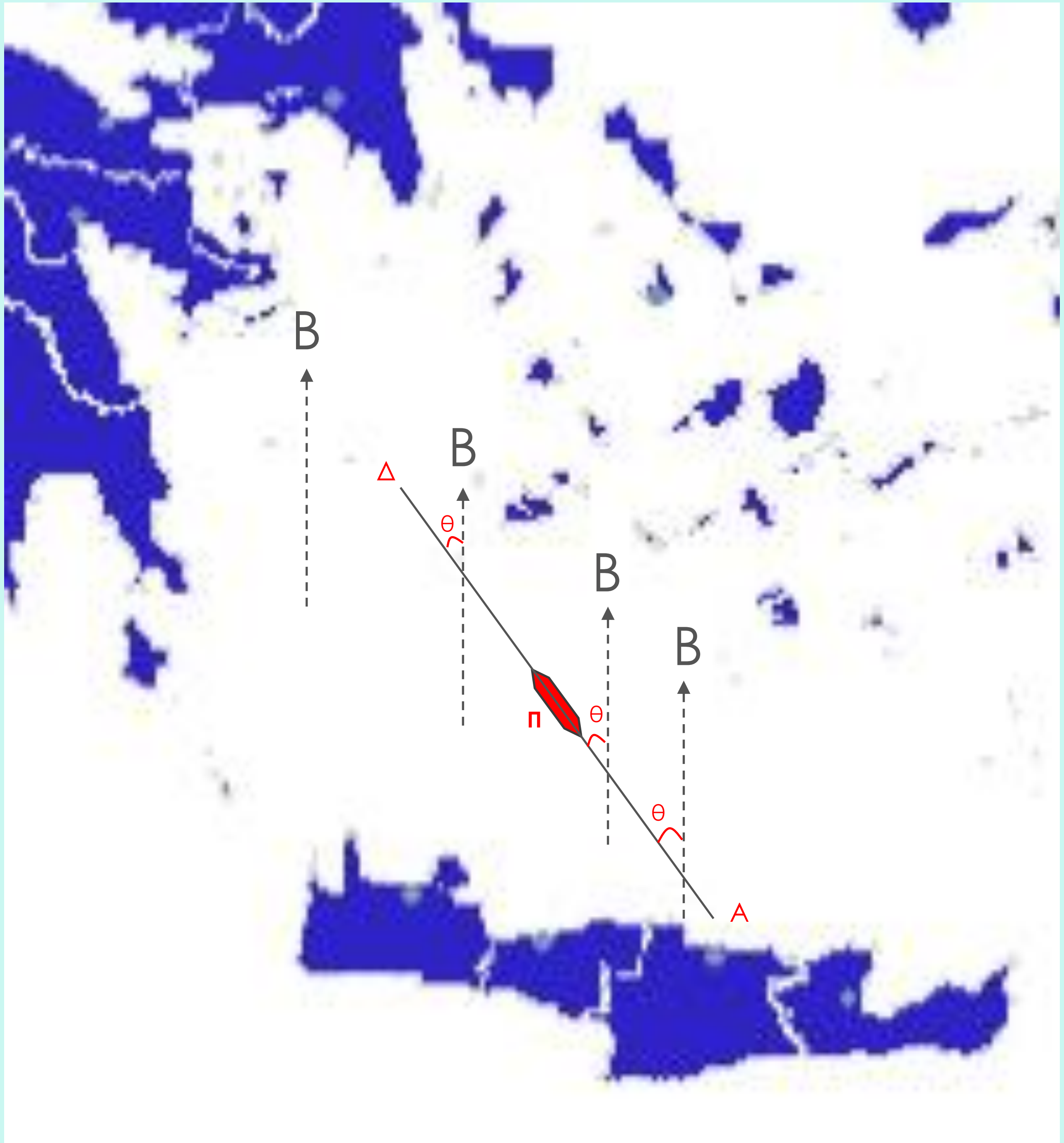
- *ΕΝΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ.*
  ψ + φ = 180 μοίρες

  $\boxed{\psi + \varphi = 180 \Leftrightarrow \varepsilon // \eta}$

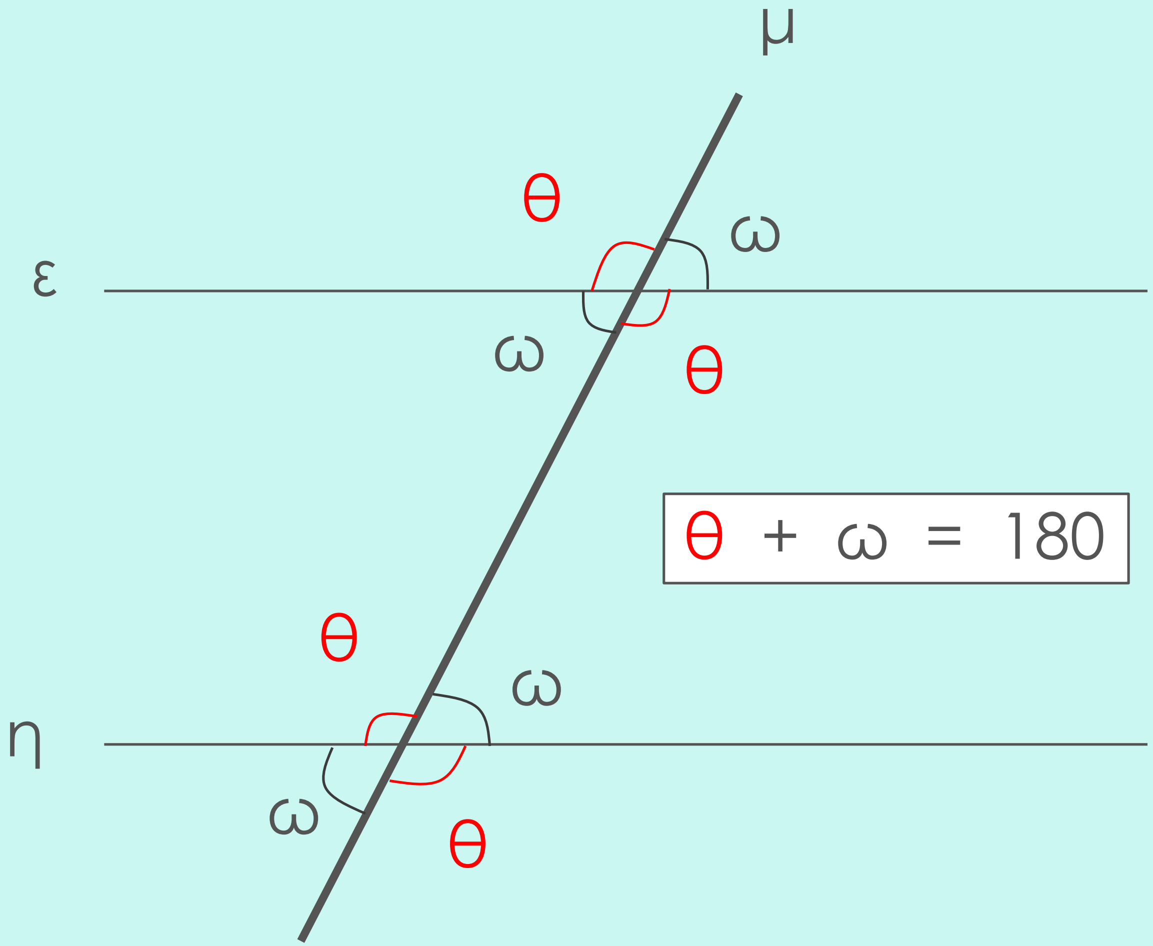


Πως ταξιδεύει την νύχτα με την πυξίδα το πλοίο Π, από το σημείο Α προς το σημείο Δ ;

Το πλήρωμα παρακολουθεί την γωνία θ που σχηματίζει η γραμμή πλώρης (άξονας συμμετρίας) του πλοίου με τον βορρά Β, στην πυξίδα της γέφυρας (θάλαμος διακυβέρνησης) του πλοίου.
Με την βοήθεια του τιμονιού η γωνία θ που δείχνει η πυξίδα, διατηρείται σταθερή.
Επειδή η διεύθυνση του βορρά Β είναι σταθερή,
οι γωνίες θ είναι μεταξύ τους ίσες, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

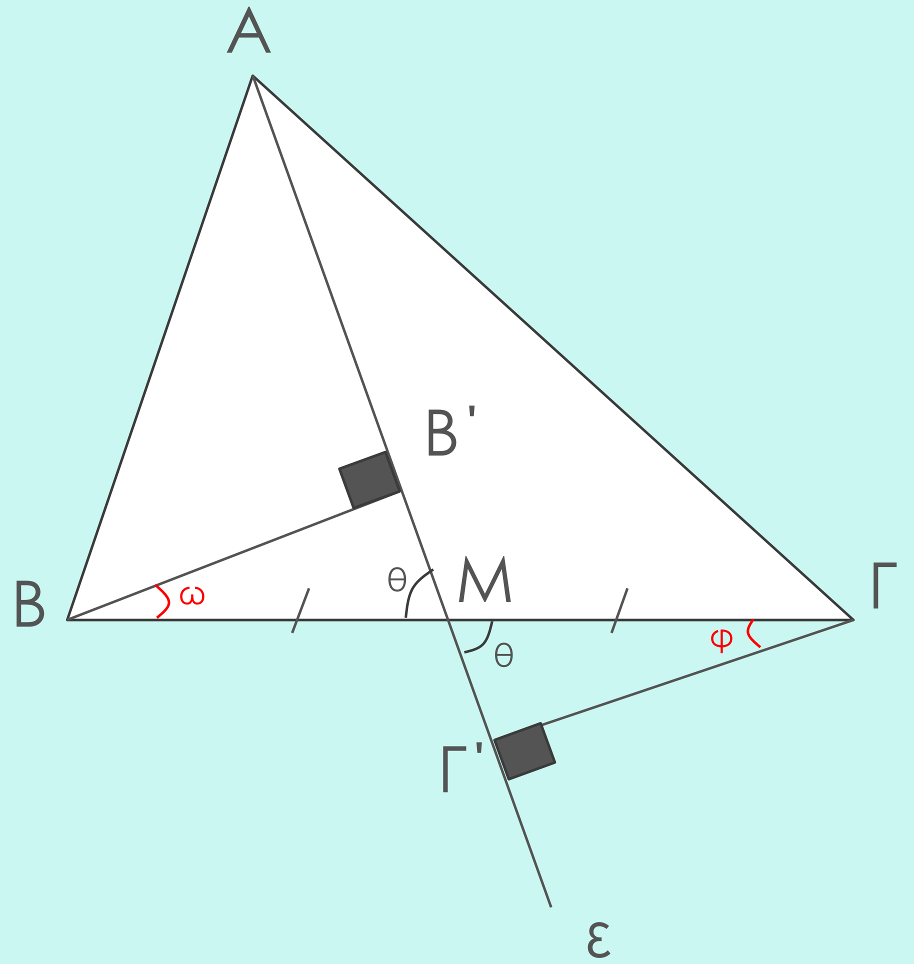


Τι συμβαίνει όταν
μια τυχαία ευθεία μ
τέμνει δύο παράλληλες
ευθείες ε και η:



$$\boxed{\theta + \omega = 180}$$

Στο διπλανό σχήμα δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Φέρω τα ΒΒ΄ και ΓΓ΄ κάθετα προς την ε. Να αποδειχθεί ότι, γωνία ω = γωνία φ.



ΑΠ:

Αναζητώ δύο τρίγωνα που να έχουν τις γωνίες ω και φ.

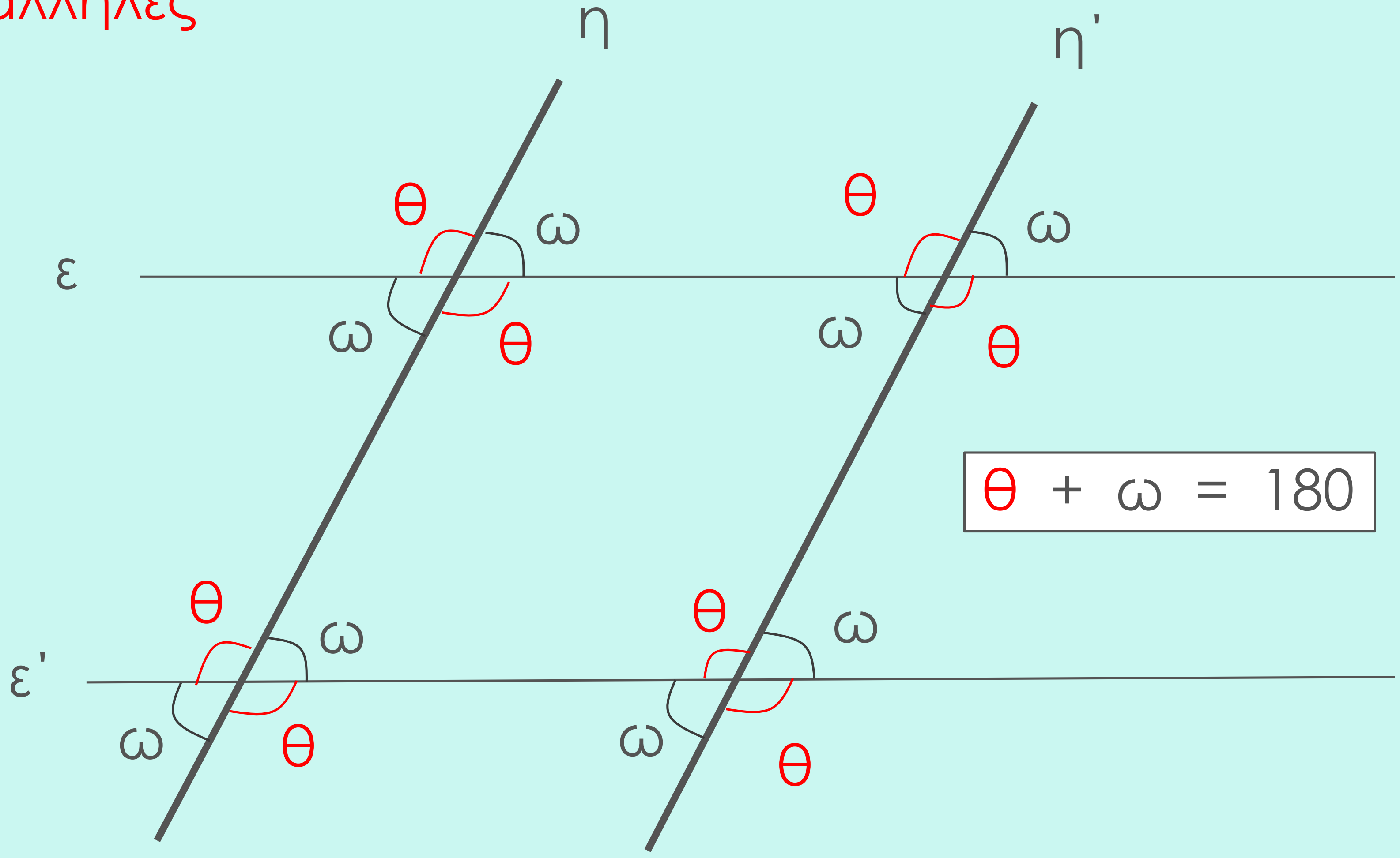
Αρκεί να δείξω ότι τρίγωνο ΒΜΒ΄ = τρίγωνο ΓΜΓ΄.

Τα τρίγωνα αυτά έχουν:
- *Είναι ορθογώνια (από την υπόθεση).*
- *ΒΜ = ΜΓ (από την υπόθεση).*
- *θ = θ (ως κατακορυφήν γωνίες από το σχήμα).*

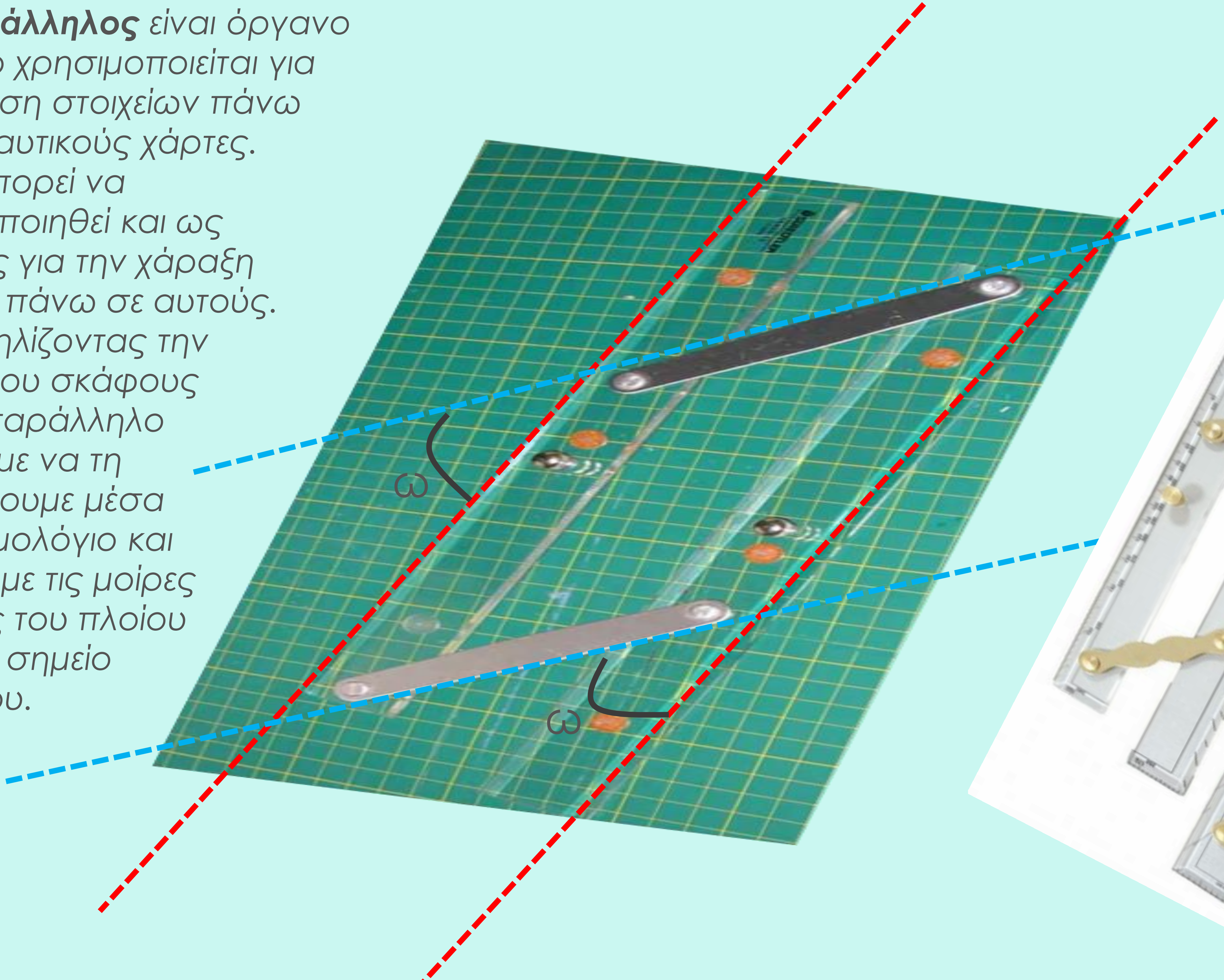
Άρα τρίγωνο ΒΜΒ΄ = τρίγωνο ΓΜΓ΄ → ω = φ

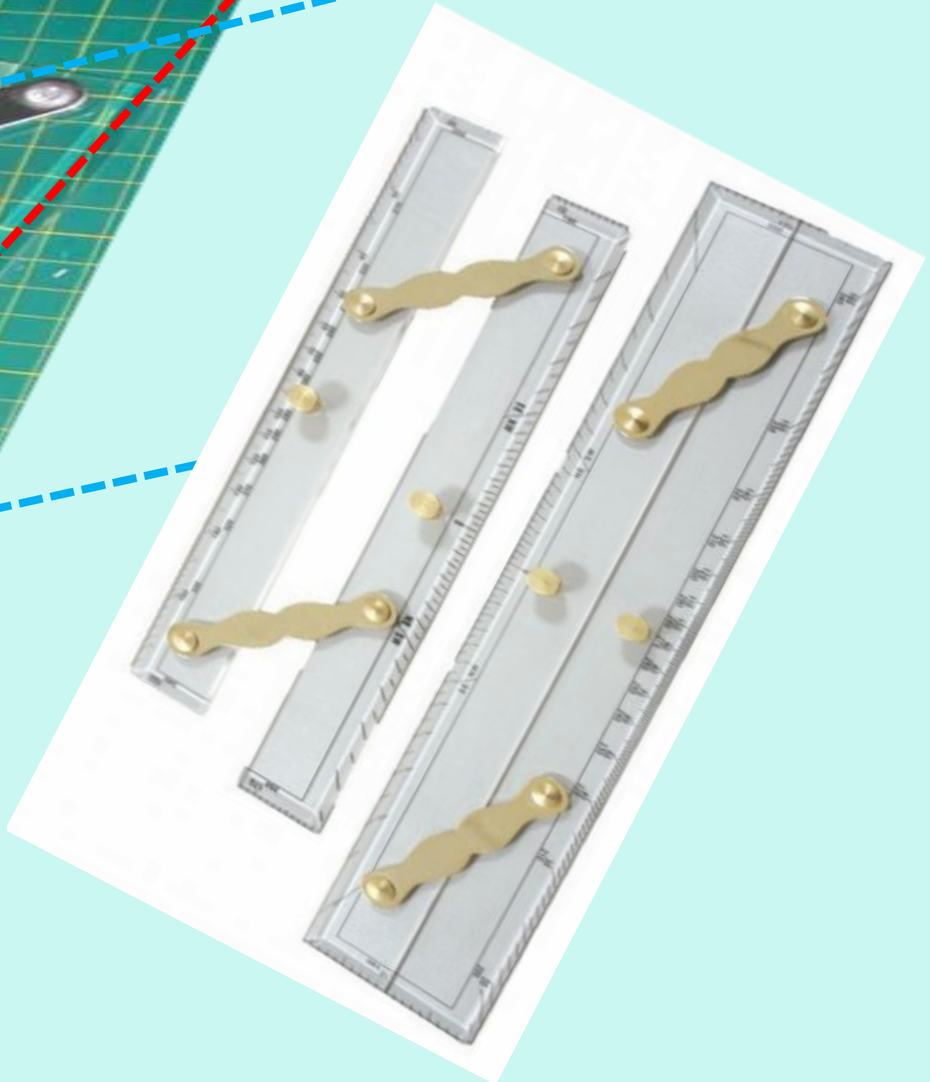
<u>Αλλιώς πιο σύντομα:</u> ω = φ ως εντός εναλλάξ, διότι ΒΒ΄ // ΓΓ΄ επειδή είναι κάθετα στην ίδια ευθεία ε από την υπόθεση.

Τι συμβαίνει όταν δύο παράλληλες ευθείες η και η' τέμνουν δύο άλλες παράλληλες ευθείες ε και ε' :



Ο **διπαράλληλος** είναι όργανο το οποίο χρησιμοποιείται για την εύρεση στοιχείων πάνω στους ναυτικούς χάρτες. Ενίοτε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως χάρακας για την χάραξη πορείας πάνω σε αυτούς. Παραλληλίζοντας την πορεία του σκάφους με το διπαράλληλο μπορούμε να τη μεταφέρουμε μέσα στο ανεμολόγιο και να βρούμε τις μοίρες πλεύσης του πλοίου προς το σημείο κατάπλου.

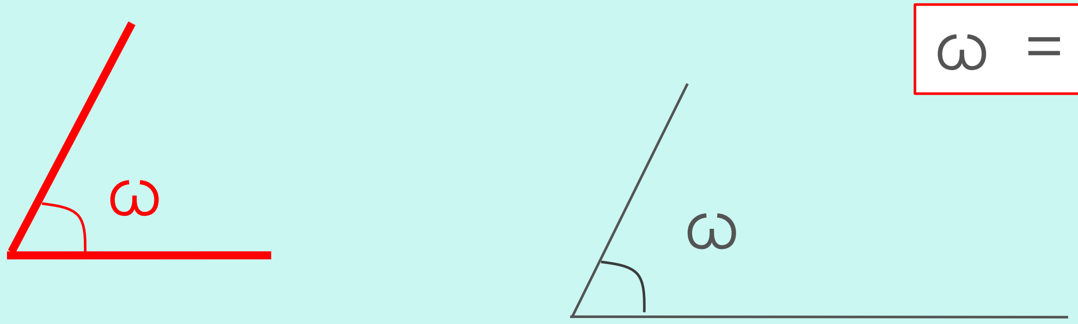




Τι συμβαίνει όταν δύο γωνίες έχουν <u>παράλληλες τις πλευρές τους</u> μία προς μία ;

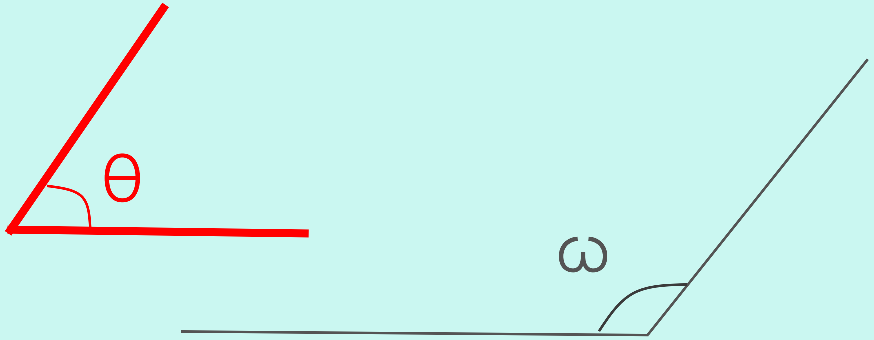
ΑΠ:

Αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, τότε είναι ίσες. →



$\boxed{\omega = \omega}$

Αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία τότε είναι παραπληρωματικές. →

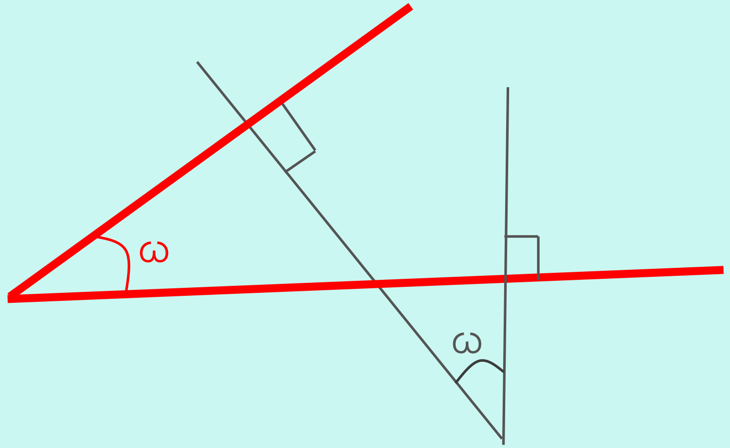


$\boxed{\theta + \omega = 180}$

Τι συμβαίνει όταν δύο γωνίες έχουν <u>κάθετες τις πλευρές τους</u>
μία προς μία ;

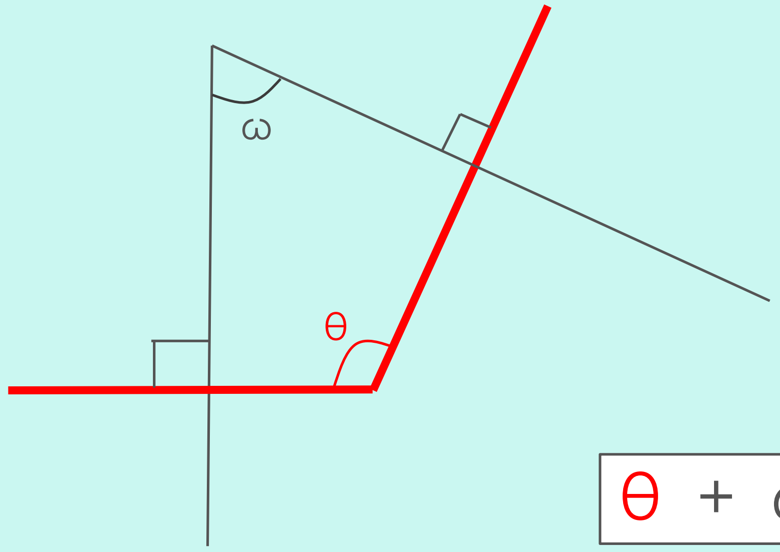
ΑΠ:

Αν είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες, τότε είναι ίσες. →



$\boxed{\omega = \omega}$

Αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι παραπληρωματικές. →



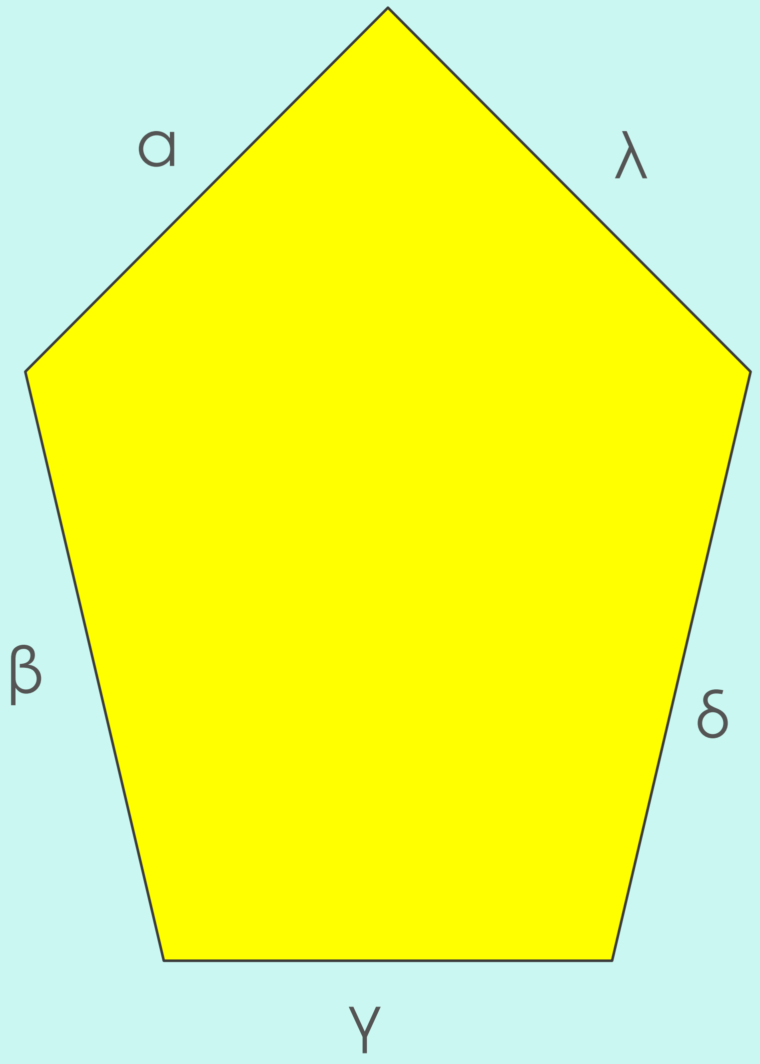
$\boxed{\theta + \omega = 180}$

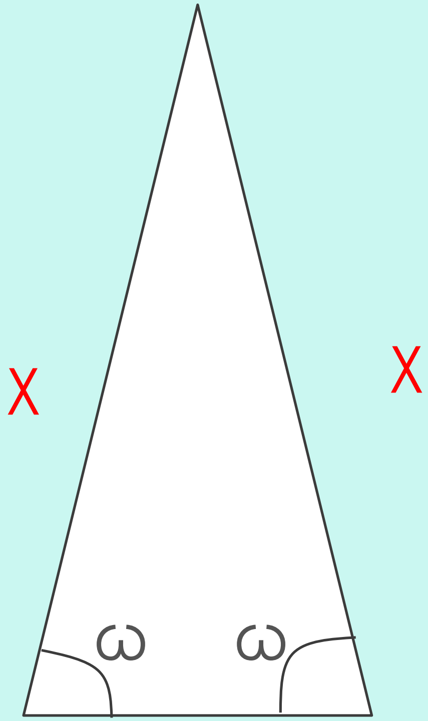
Τι είναι περίμετρος;

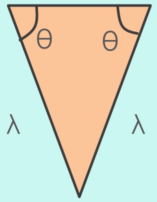
ΑΠ:

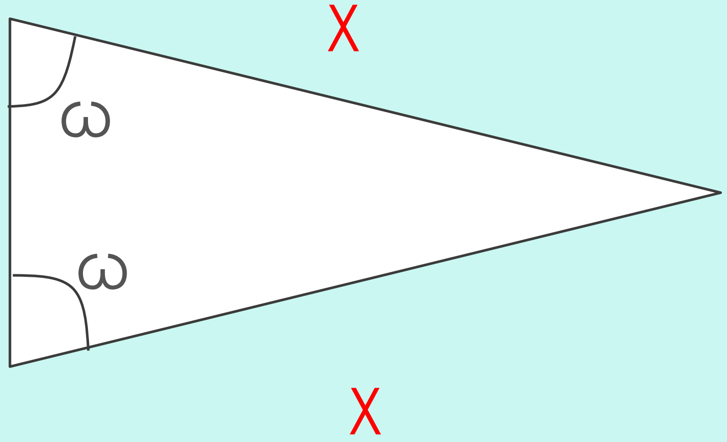
Το άθροισμα όλων των πλευρών, του επίπεδου σχήματος.

$Π = περίμετρος = α + β + γ + δ + λ$





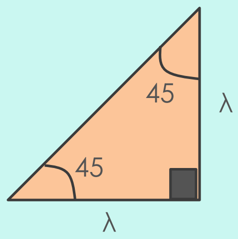


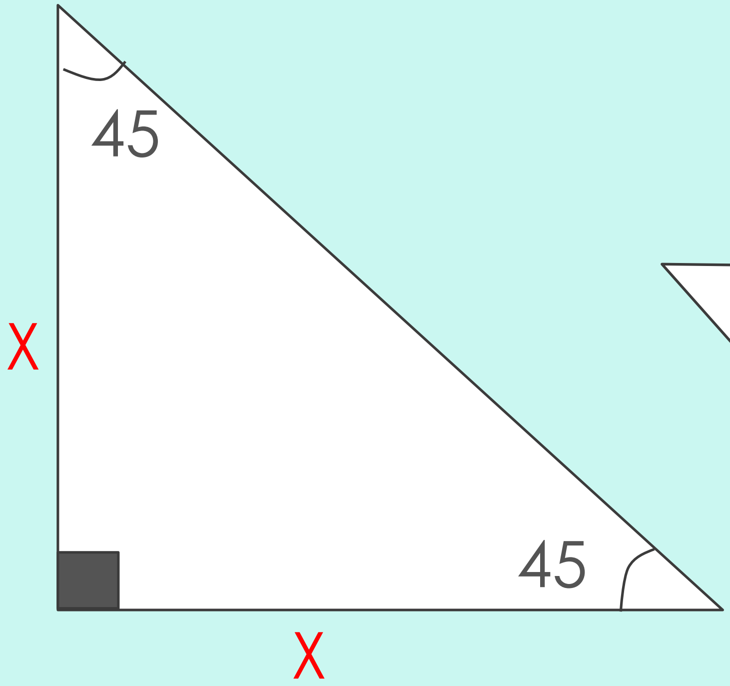


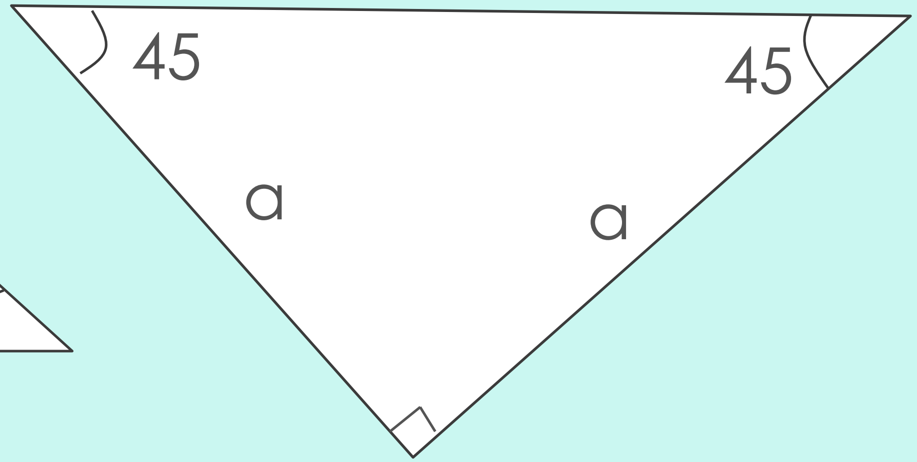
ΣΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΧΩ
ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ

Πλευρές: $\chi = \chi$

Γωνίες: $\omega = \omega$



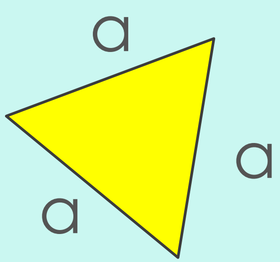


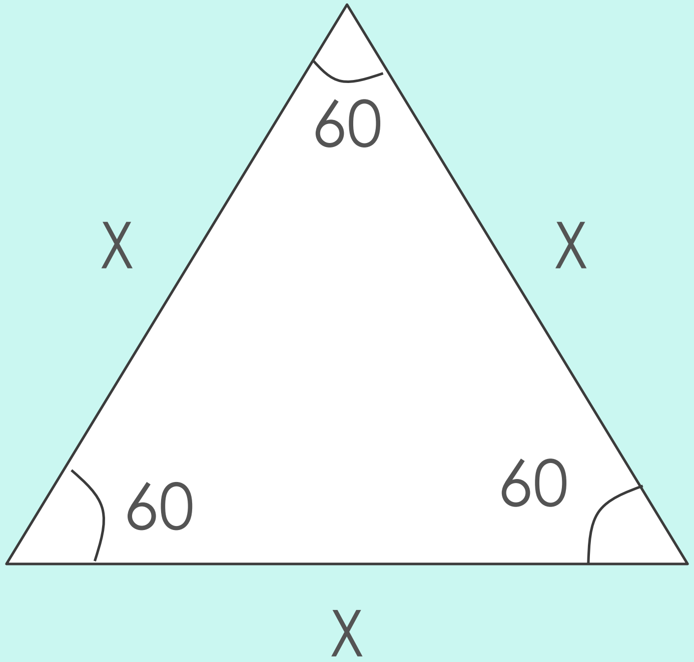


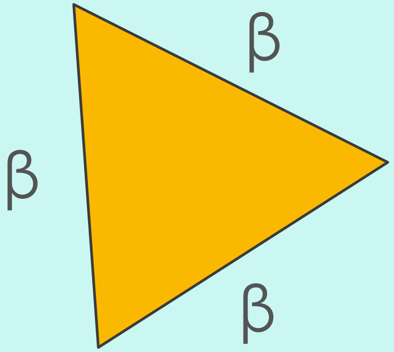
ΣΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΧΩ ΤΙΣ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ ΚΑΙ ΔΥΟ ΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ ΜΕ 45 ΜΟΙΡΕΣ.

Κάθετες πλευρές: χ = χ

Γωνίες: 45 = 45







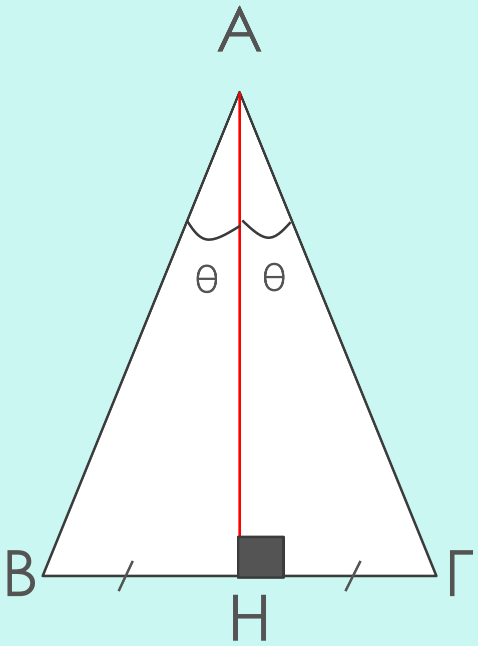
ΣΤΟ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΕΧΩ ΤΡΕΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΙ ΤΡΕΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ.

ΚΑΘΕ ΓΩΝΙΑ ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ 60 ΜΟΙΡΕΣ.

Για τις πλευρές: Χ = Χ = Χ και για τις γωνίες: 60 = 60 = 60.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α είναι ταυτόχρονα διχοτόμος της γωνίας Α και διάμεσος της βάσης ΒΓ.

→



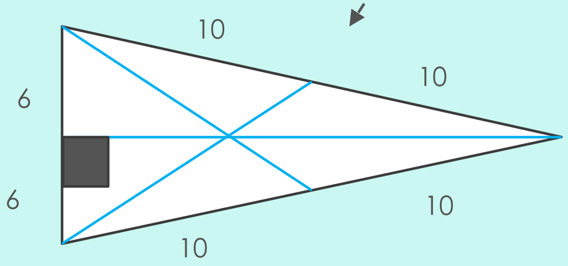
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχουν:

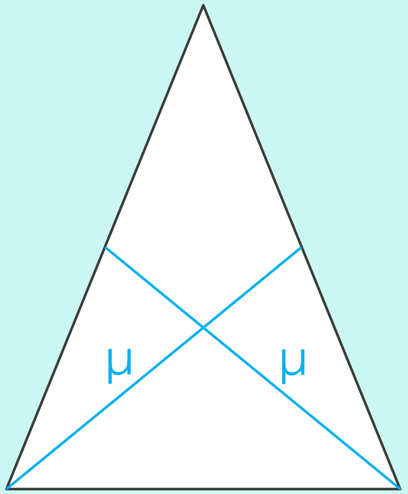
Δύο ίσα ύψη υ = υ από τις κορυφές Β και Γ.

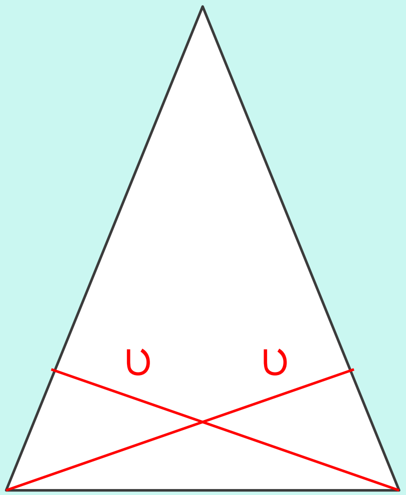
Δύο ίσες διχοτόμοι δ = δ από τις κορυφές Β και Γ.

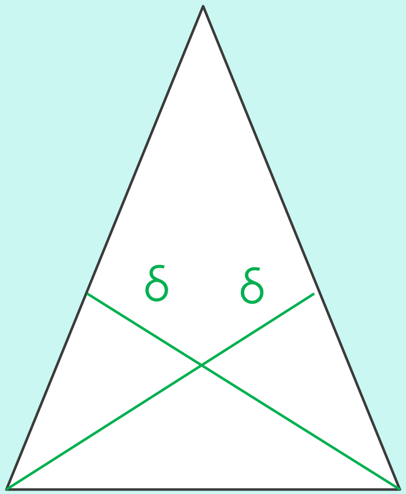
Δύο ίσες διάμεσοι μ = μ από τις κορυφές Β και Γ.

Οι 3 διάμεσοι σε ισοσκελές τρίγωνο





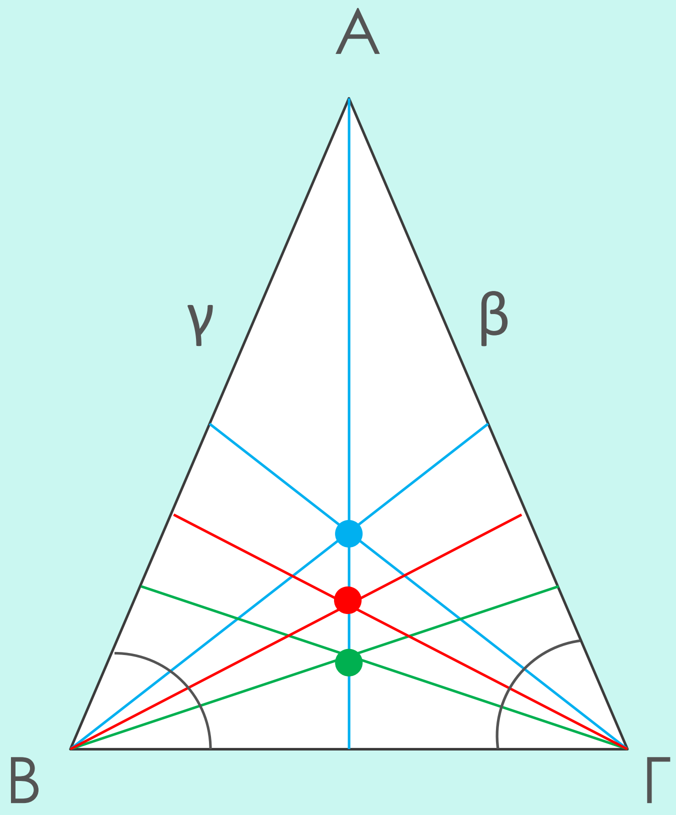




Δίδεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.
Τι γνωρίζω αμέσως ότι υπάρχει:

ΑΠ:

- *Βάση είναι η ΒΓ.*
- *Δύο ίσες πλευρές* → *β = γ.*
- *Οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες* → *Β = Γ.*
- *Δύο ίσα ύψη* → $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$
  Δύο ίσες διχοτόμοι → $\delta_\beta = \delta_\gamma$
  Δύο ίσες διάμεσοι → $\mu_\beta = \mu_\gamma$
- *Το ύψος* υ_α *προς την βάση ΒΓ, είναι ταυτόχρονα διχοτόμος, διάμεσος και μεσοκάθετος.*
- *Τα σημεία τομής των υψών, διχοτόμων και διαμέσων, βρίσκονται στην μεσοκάθετο της βάσης ΒΓ.*



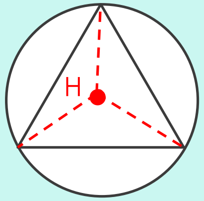
Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχουν:

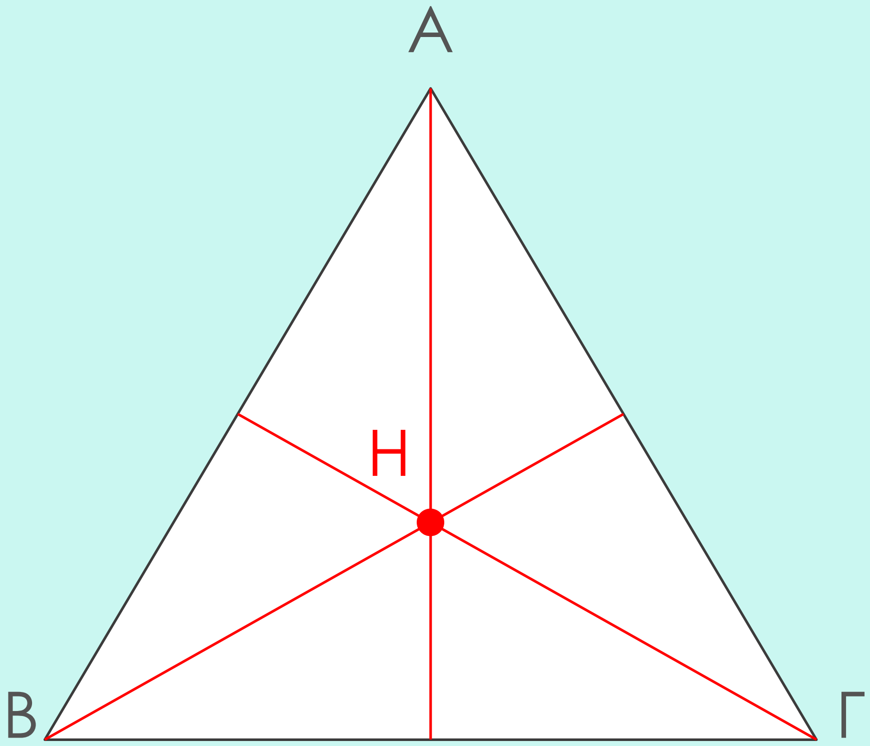
- Τρία ίσα ύψη.
  Τρεις ίσες διχοτόμοι.
  Τρεις ίσες διάμεσοι.
  Τα ύψη είναι ταυτόχρονα διχοτόμοι, διάμεσοι και μεσοκάθετοι.

- Το σημείο τομής Η των υψών, των διχοτόμων, των διαμέσων και των μεσοκαθέτων είναι το ίδιο.

- Το σημείο τομής Η των υψών, ή των διχοτόμων ή των διαμέσων ή των μεσοκαθέτων των πλευρών, είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του.

  Δηλαδή
  ΗΑ = ΗΒ = ΗΓ = R = ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου.

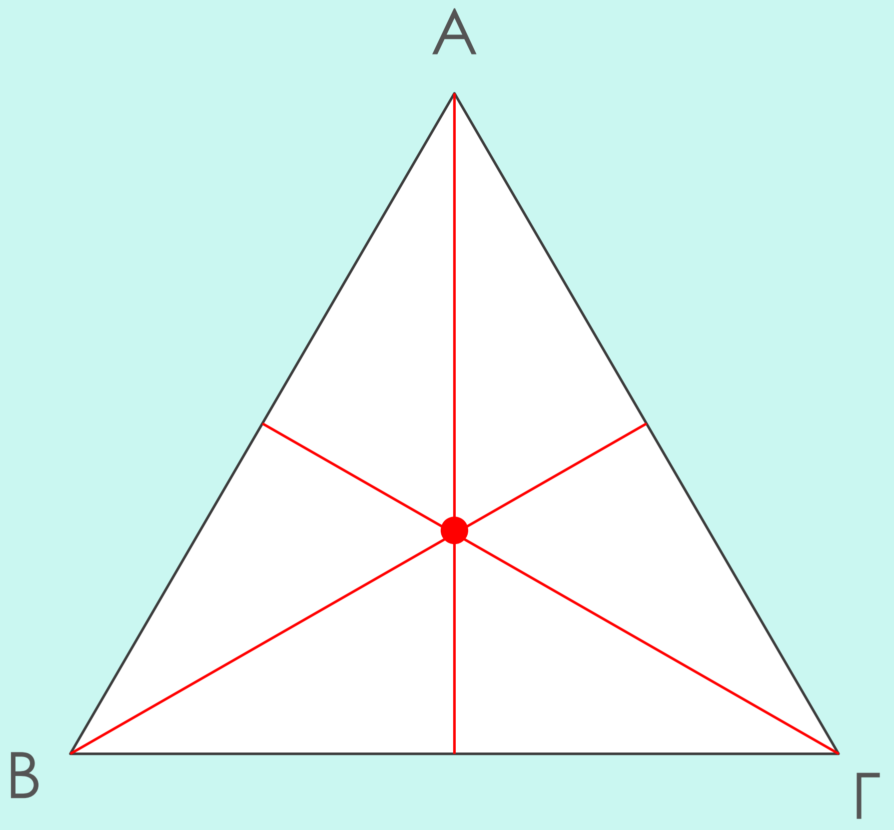




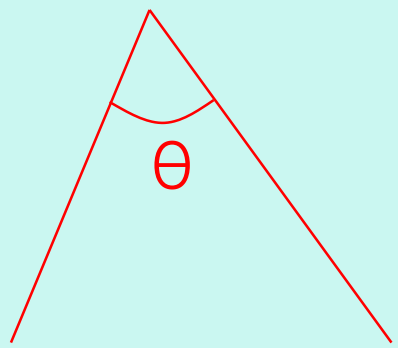
Δίδεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.
Τι γνωρίζω αμέσως ότι υπάρχει:

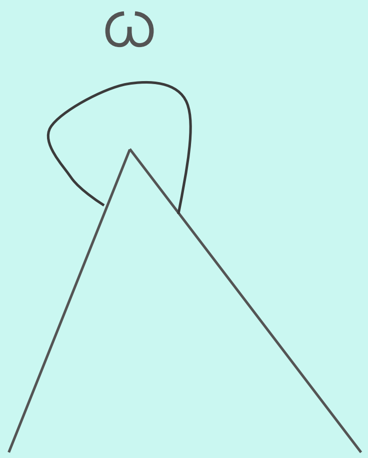
ΑΠ:

- Τρεις ίσες πλευρές → $\alpha = \beta = \gamma$.
- Τρεις ίσες γωνίες → $A = B = \Gamma = 60$.
- Τρία ίσα ύψη → $\upsilon_\alpha = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$
  Τρεις ίσες διχοτόμοι → $\delta_\alpha = \delta_\beta = \delta_\gamma$
  Τρεις ίσες διάμεσοι → $\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma$
- Τα ύψη είναι ταυτόχρονα διχοτόμοι, διάμεσοι και μεσοκάθετοι.
- Τα σημεία τομής των υψών, διχοτόμων, διαμέσων και μεσοκαθέτων, ταυτίζονται με το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου

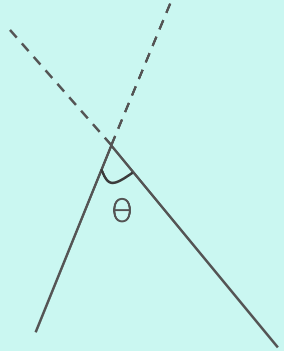


Τι είναι κυρτή γωνία;

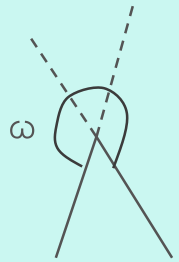




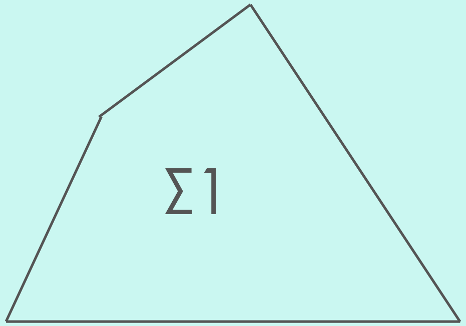
Η γωνία θ είναι κυρτή, *διότι δεν την διαπερνά καμία από τις πλευρές τις όσο και να προεκταθεί.* →

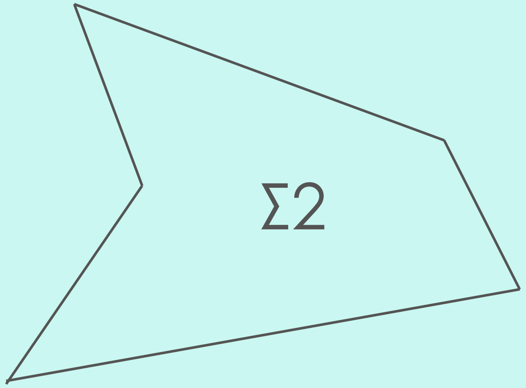


Η γωνία ω δεν είναι κυρτή, διότι την διαπερνά τουλάχιστο μια από τις πλευρές τις όταν προεκταθεί. →



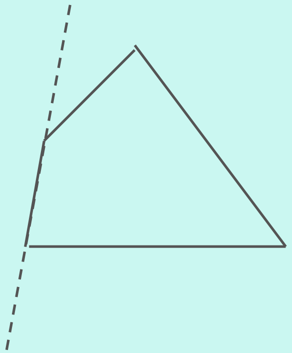
Τι είναι κυρτό πολύγωνο;





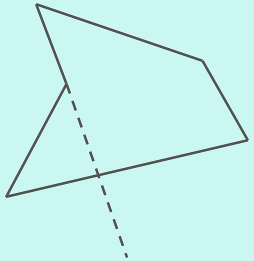
Το σχήμα Σ1 είναι κυρτό πολύγωνο, διότι κάθε πλευρά του όταν προεκταθεί, αφήνει το Σ1 προς το ίδιο μέρος, δηλαδή δεν το διαπερνά.

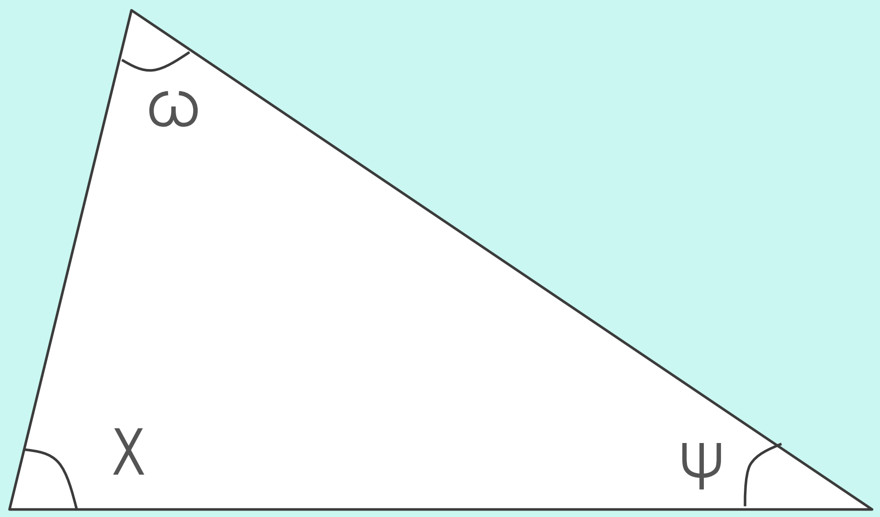
→



Το σχήμα Σ2 δεν είναι κυρτό πολύγωνο, διότι υπάρχει τουλάχιστον μια πλευρά του που όταν προεκταθεί, δεν αφήνει το Σ2 προς το ίδιο μέρος, δηλαδή το διαπερνά.

→

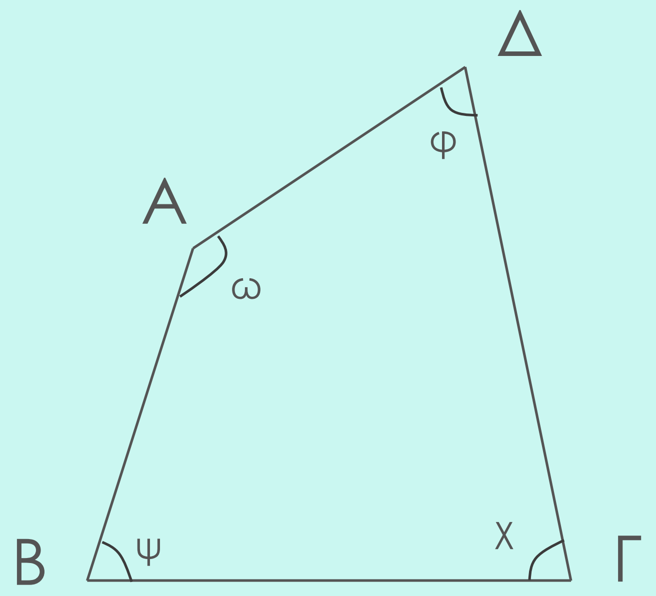




ΣΕ ΚΑΘΕ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΟΥ, ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ 180 ΜΟΙΡΕΣ.

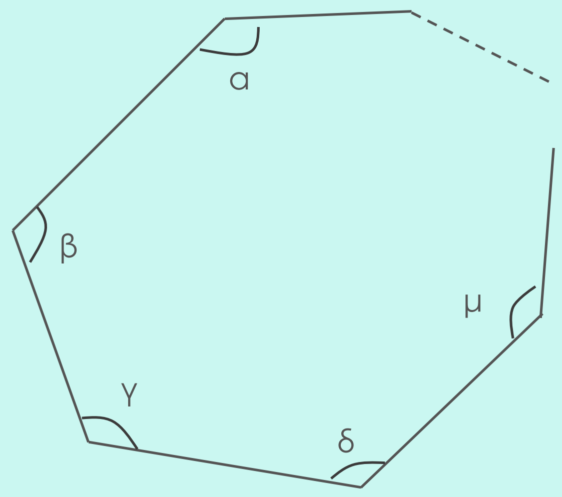
$\omega + \chi + \psi = 180$ μοίρες

Σε κάθε κυρτό τετράπλευρο
το άθροισμα όλων των
γωνιών του,   ισούται με 360 μοίρες.



$$\omega + \psi + \chi + \varphi = 360$$

Πως μπορώ να βρω το άθροισμα
α + β + γ + δ + μ + ...
όλων των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου ;



ΑΠ:

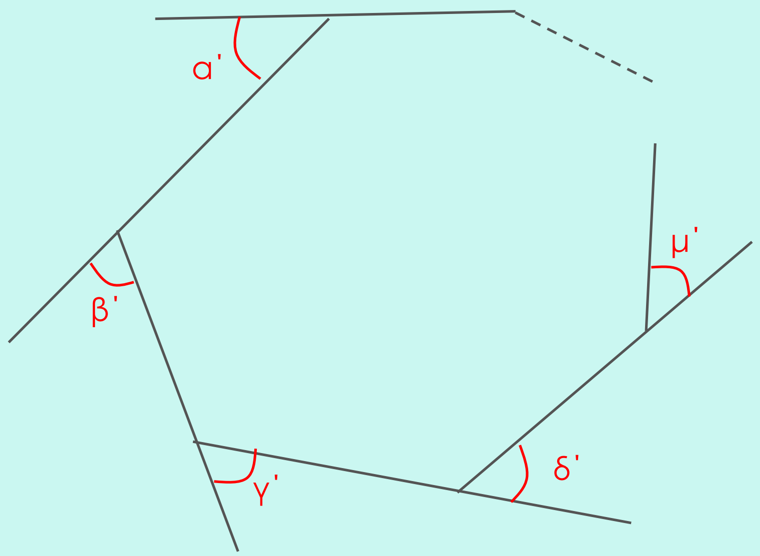
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu + \ldots = (2\nu - 4)$ ορθές $=$
$= (2\nu - 4)90$ μοίρες.

Όπου ν = το πλήθος των πλευρών.

Παράδειγμα:

Στο τυχαίο κυρτό πεντάγωνο $(\nu = 5)$ είναι : $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu = (2.5 - 4)$ορθές $=$
$= (10 - 4)$ορθές $=$
$=$ 6 ορθές $=$
$=$ 6.90 μοίρες $=$
$=$ 540 μοίρες

Με τι ισούται το άθροισμα
α' + β' + γ' + δ' + μ' + ...
όλων των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου ;



ΑΠ:

α' + β' + γ' + δ' + μ' + ... = *4 ορθές* =
= *4.90 μοίρες* =
= *360 μοίρες* =
= *σταθερός αριθμός.*

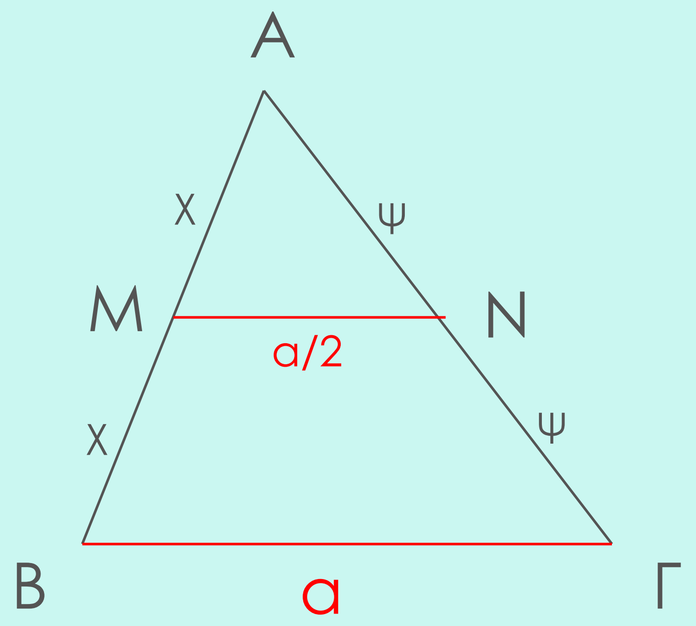
Παραδείγματα:

Στο τυχαίο κυρτό πεντάγωνο (ν = 5) είναι : α' + β' + γ' + δ' + μ' = 4 ορθές = 4.90 μοίρες = 360 μοίρες

Στο τυχαίο κυρτό εξάγωνο (ν = 6) είναι : α' + β' + γ' + δ' + μ' + λ' = 4 ορθές = 4.90 μοίρες = 360 μοίρες

Στο τυχαίο κυρτό επτάγωνο (ν = 7) είναι : α' + β' + γ' + δ' + μ' + λ' + χ' = 4 ορθές = 4.90 μοίρες = 360 μοίρες

Σε κάθε τρίγωνο, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών του, ισούται με το μισό της άλλης πλευράς και ταυτόχρονα είναι παράλληλο.



ΜΝ = ΒΓ / 2

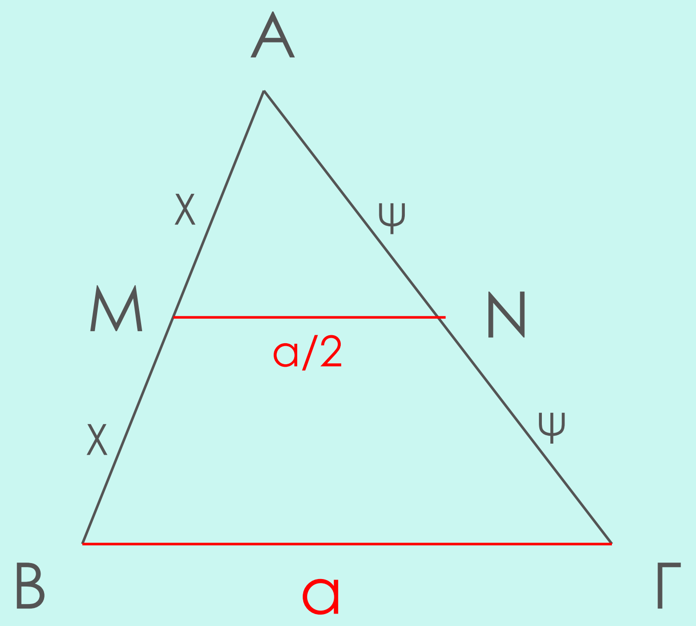
ΜΝ // ΒΓ

Δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} M \quad \text{μέσο της} \quad AB \\ N \quad \text{μέσο της} \quad A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \quad MN \; /\!/ = \frac{B\Gamma}{2}$$

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει το εξής:

$$\left.\begin{aligned} &N \text{ μέσο } A\Gamma \\ &MN \,//\, B\Gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &M \text{ μέσον } AB \\ &MN \,//\!= \frac{B\Gamma}{2} \end{aligned}$$



Δηλαδή, αν από το μέσο Ν μιας πλευράς ΑΓ ενός τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ, φέρω μια ευθεία παράλληλο προς την ΒΓ, τότε η παράλληλος αυτή, σίγουρα θα περνά από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ και συγχρόνως θα είναι ΜΝ = ΒΓ/2.

$$\left.\begin{aligned} &MN = B\Gamma / 2 \\ &MN \,//\, B\Gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow MN \,//\!= \frac{B\Gamma}{2} \quad \text{και} \quad M \text{ μέσον } AB$$

Τι είναι διάμετρος και τι είναι χορδή;

ΑΒ = διάμετρος.

ΓΔ = χορδή.

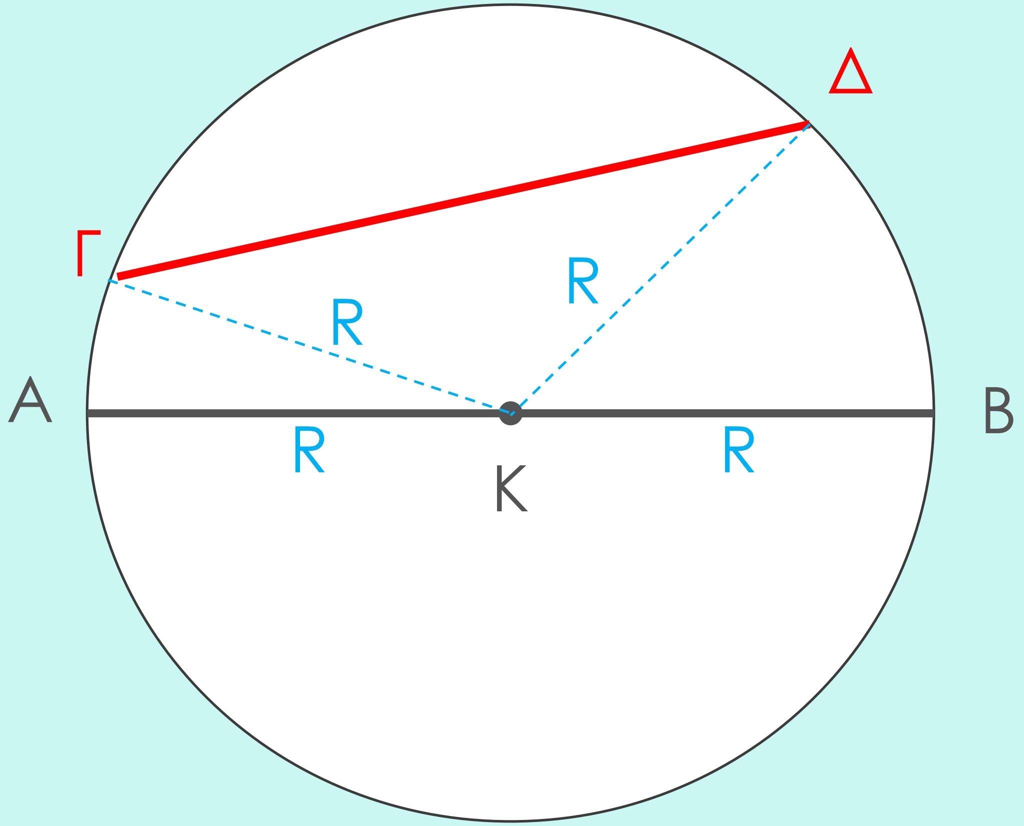
ΑΒ = Διάμετρος = Ακτίνα + Ακτίνα =
= 2(Ακτίνα) =
= η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου που διέρχεται από το Κ.

ΑΒ = ΑΚ + ΚΒ = R + R = 2R.

Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα τόξα των 180 μοιρών.

Το τρίγωνο ΚΓΔ είναι ισοσκελές.

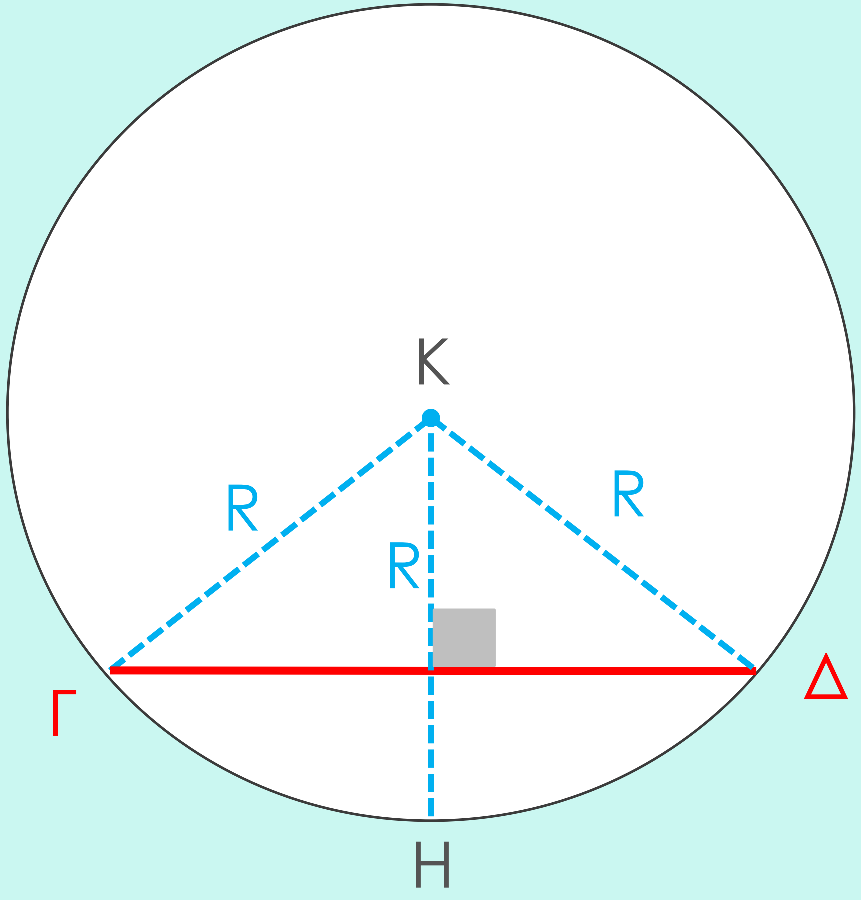
Όπου υπάρχει χορδή, υπάρχει και ισοσκελές τρίγωνο.



Σε κάθε χορδή του κύκλου, υπάρχει ακτίνα που είναι μεσοκάθετος της χορδής.

ΚΗ = ΚΓ = ΚΔ = R = ΑΚΤΙΝΑ

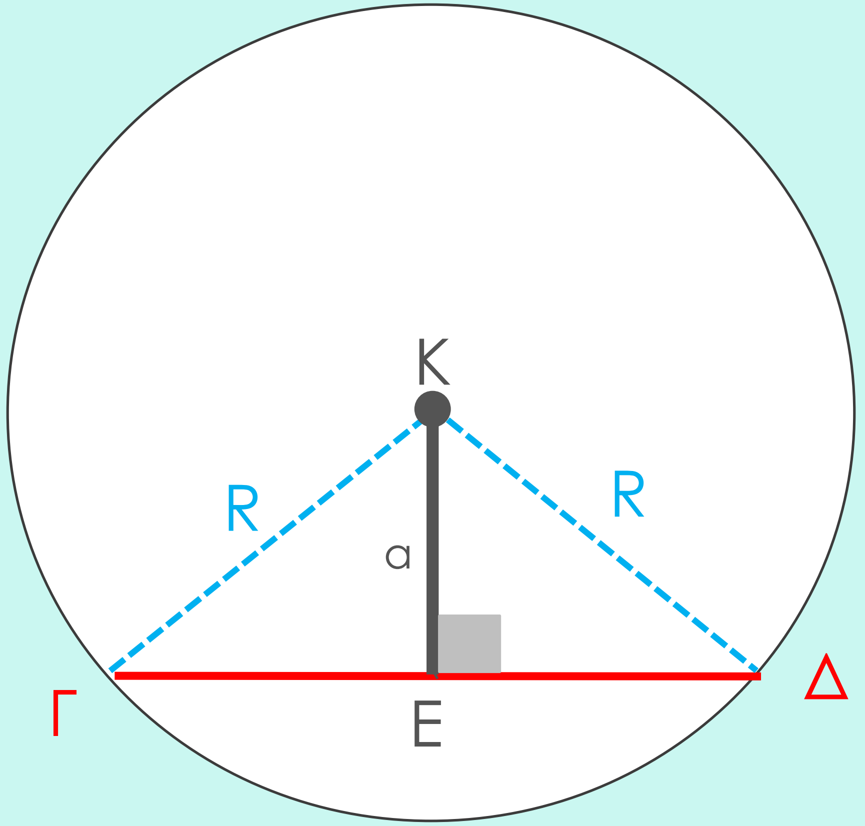
R μεσοκάθετος του ΓΔ



Τι είναι απόστημα α;

ΑΠ:

Το ΚΕ που είναι κάθετο στο μέσο Ε της χορδής ΓΔ, λέγεται απόστημα.



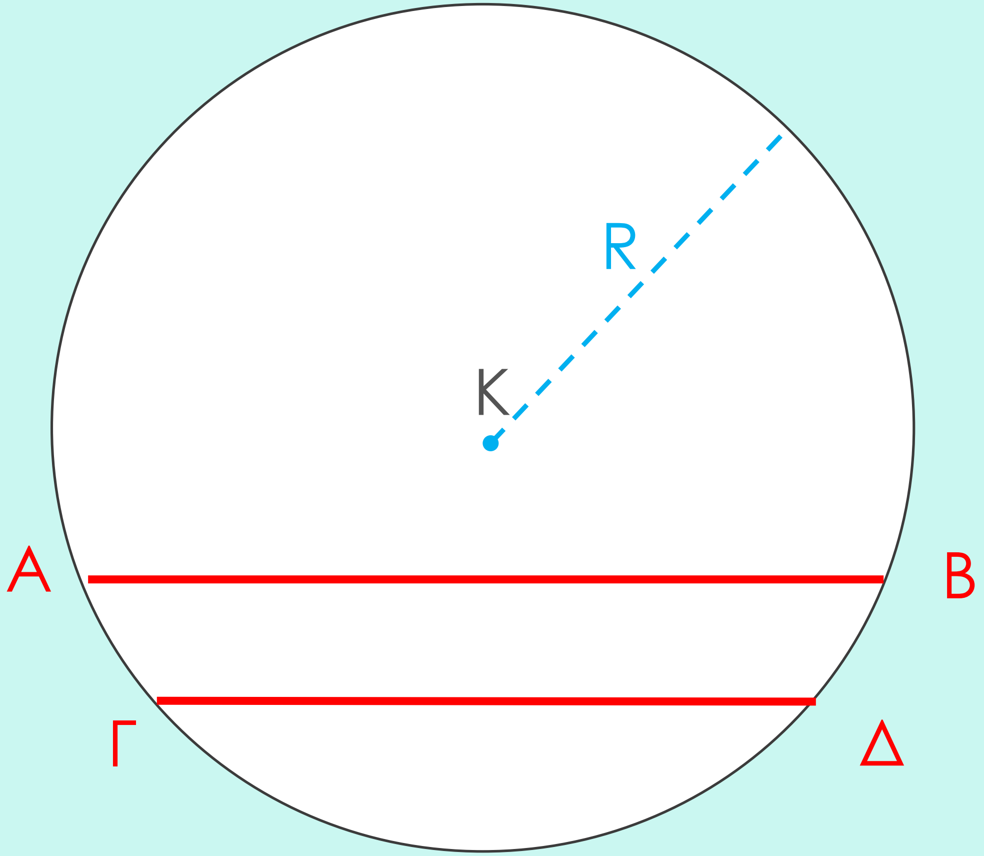
Απόστημα = α = ΚΕ.

Κ κέντρο του κύκλου.
Ε μέσον της χορδής ΓΔ.

Ίσα τόξα σε κύκλο:

Αν τόξο ΑΓ = τόξο ΒΔ, τότε ΑΒ // ΓΔ.

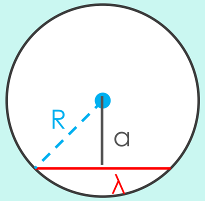
Αν ΑΒ // ΓΔ, τότε τόξο ΑΓ = τόξο ΒΔ.

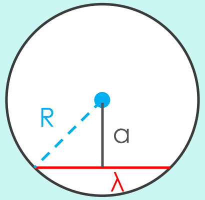


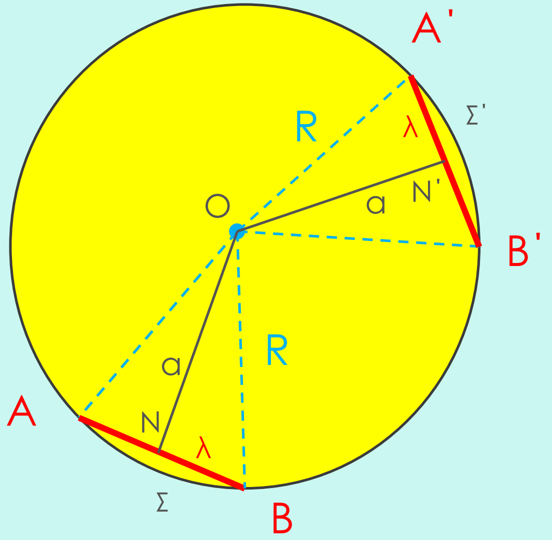
Αυτό ισχύει διότι αν φέρω την ΓΒ, σχηματίζονται ίσες εντός εναλλάξ εγγεγραμμένες γωνίες.

Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους, ισχύουν τα εξής:

Ίσα τόξα ⇔ ίσα χορδές ⇔ ίσα αποστήματα



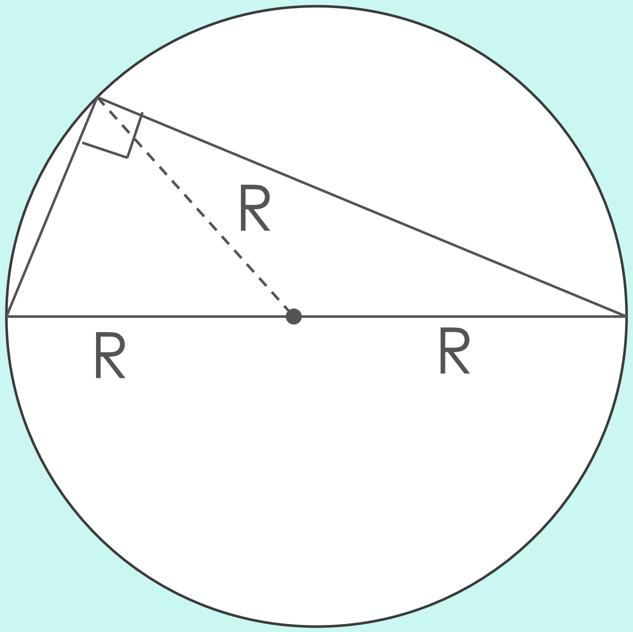




AB = A'B' = χορδή λ.

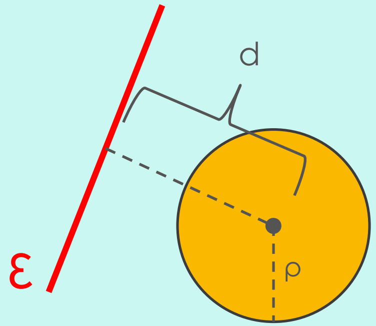
ON = ON' = απόστημα = α.

τόξο ΑΣΒ = τόξο Α'Σ'Β'.



ΌΤΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΚΑΙ Ο ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΣ, ΤΟΤΕ ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (Η ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ = Η ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΠΛΕΥΡΑ) ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ.

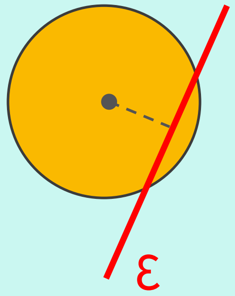
Πως διαπιστώνω την
σχετική θέση ενός κύκλου
και μιας ευθείας ε, όταν δεν
έχω το σχήμα (την εικόνα) τους, αλλά γνωρίζω
την απόσταση d του κέντρου του κύκλου από
την ευθεία ε και την ακτίνα ρ του κύκλου ;



$d > \rho$

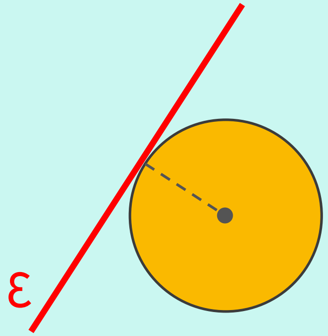
ΑΠ:

Συγκρίνω την απόσταση d με την ακτίνα ρ του κύκλου.



$d < \rho$

- *Αν $d > \rho$, τότε η ε είναι εκτός του κύκλου.*
  Δηλαδή η ε και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



$d = \rho$

- *Αν $d < \rho$, τότε η ε είναι εντός του κύκλου.*
  Δηλαδή η ε και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία.

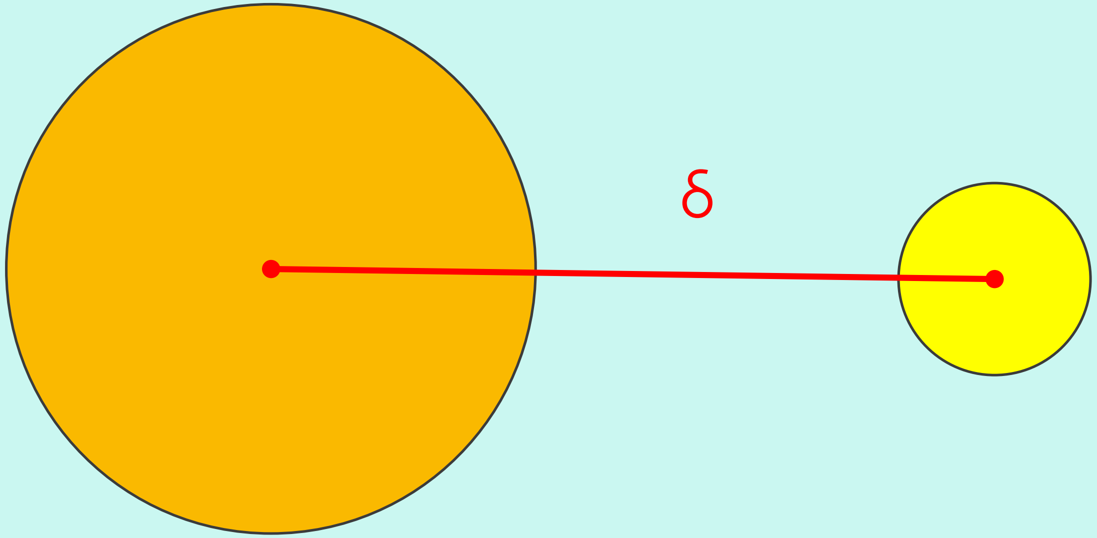
- *Αν $d = \rho$, τότε η ε εφάπτεται του κύκλου.*
  Δηλαδή η ε και ο κύκλος έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

Τι είναι διάκεντρος δύο κύκλων
και πως την συμβολίζω ;

ΑΠ:

*Η απόσταση των κέντρων
των δύο κύκλων.*

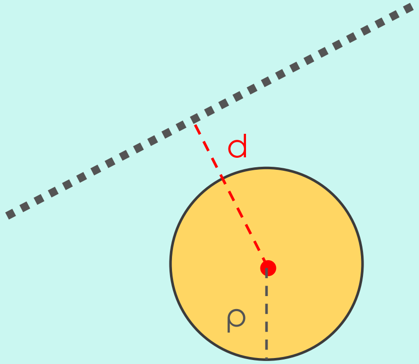
*Την διάκεντρο την συμβολίζω
με το μικρό Ελληνικό γράμμα δ.*



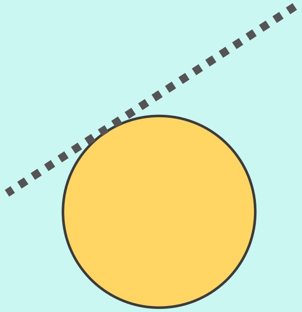
Πως προβλέπω αν θα υπάρξει σύγκρουση ενός κομήτη ή ενός αστεροειδούς με την Γη;

Εφόσον οι τροχιές των σωμάτων βρεθούν στο ίδιο επίπεδο, τότε:

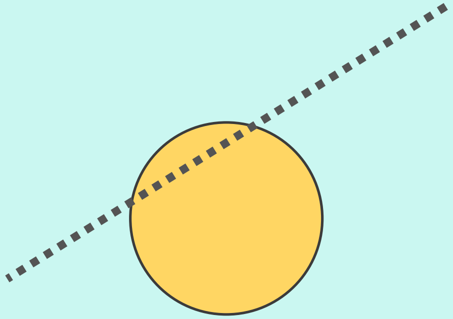
Αν $d > \rho$ → όχι σύγκρουση

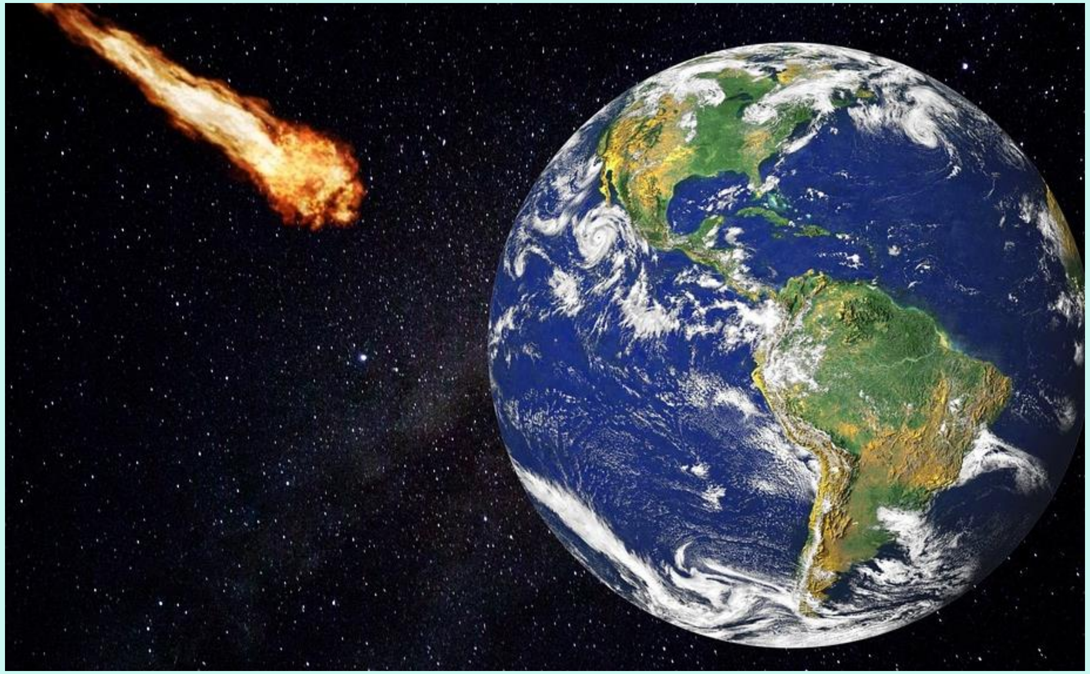


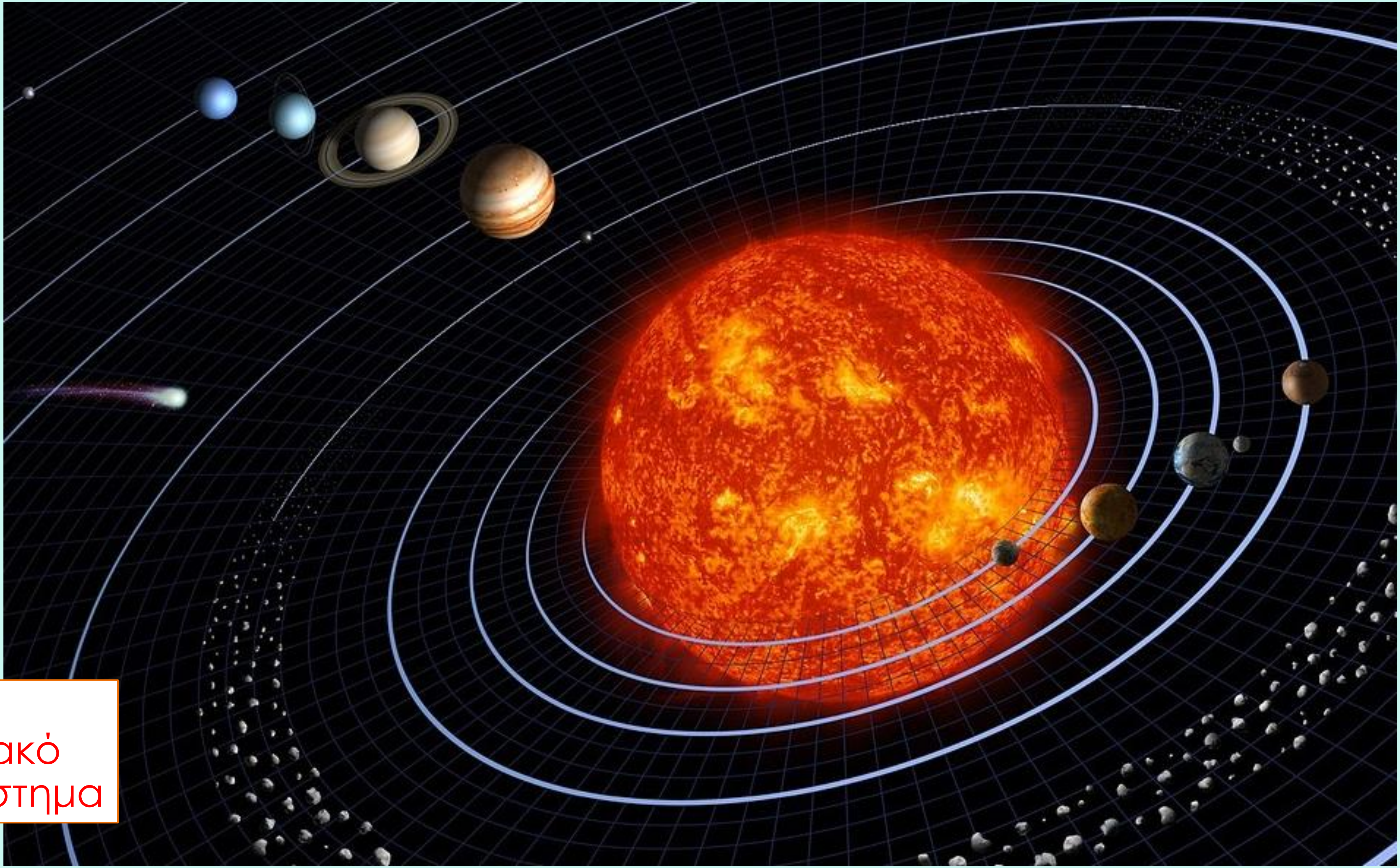
Αν $d = \rho$ → σύγκρουση



Αν $d < \rho$ → σύγκρουση

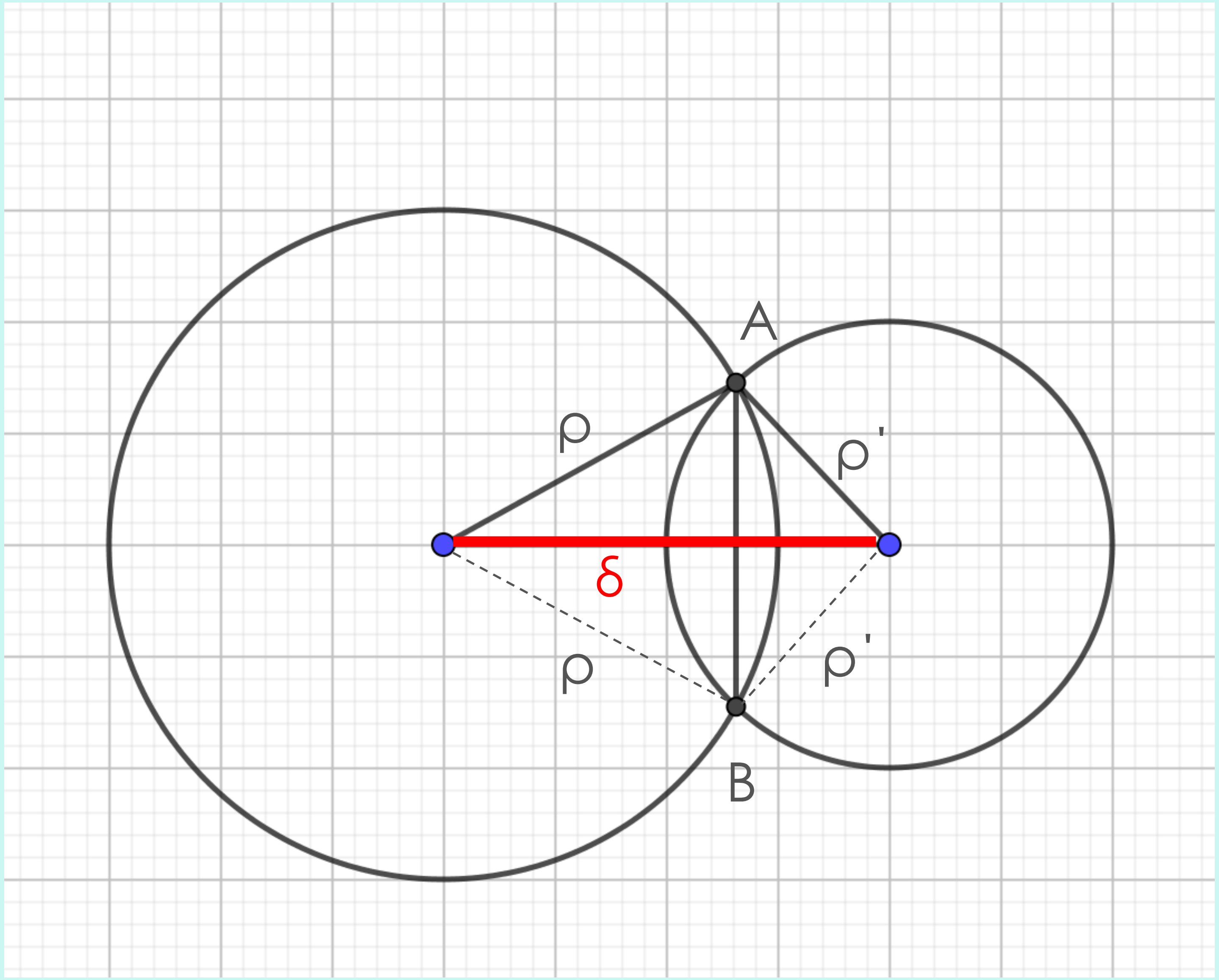






Το Ηλιακό σύστημα

Η διάκεντρος δ σε δυο κύκλους που τέμνονται, είναι η μεσοκάθετος στην κοινή τους χορδή ΑΒ.

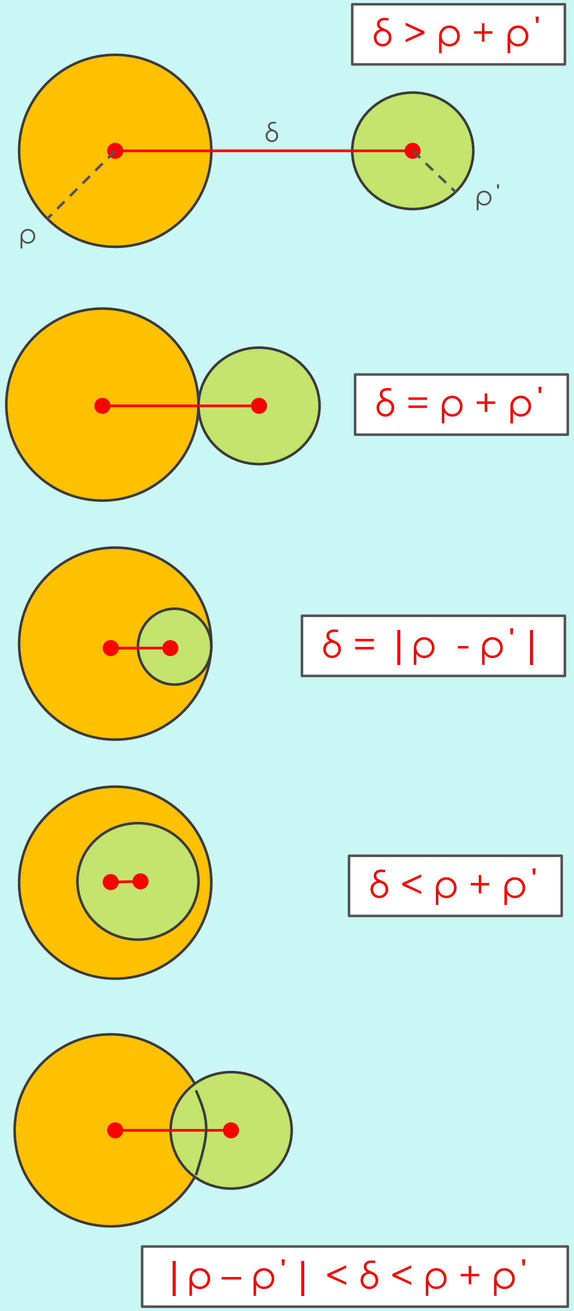


Πως διαπιστώνω την
σχετική θέση δύο κύκλων (περιφέρειες),
όταν δεν έχω το σχήμα (την εικόνα) τους, αλλά γνωρίζω μόνο
την διάκεντρο $δ$ και τις ακτίνες τους $ρ$ και $ρ'$;

ΑΠ:

*Συγκρίνω την διάκεντρο $δ$ των κέντρων των δύο κύκλων,
με το άθροισμα και την διαφορά που έχουν οι ακτίνες τους
$ρ$ και $ρ'$.*

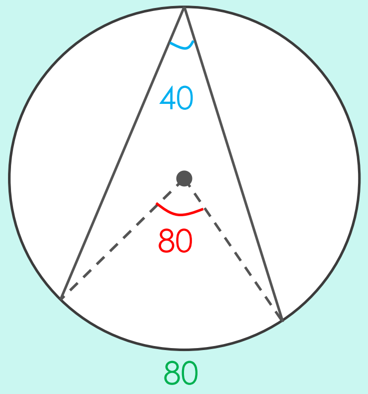
- Αν $δ > ρ + ρ'$, τότε οι κύκλοι είναι εκτός ο ένας από τον άλλο.
  Δηλαδή οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία.
- Αν $δ = ρ + ρ'$, τότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
  Δηλαδή οι κύκλοι έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
- Αν $δ = |ρ - ρ'|$, τότε οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
  Δηλαδή οι κύκλοι έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.
- Αν $δ < |ρ - ρ'|$, τότε οι κύκλοι είναι εντός ο ένας στον άλλο.
  Δηλαδή οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία.
- Αν $|ρ – ρ'| < δ < ρ + ρ'$, τότε οι κύκλοι τέμνονται.
  Δηλαδή οι κύκλοι έχουν δυο κοινά σημεία.



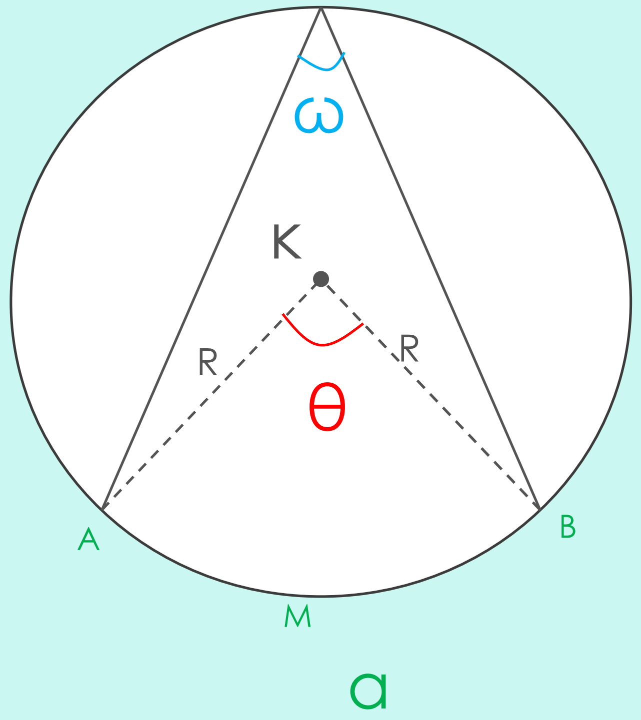
A1) Τι είναι επίκεντρη γωνία;

A2) Τι είναι εγγεγραμμένη γωνία;

A3) Τι σχέση έχει η επίκεντρη με την εγγεγραμμένη
και το αντίστοιχο τόξο α = ΑΜΒ, του κύκλου;



ΑΠ:



A1) *Επίκεντρη* = *θ* = *έχει κορυφή το κέντρο Κ του κύκλου και πλευρές ακτίνες R του κύκλου.*

A2) *Εγγεγραμμένη* = *ω* = *έχει κορυφή πάνω στην περιφέρεια του κύκλου και πλευρές χορδές του κύκλου.*

A3) $\omega = \theta / 2 = \alpha / 2$ *σε μοίρες ή ακτίνια* *και* $\theta = \alpha$ *σε μοίρες ή ακτίνια.*

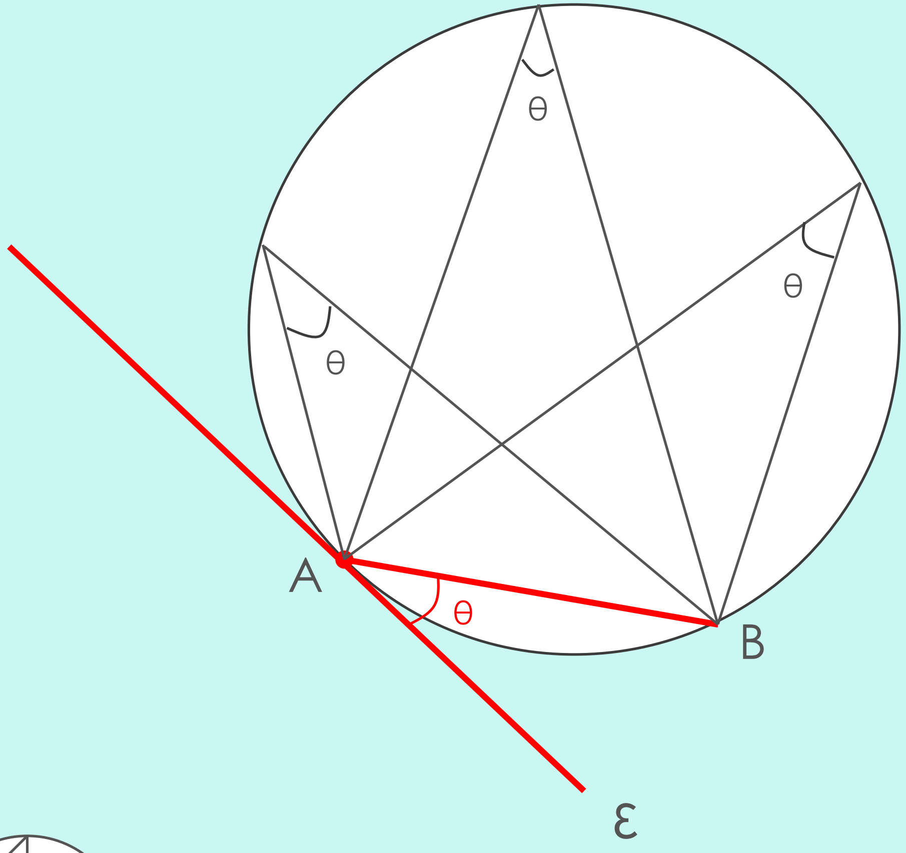
Τι λέγεται γωνία υπό χορδής ΑΒ
και εφαπτομένης ε ;

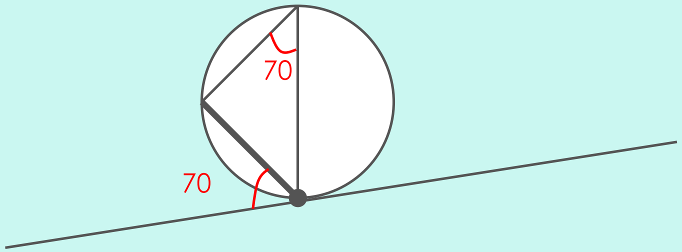
Τι σχέση έχει αυτή η γωνία
με κάθε άλλη εγγεγραμμένη
γωνία που βαίνει
στην ίδια χορδή ΑΒ;

ΑΠ:

- *Η γωνία θ που έχει κορυφή το σημείο επαφής Α της εφαπτομένης ε και πλευρές την χορδή ΑΒ και την εφαπτομένη ε.*

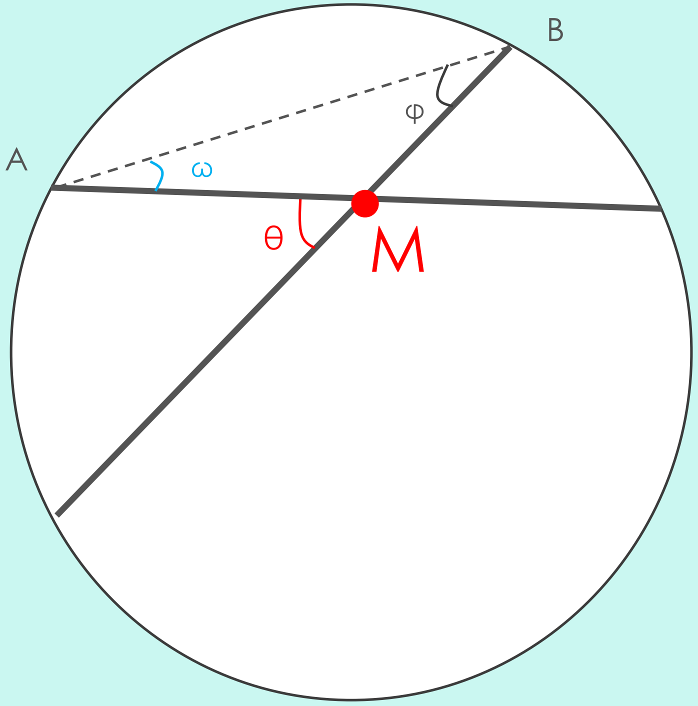
- *Είναι ίσες: θ = θ = θ = θ.*



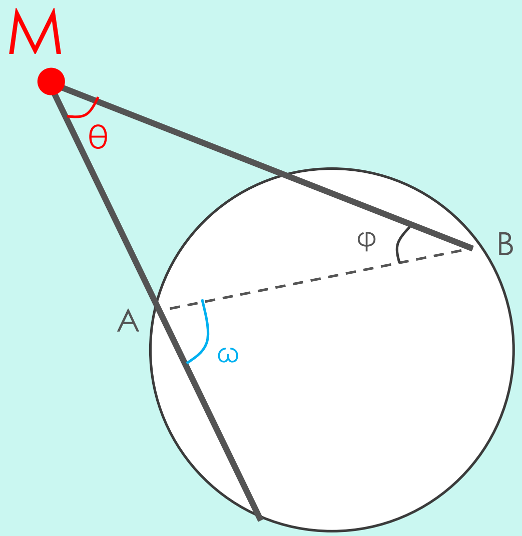


Πως βρίσκω την γωνία θ που σχηματίζουν δύο τέμνουσες κύκλου, που φέρονται από σημείο Μ:

Φέρω το ΑΒ, οπότε:



- *Όταν οι τέμνουσες φέρονται από σημείο Μ που είναι <u>εντός</u> του κύκλου:* →
  $\theta = \omega + \varphi$



- *Όταν οι τέμνουσες φέρονται από σημείο Μ που είναι <u>εκτός</u> του κύκλου:* →
  $\theta + \varphi = \omega \Leftrightarrow \theta = \omega - \varphi$

Δηλαδή η ζητούμενη γωνία θ, υπολογίζεται από τις εγγεγραμμένες γωνίες ω και φ του κύκλου ή από τα αντίστοιχα τόξα αυτών των γωνιών.

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι:

Απέναντι πλευρές ίσες $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$.

Απέναντι γωνίες ίσες $\omega = \omega$, $\varphi = \varphi$.

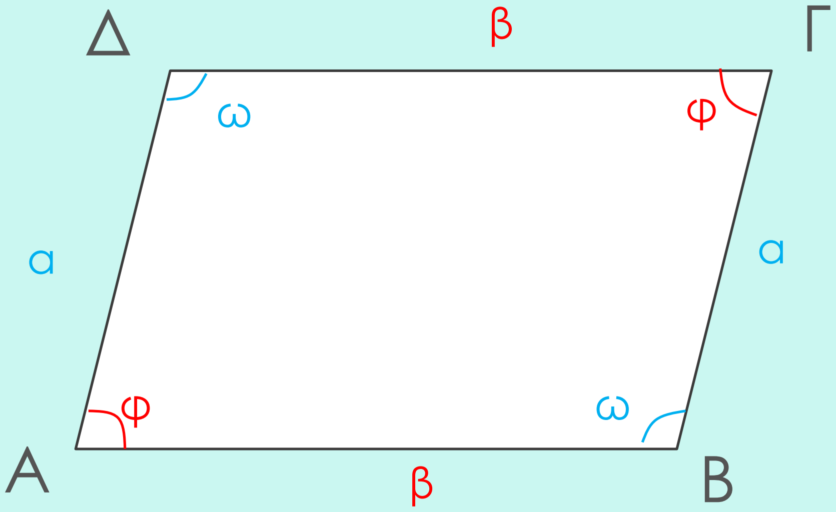
Οι διαγώνιες διχοτομούνται $\kappa = \kappa$, $\lambda = \lambda$.

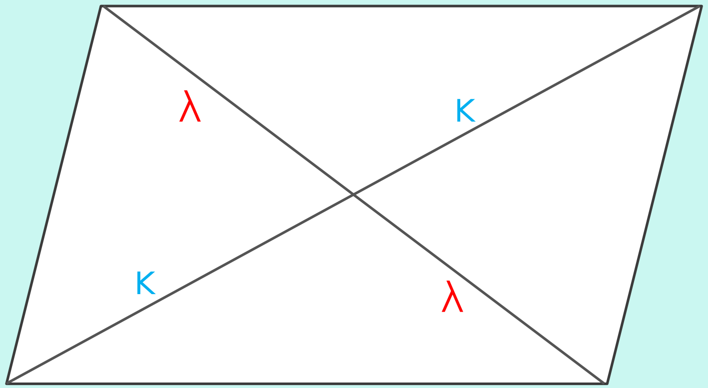
Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.

Οι γωνίες ω και φ είναι παραπληρωματικές.

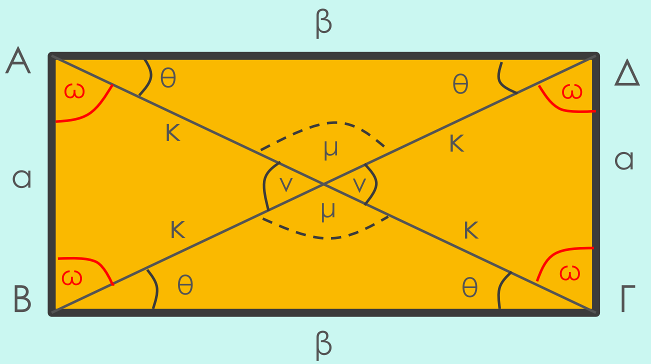
$\omega + \varphi = 180$

$Α\Delta \parallel Β\Gamma$, $ΑΒ \parallel \Delta\Gamma$

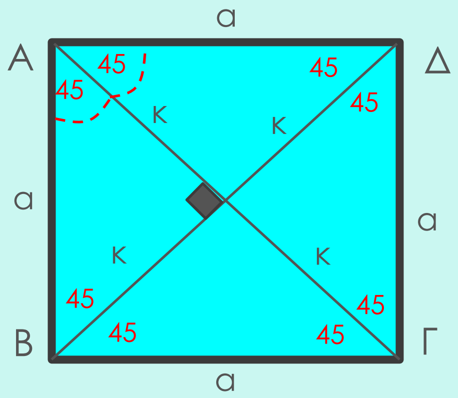




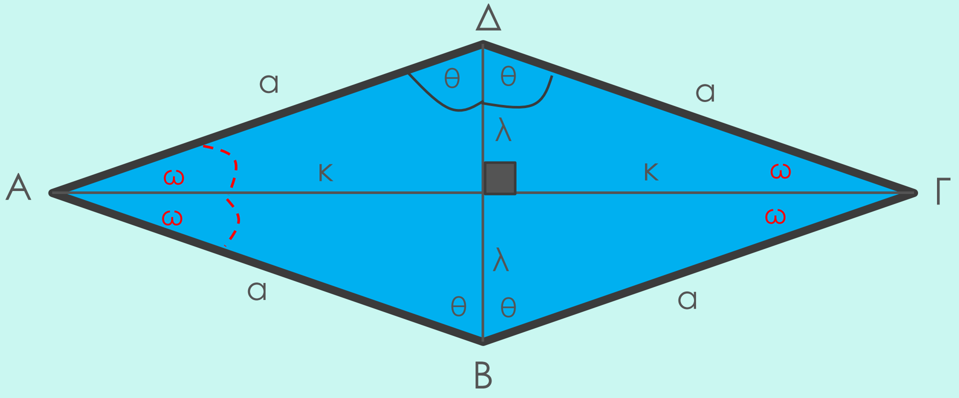
Στο ορθογώνιο είναι: α = α, β = β, κ = κ = κ = κ, ΑΓ = ΒΔ.
Γωνία Α = γωνία Β = γωνία Γ = γωνία Δ = 90 μοίρες.
Γωνία θ = γωνία θ = γωνία θ = γωνία θ.
Γωνία ω = γωνία ω = γωνία ω = γωνία ω.
Γωνία ν = γωνία ν.
Γωνία μ = γωνία μ.



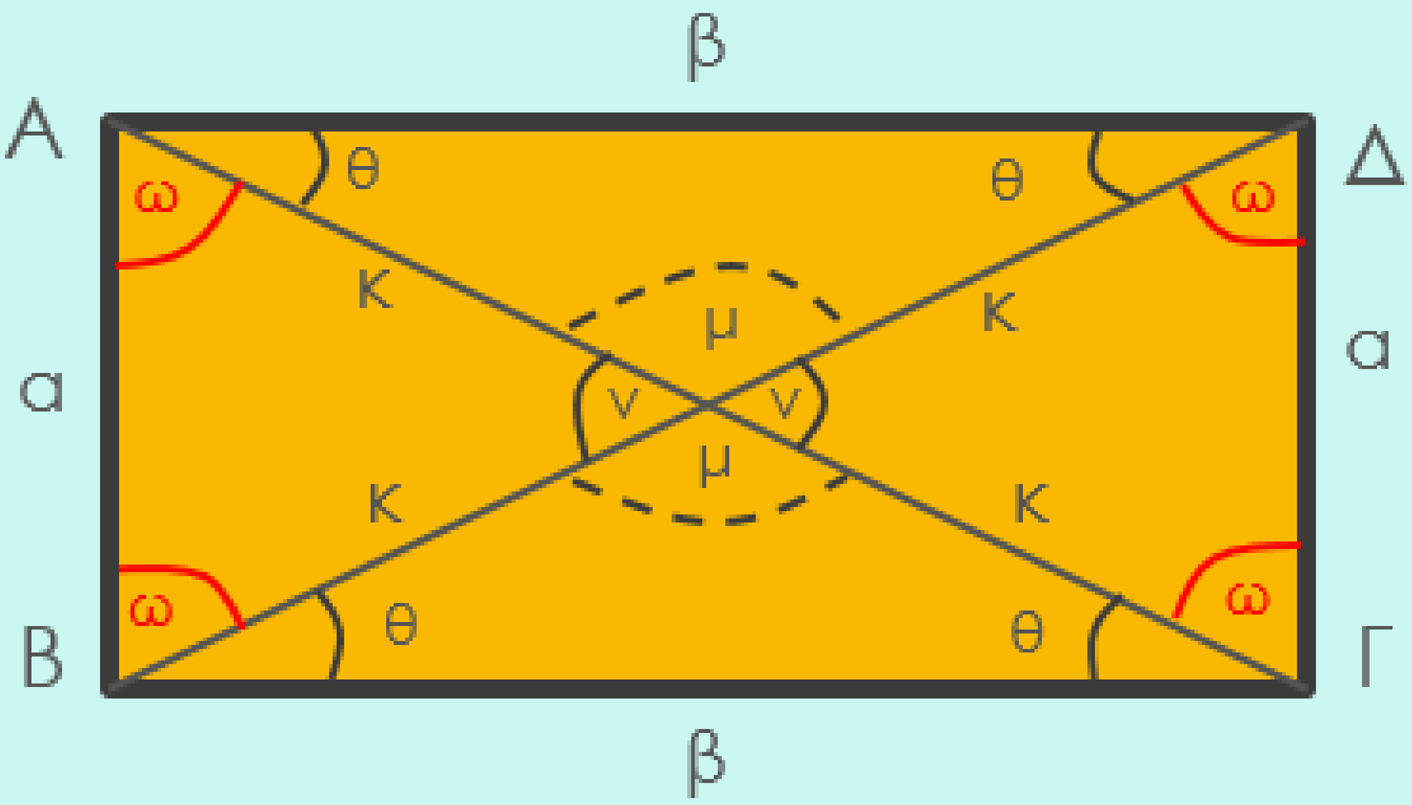
Στο τετράγωνο είναι: α = α = α = α, κ = κ = κ = κ, ΑΓ = ΒΔ.
Γωνία Α = γωνία Β = γωνία Γ = γωνία Δ = 90 μοίρες.
ΑΓ μεσοκάθετος ΒΔ.
ΒΔ μεσοκάθετος ΑΓ.
ΑΓ διχοτόμος της γωνίας Α και της γωνίας Γ.
ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β και της γωνίας Δ.



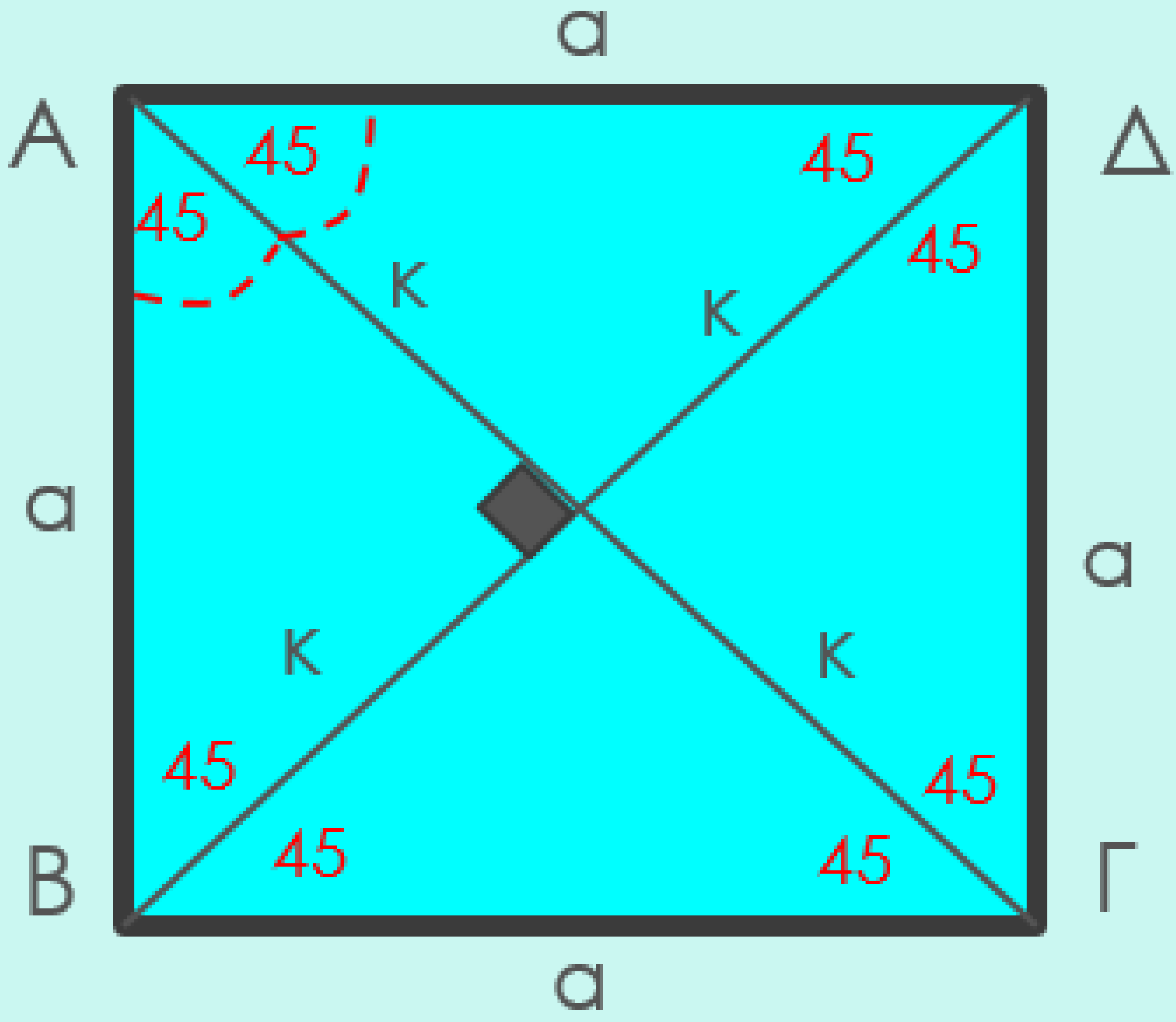
Στον ρόμβο είναι: α = α = α = α, κ = κ, λ = λ.
Γωνία Α = γωνία Γ.
Γωνία Β = γωνία Δ.
ΑΓ μεσοκάθετος ΒΔ.
ΒΔ μεσοκάθετος ΑΓ.
ΑΓ διχοτόμος της γωνίας Α και της γωνίας Γ.
ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β και της γωνίας Δ.



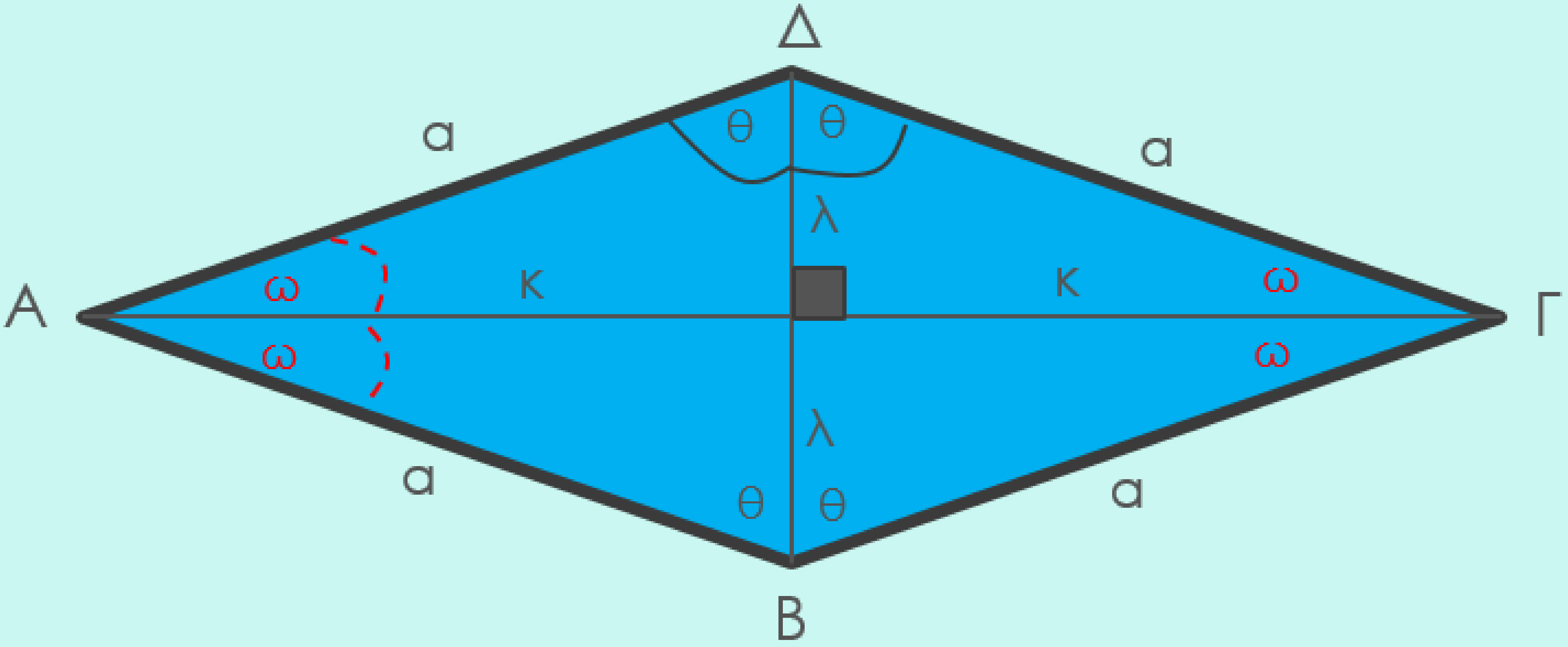
Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ



Το τετράγωνο ΑΒΓΔ



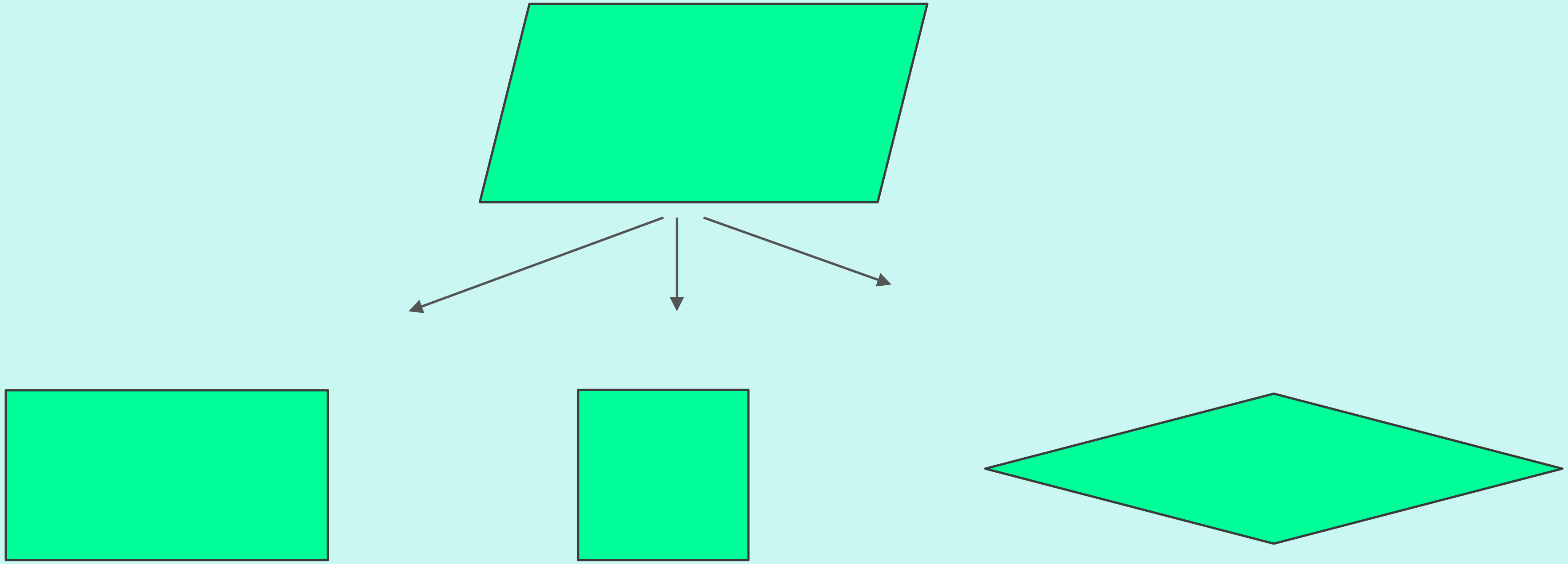
Ο ρόμβος ΑΒΓΔ



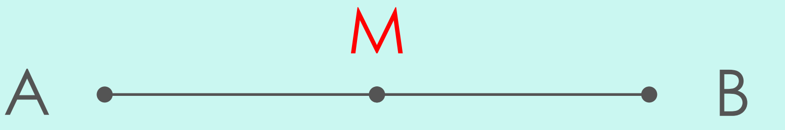
Τι κοινό έχουν μεταξύ τους
το ορθογώνιο,
το τετράγωνο και
ο ρόμβος ;

ΑΠ:

Είναι παραλληλόγραμμα.

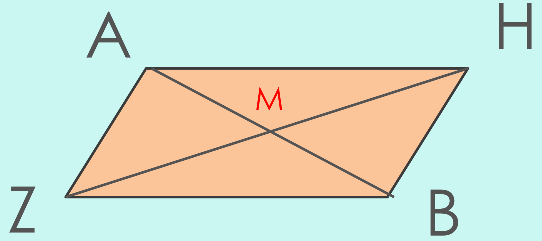


Τι κάνω για να αποδείξω ότι το σημείο Μ είναι μέσον του ΑΒ;

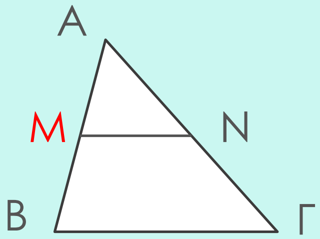


<u>*ΑΠΑΝΤΗΣΗ*</u>

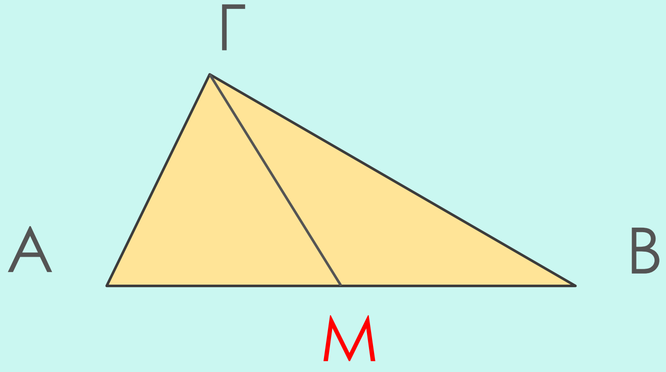
- $\Delta\varepsilon\acute{\iota}\chi\nu\omega\ \acute{o}\tau\iota \quad \mathrm{AM} = \mathrm{MB} \ \rightarrow$



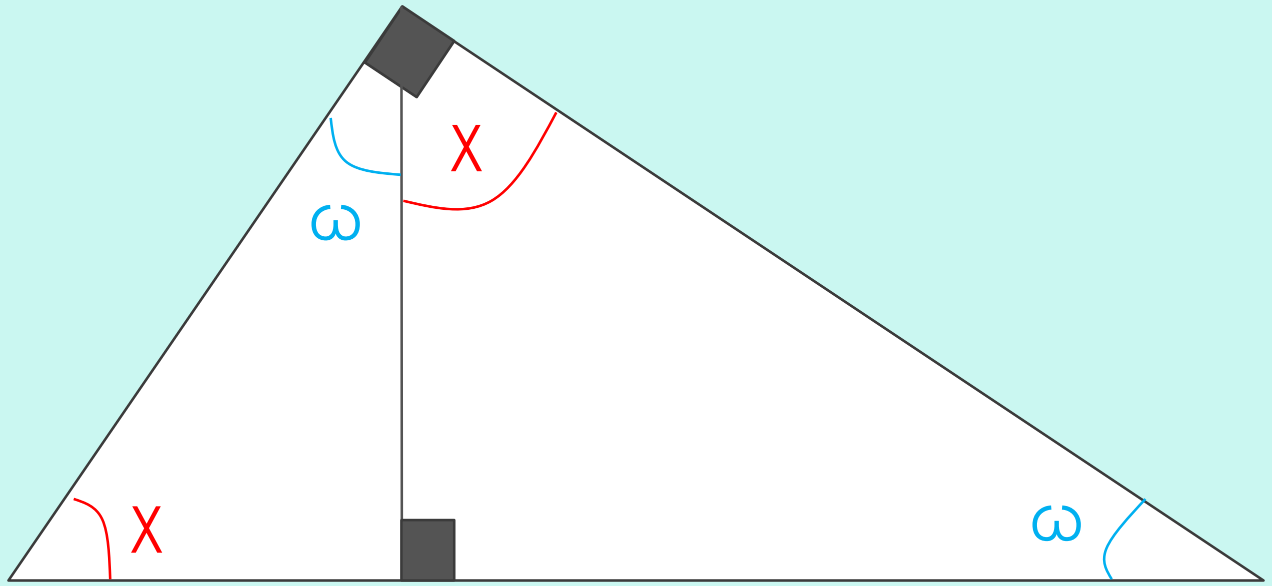
- $\acute{\eta}\ \ \delta\varepsilon\acute{\iota}\chi\nu\omega\ \acute{o}\tau\iota\ \ \mathrm{AZBH}$ $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\mu o \ \rightarrow$



- ***ή δείχνω ότι ΜΝ // ΒΓ και Ν μέσο ΑΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ*** $\rightarrow$



- $\acute{\eta}\ \ \delta\varepsilon\acute{\iota}\chi\nu\omega\ \acute{o}\tau\iota\ \ \Gamma\mathrm{M}$ $\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma,\ \sigma\tau o$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\ \ \mathrm{AB\Gamma}\ \rightarrow$

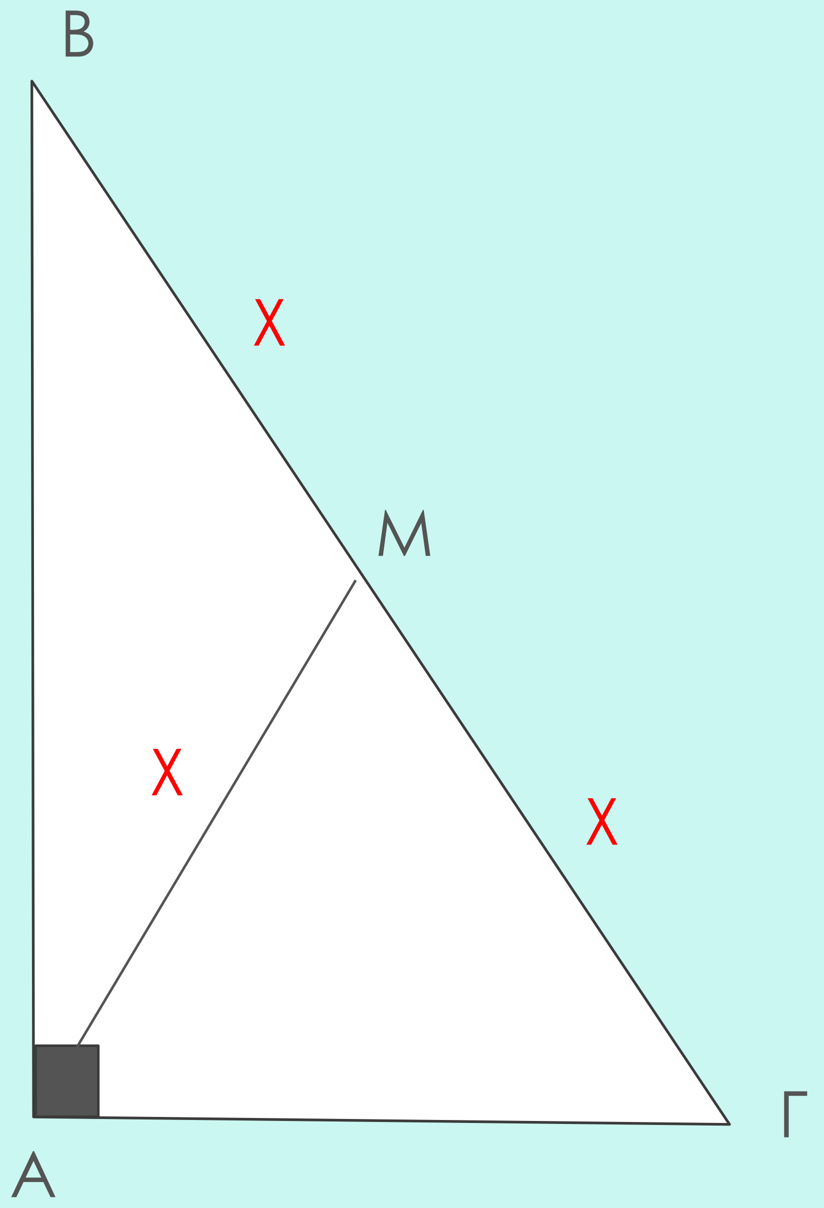


ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΦΕΡΩ ΤΟ ΥΨΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ ΤΗΣ ΟΡΘΗΣ ΓΩΝΙΑΣ.

ΤΟΤΕ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΙΣΕΣ ΓΩΝΙΕΣ: $\omega = \omega$ ΚΑΙ $\chi = \chi$.

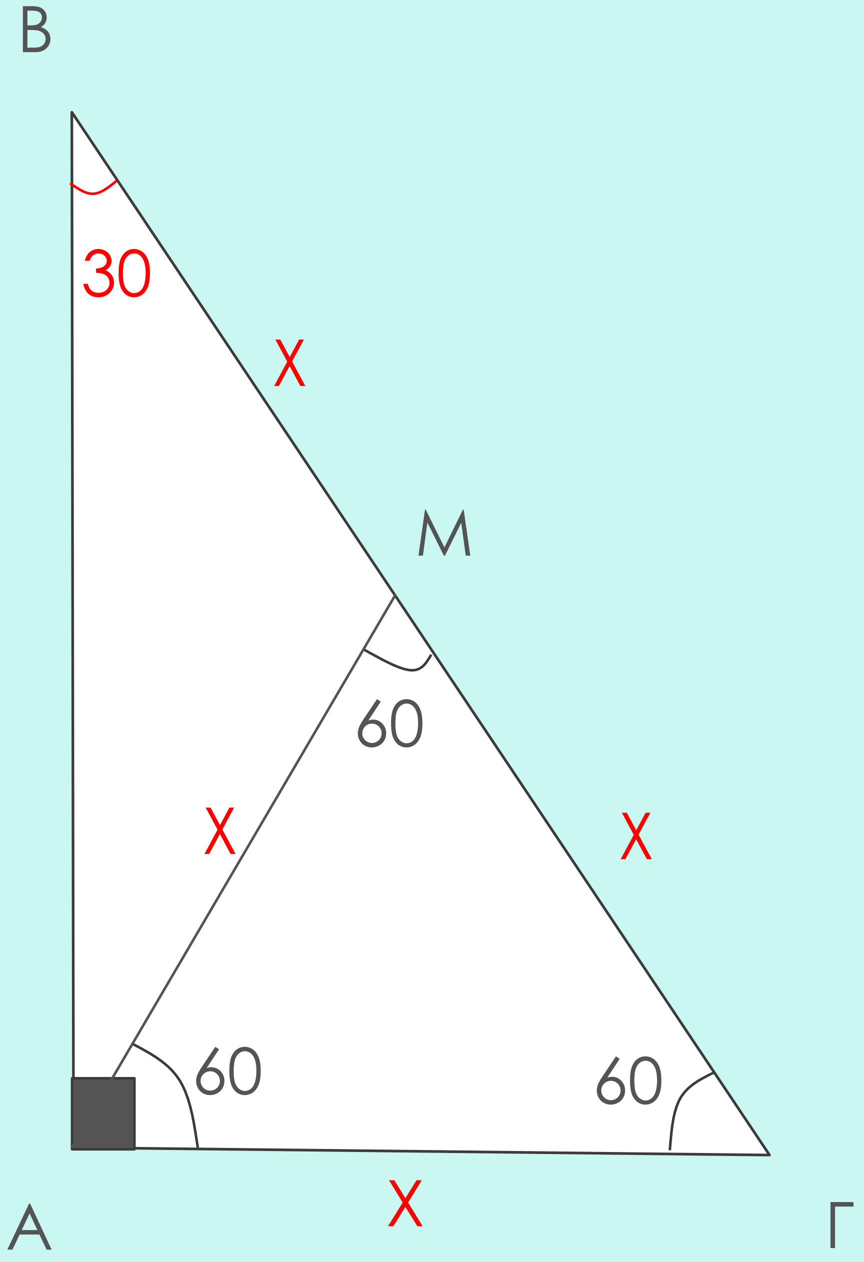
ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ,
Η ΔΙΑΜΕΣΟΣ Χ ΠΟΥ
ΦΕΡΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
ΟΡΘΗΣ ΓΩΝΙΑΣ, ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ ΤΟ
ΜΙΣΟ ΤΗΣ ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑΣ ΒΓ
ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΔΥΟ ΙΣΟΣΚΕΛΗ
ΤΡΙΓΩΝΑ.

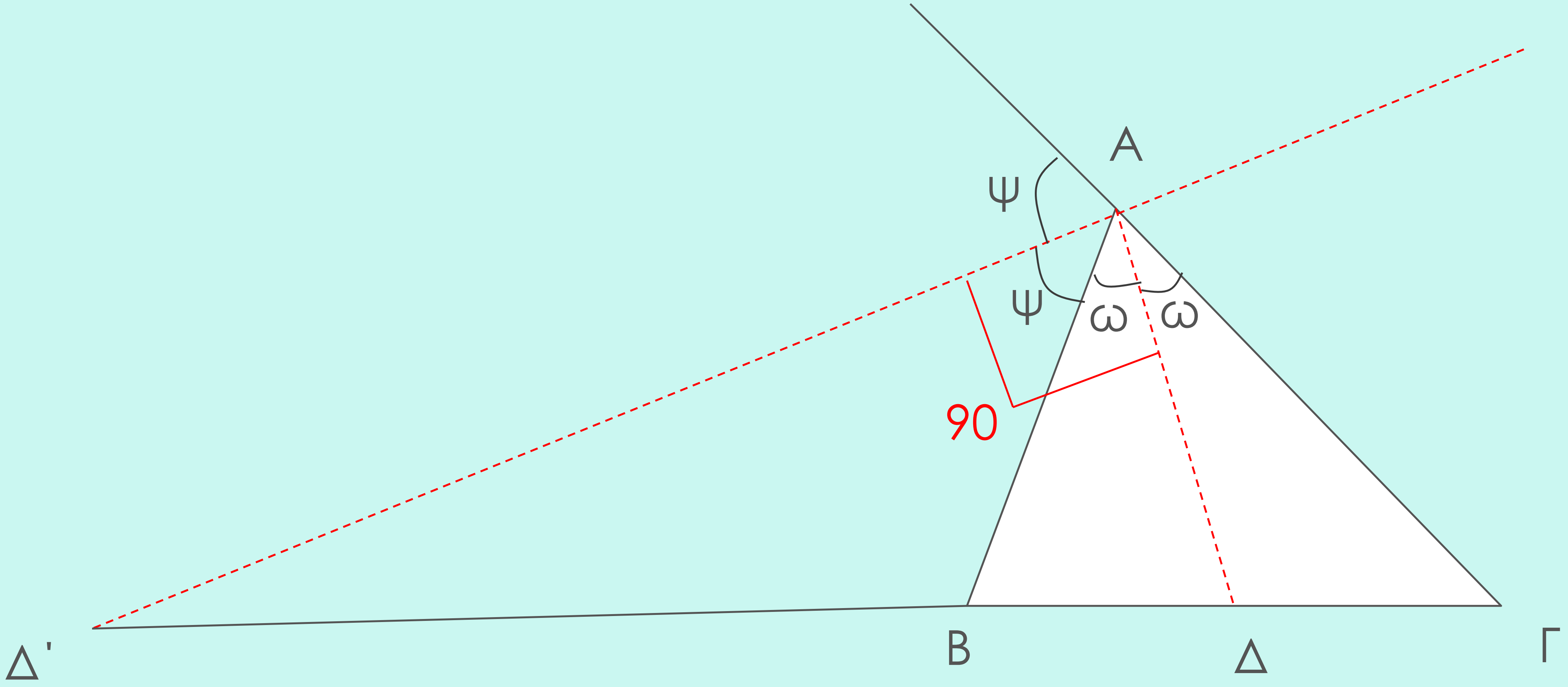
- ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ = Χ.
- ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΜΓ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ.
- ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΜΒ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ.
- ΑΜ = ΒΓ/2



ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΜΕ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΙΣΗ ΜΕ 30 ΜΟΙΡΕΣ, Η ΔΙΑΜΕΣΟΣ Χ ΠΟΥ ΦΕΡΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ ΤΗΣ ΟΡΘΗΣ ΓΩΝΙΑΣ, ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΕΝΑ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΚΑΙ ΕΝΑ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ.

- *ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ = ΑΓ = Χ.*
- *ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΜΓ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ.*
- *ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΜΒ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ.*
- *ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΑ ΑΓ ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΩΝΙΑ ΤΩΝ 30 ΜΟΙΡΩΝ, ΙΣΧΥΕΙ Η ΣΧΕΣΗ: ΑΓ = ΒΓ/2.*



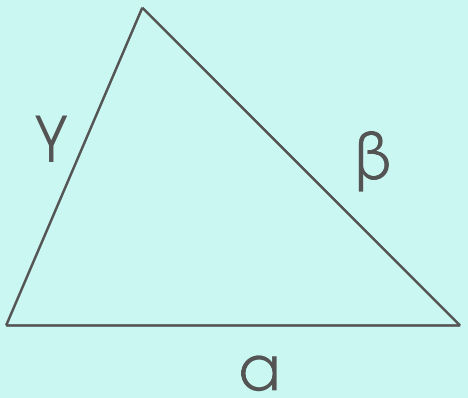


Η ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΑΔ ΚΑΙ Η ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΑΔ' ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ Α ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ, ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΥΝ ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ Α.

Γωνία $\widehat{\Delta A \Delta'}$ = 90 μοίρες.

Ποια είναι η τριγωνική ανισότητα;

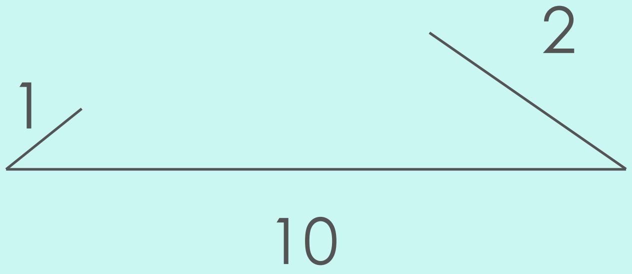
ΑΠ:



Για τα μήκη α , β , γ των πλευρών ενός τυχαίου τριγώνου, πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει η εξής σχέση: $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$

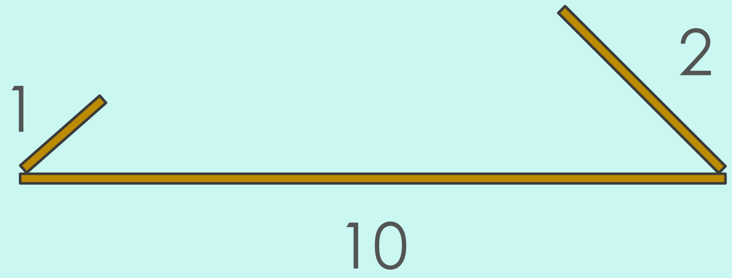
Δηλαδή μία τυχαία πλευρά (π.χ. η πλευρά α) έχει μήκος που είναι μεταξύ της διαφοράς (αφαίρεσης $|\beta - \gamma|$) των μηκών των άλλων δύο πλευρών και του αθροίσματος τους (πρόσθεση $\beta + \gamma$).

Έχω τρία ξύλινα ευθύγραμμα δοκάρια,
με μήκος το ένα 1 μέτρο, το άλλο 2 μέτρα
και το άλλο 10 μέτρα.
Μπορώ με αυτά τα τρία δοκάρια να κάνω
ένα τριγωνικό υποστήριγμα, για να βάλω στέγη
από κεραμίδια σε μια μικρή αποθήκη;



ΑΠ:

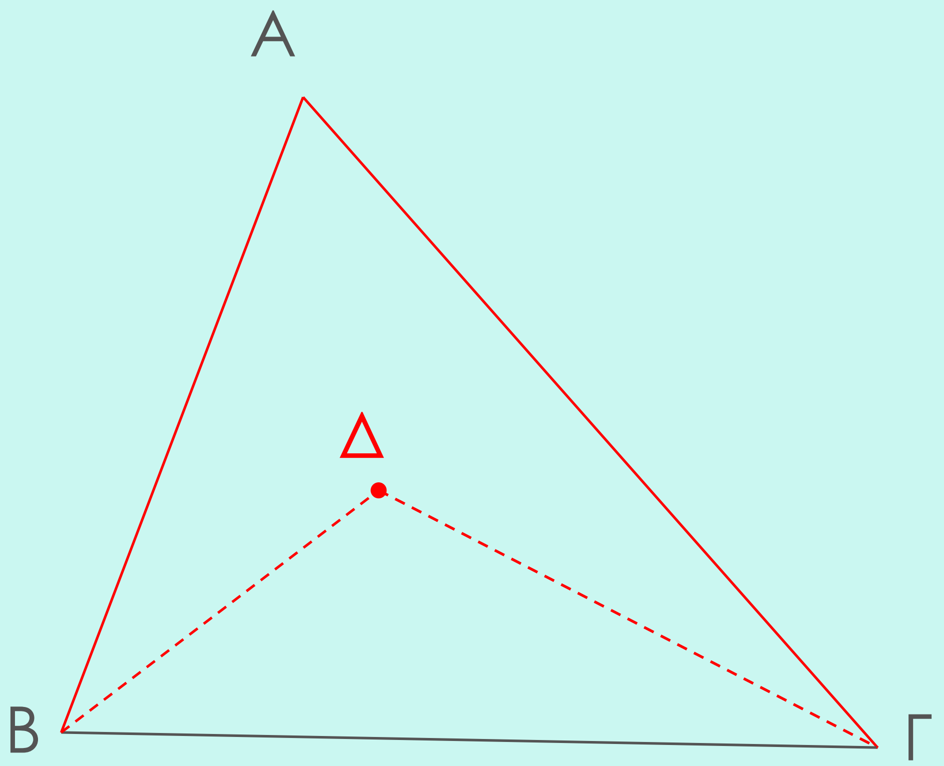
Όχι, διότι για τα μήκη τους, δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.
Δηλαδή δεν μπορώ να σχηματίσω τρίγωνο, που να έχει πλευρές αυτά τα δοκάρια.



$|2 - 1| < 10 < 2 + 1 \quad \rightarrow$ *δεν ισχύει.*

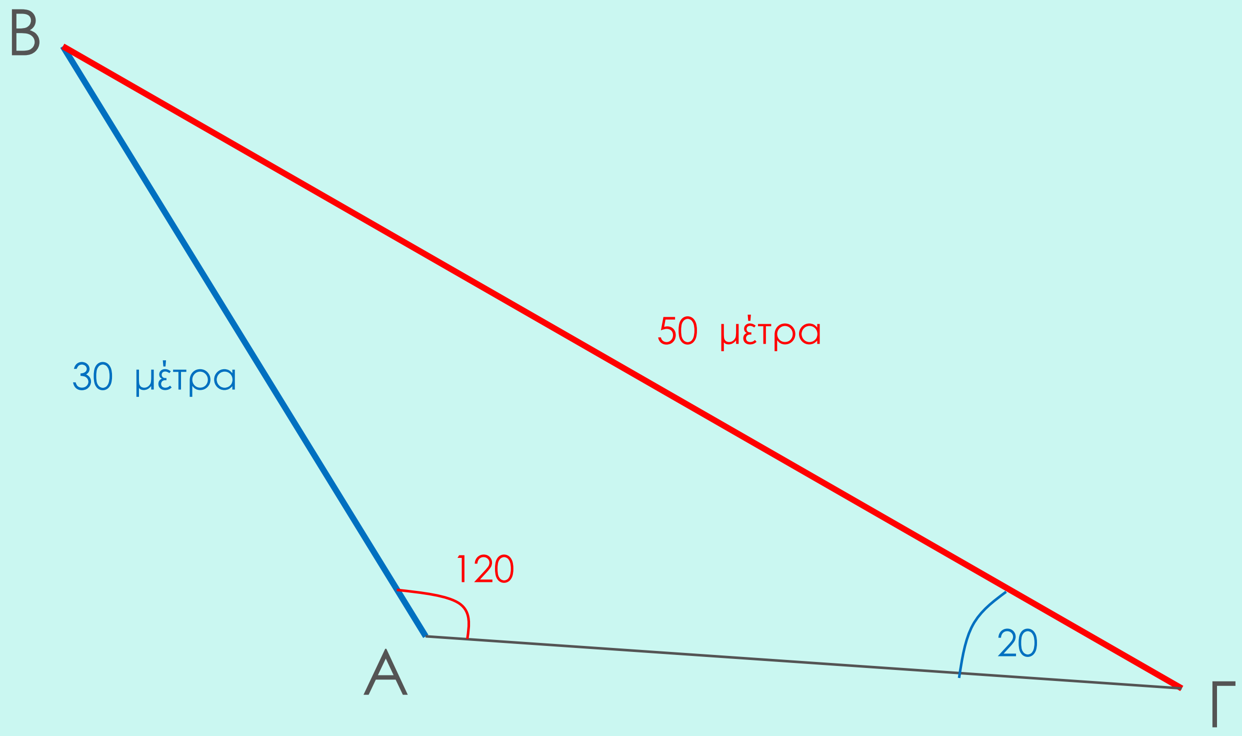
Όταν ένα σημείο Δ είναι εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, τότε
η διαδρομή Β→Δ→Γ
είναι συντομότερη από την
διαδρομή Β→Α→Γ.

Αυτό συμβαίνει, διότι $B\Delta + \Delta\Gamma < BA + A\Gamma$



Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά είναι και μεγαλύτερη γωνία και αντιστρόφως.

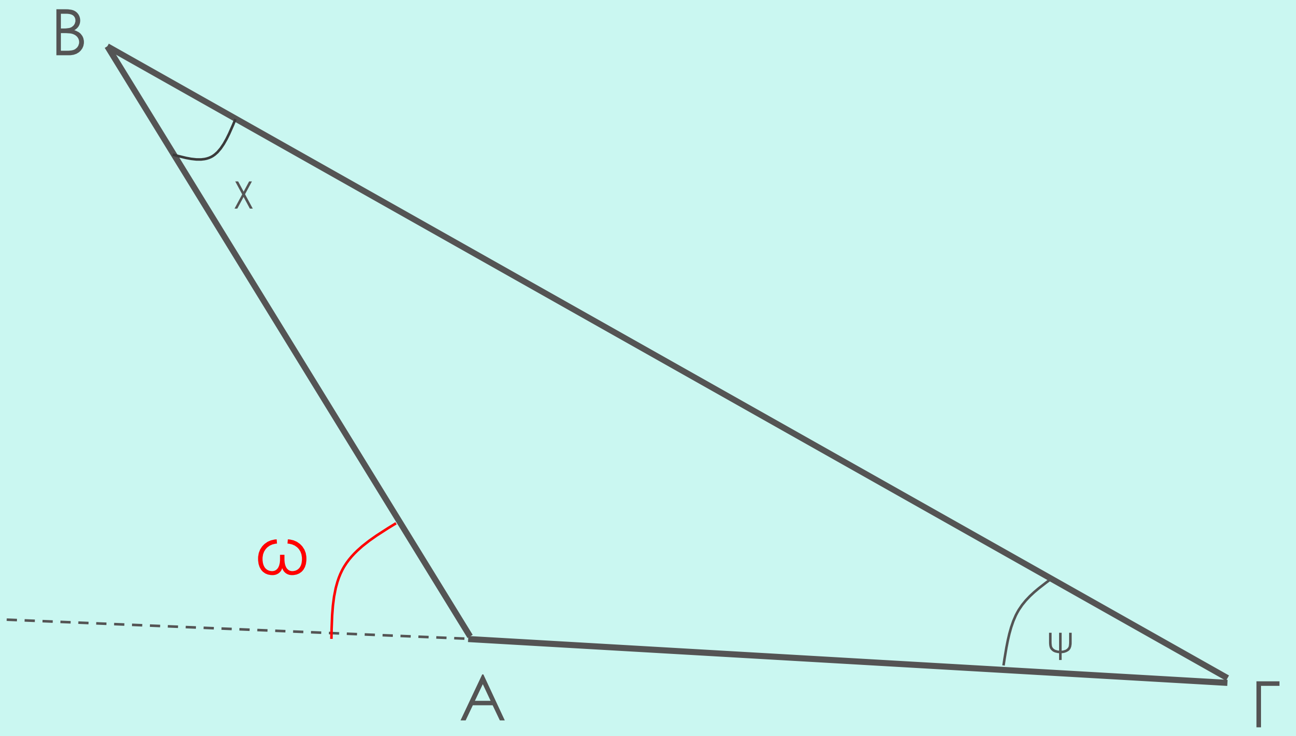
Η πλευρά ΒΓ (κόκκινη) είναι μεγαλύτερη από την πλευρά ΒΑ (μπλε), διότι η γωνία Α = 120 μοίρες που είναι απέναντι από την ΒΓ, είναι μεγαλύτερη από την γωνία Γ = 20 μοίρες που είναι απέναντι από την ΒΑ.



Η γωνία Α (κόκκινη) είναι μεγαλύτερη από την γωνία Γ (μπλε), διότι η πλευρά ΒΓ = 50 μέτρα που είναι απέναντι από την Α, είναι μεγαλύτερη από την πλευρά ΒΑ = 30 μέτρα που είναι απέναντι από την Γ.

Σε κάθε τρίγωνο η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη, από κάθε μία από τις δύο εντός και απέναντι γωνίες.

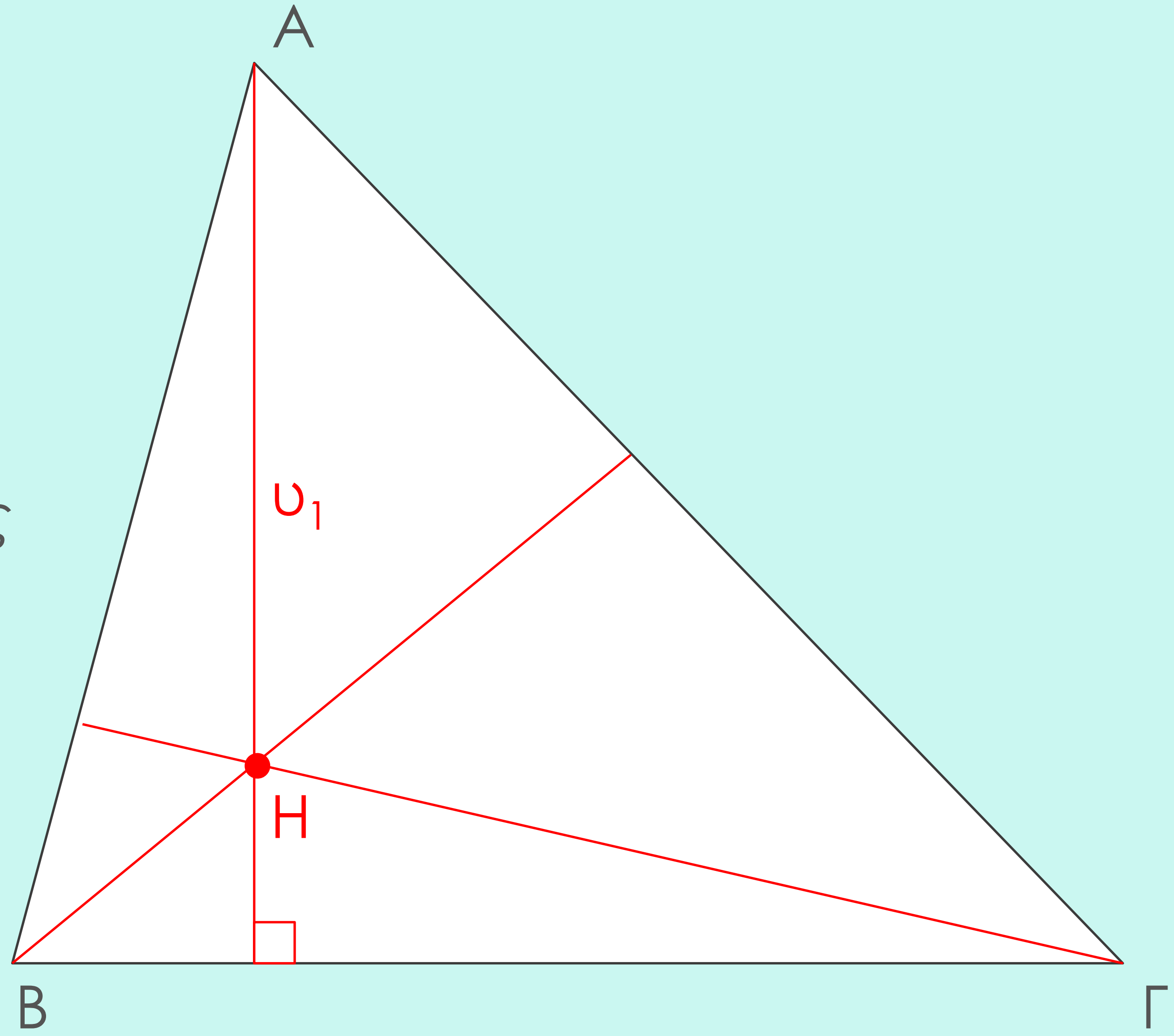
Η εξωτερική γωνία ω, είναι μεγαλύτερη
και από την γωνία χ και
από την γωνία ψ,
διότι ω = χ + ψ.



Τι είναι ύψος σε τρίγωνο ΑΒΓ;
Τι είναι το ορθόκεντρο;

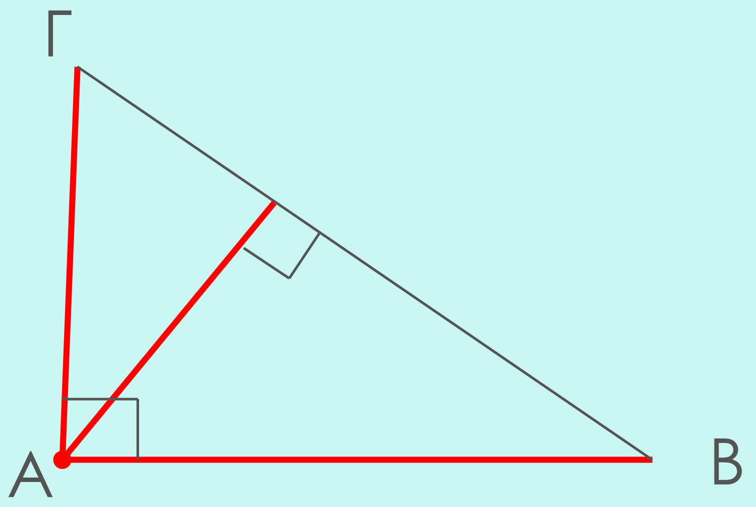
ΑΠ:

Ύψος = Το ευθύγραμμο τμήμα υ_1 που ενώνει την κορυφή με την απέναντι πλευρά κάθετα.
Το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής από την απέναντι πλευρά.

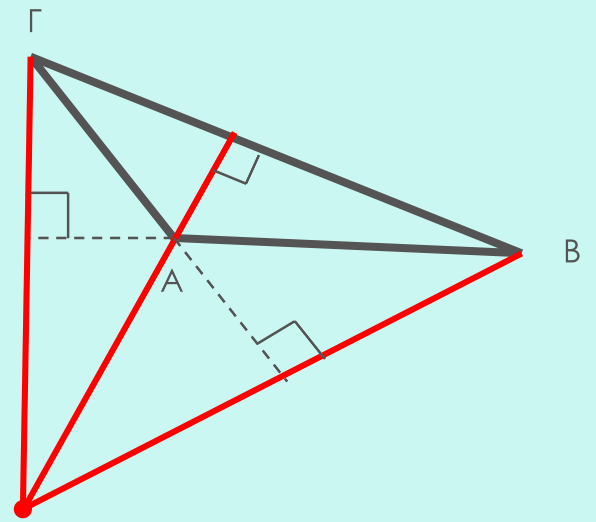


Το κάθε τρίγωνο έχει 3 ύψη που τέμνονται στο ίδιο σημείο Η που λέγεται ορθόκεντρο.

Που τέμνονται και τα τρία *ύψη* ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ;



Που τέμνονται και τα τρία *ύψη* ενός αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ ;

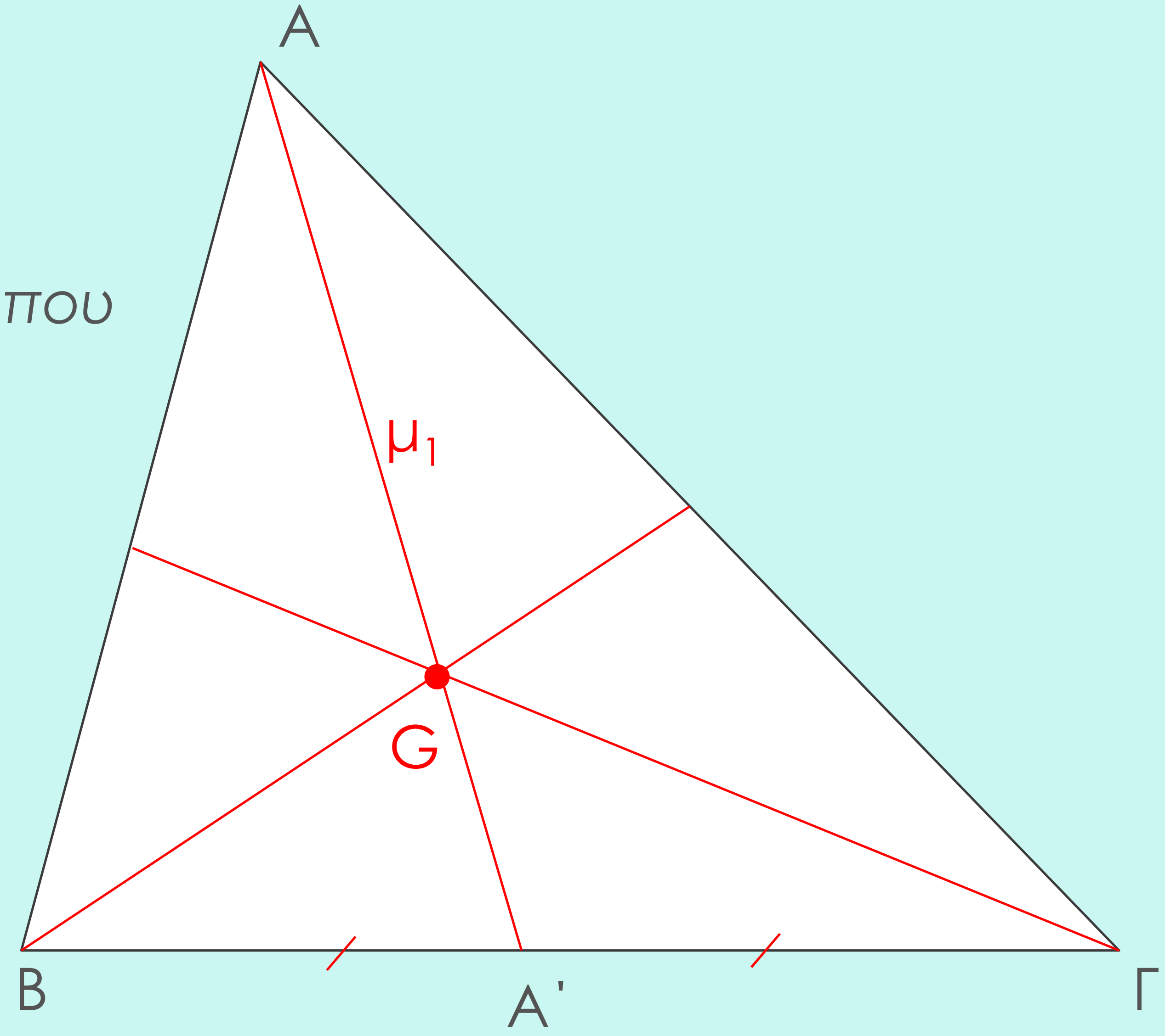


Τι είναι διάμεσος σε τρίγωνο ΑΒΓ;
Τι είναι το βαρύκεντρο;

ΑΠ:

Διάμεσος = Το ευθύγραμμο τμήμα μ_1 που ενώνει την κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Το κάθε τρίγωνο έχει 3 διαμέσους που τέμνονται στο ίδιο σημείο G που λέγεται βαρύκεντρο.

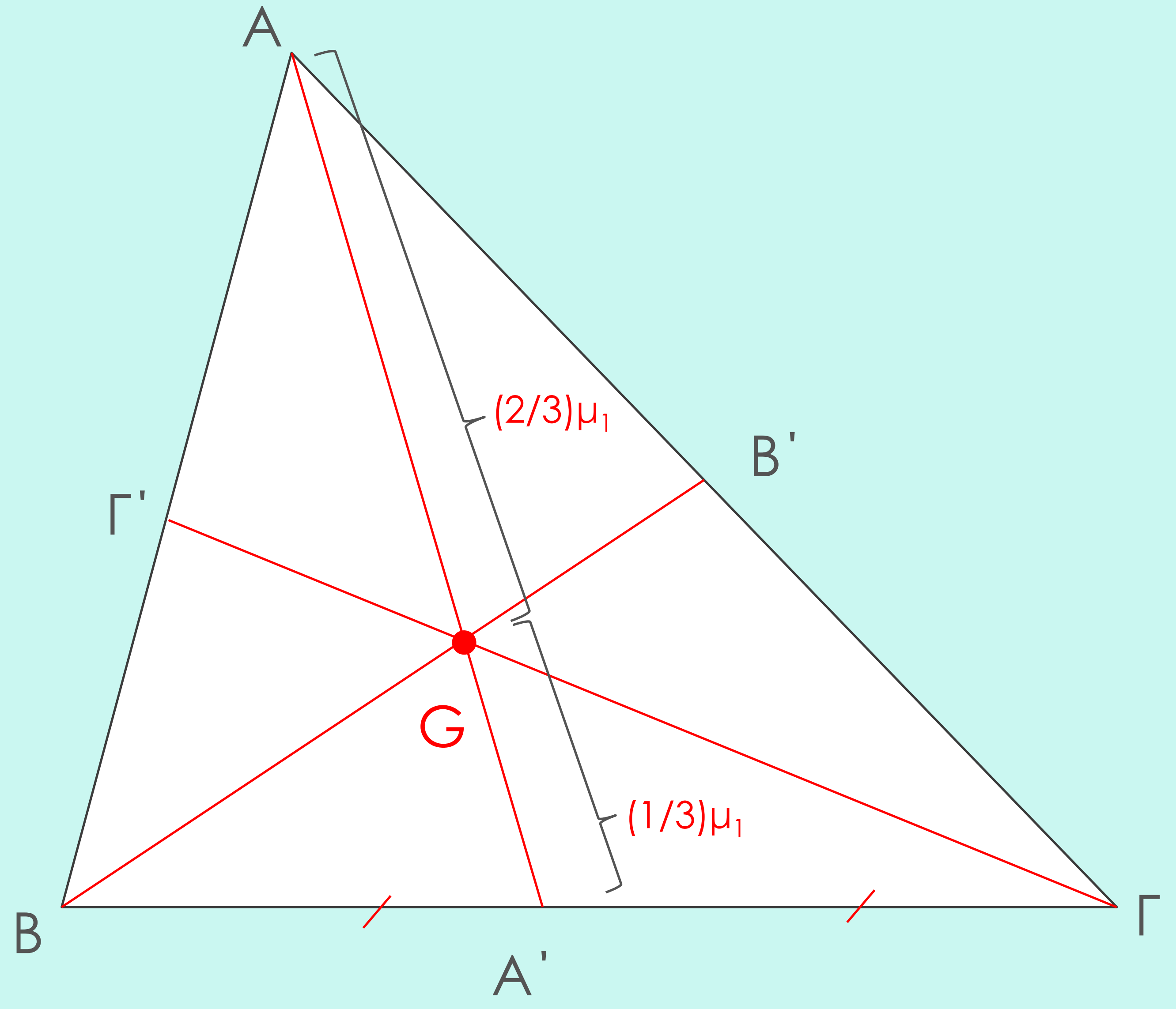


Τι ισχύει για το **βαρύκεντρο** G σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ;

ΑΠ:

Το G χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

$AG = 2GA' = (2/3)AA'$
$BG = 2GB' = (2/3)BB'$
$\Gamma G = 2G\Gamma' = (2/3)\Gamma\Gamma'$

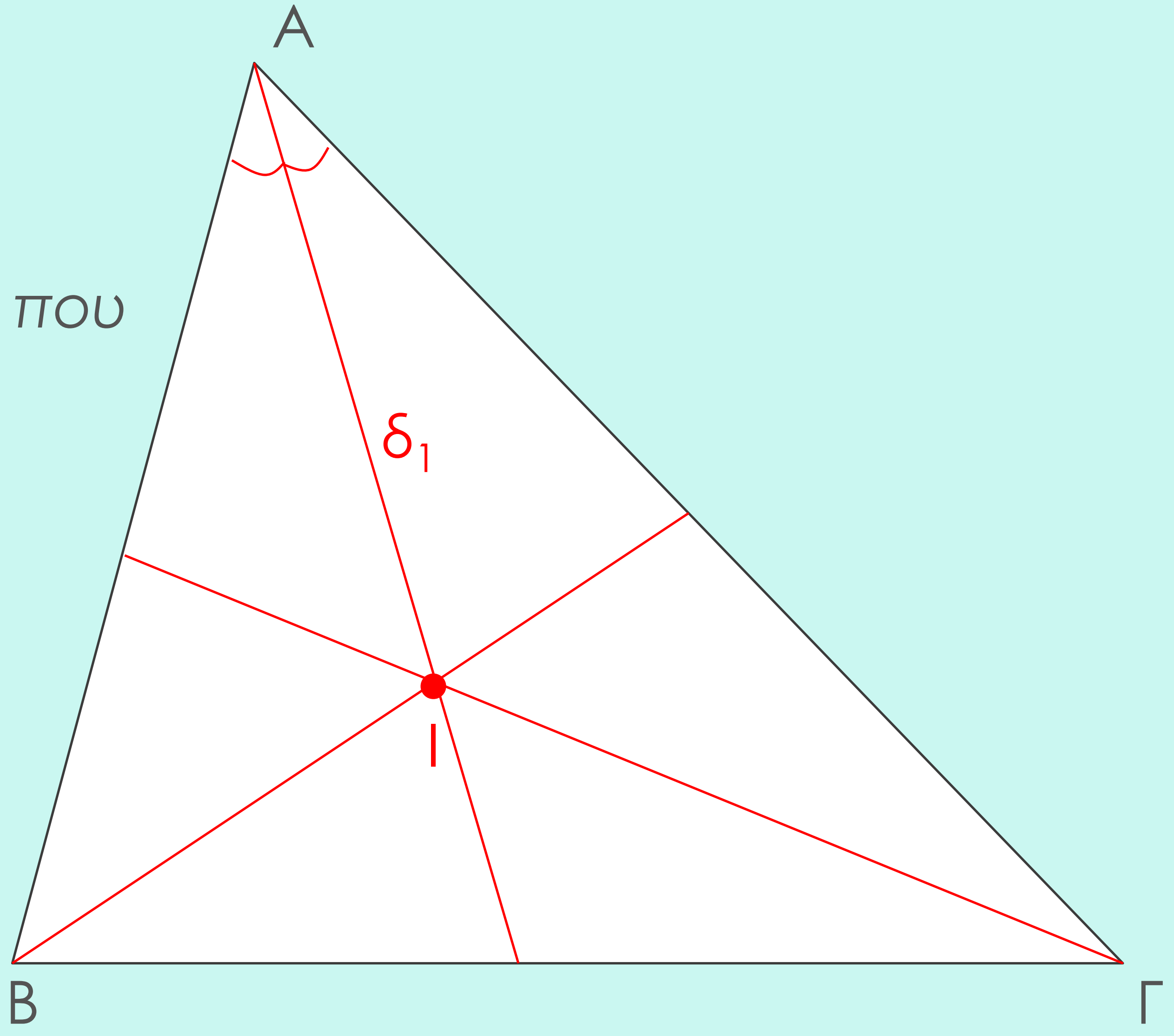


Τι είναι διχοτόμος σε τρίγωνο ΑΒΓ;
Τι είναι το έκκεντρο;

ΑΠ:

Διχοτόμος = *Το ευθύγραμμο τμήμα* δ_1 *που ενώνει την κορυφή με την απέναντι πλευρά και χωρίζει την γωνία της κορυφής σε δύο ίσες γωνίες.*

Το κάθε τρίγωνο έχει 3 διχοτόμους που τέμνονται στο ίδιο σημείο *Ι* *που λέγεται* έκκεντρο.

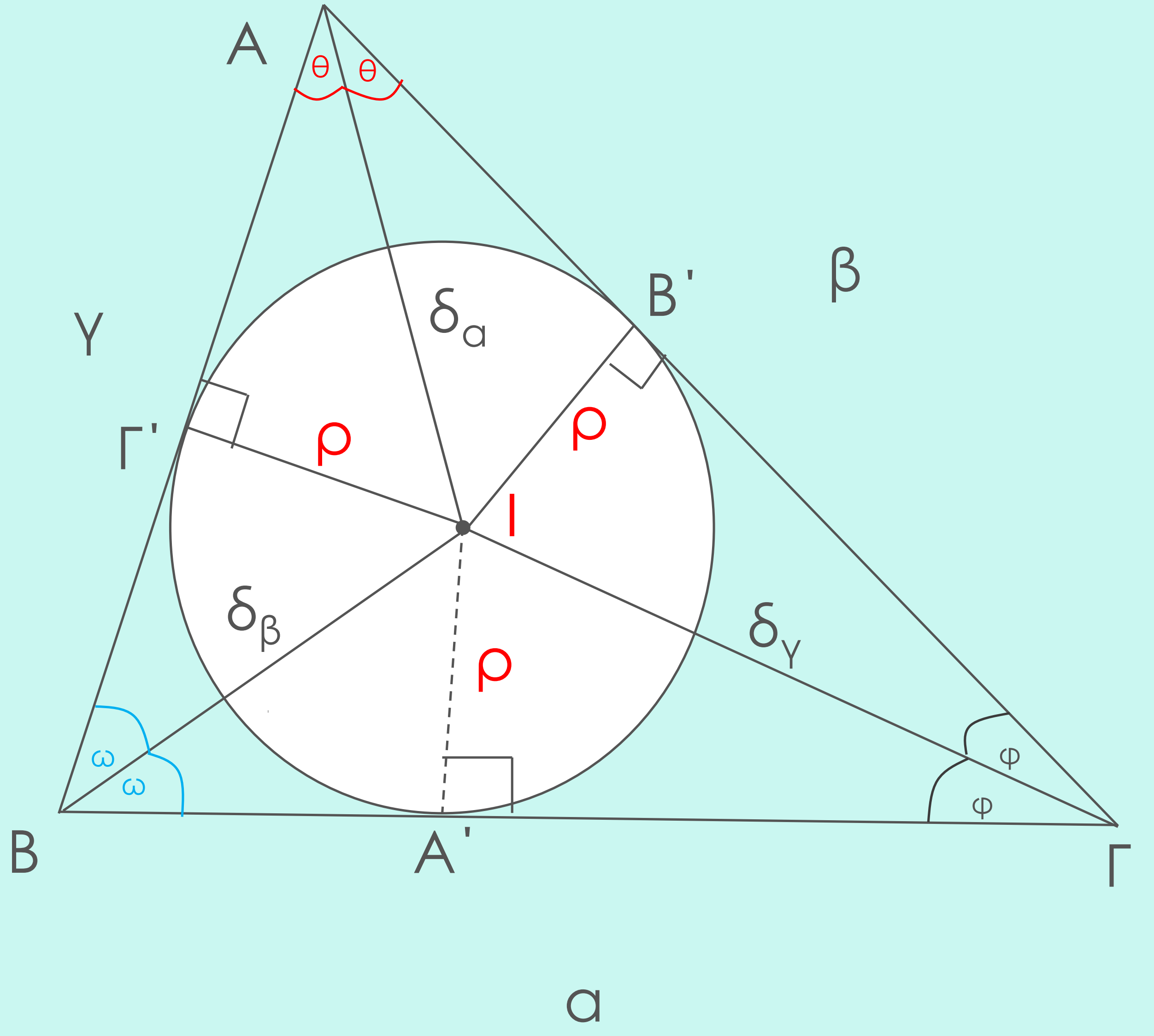


Τι είναι το ρ σε τρίγωνο ΑΒΓ;

ΑΠ:

Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ, δηλαδή η ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές α , β , γ.

ρ = ΙΑ' = ΙΒ' = ΙΓ'.

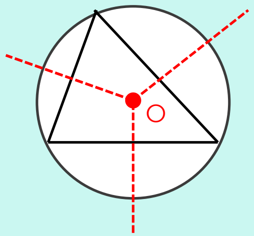


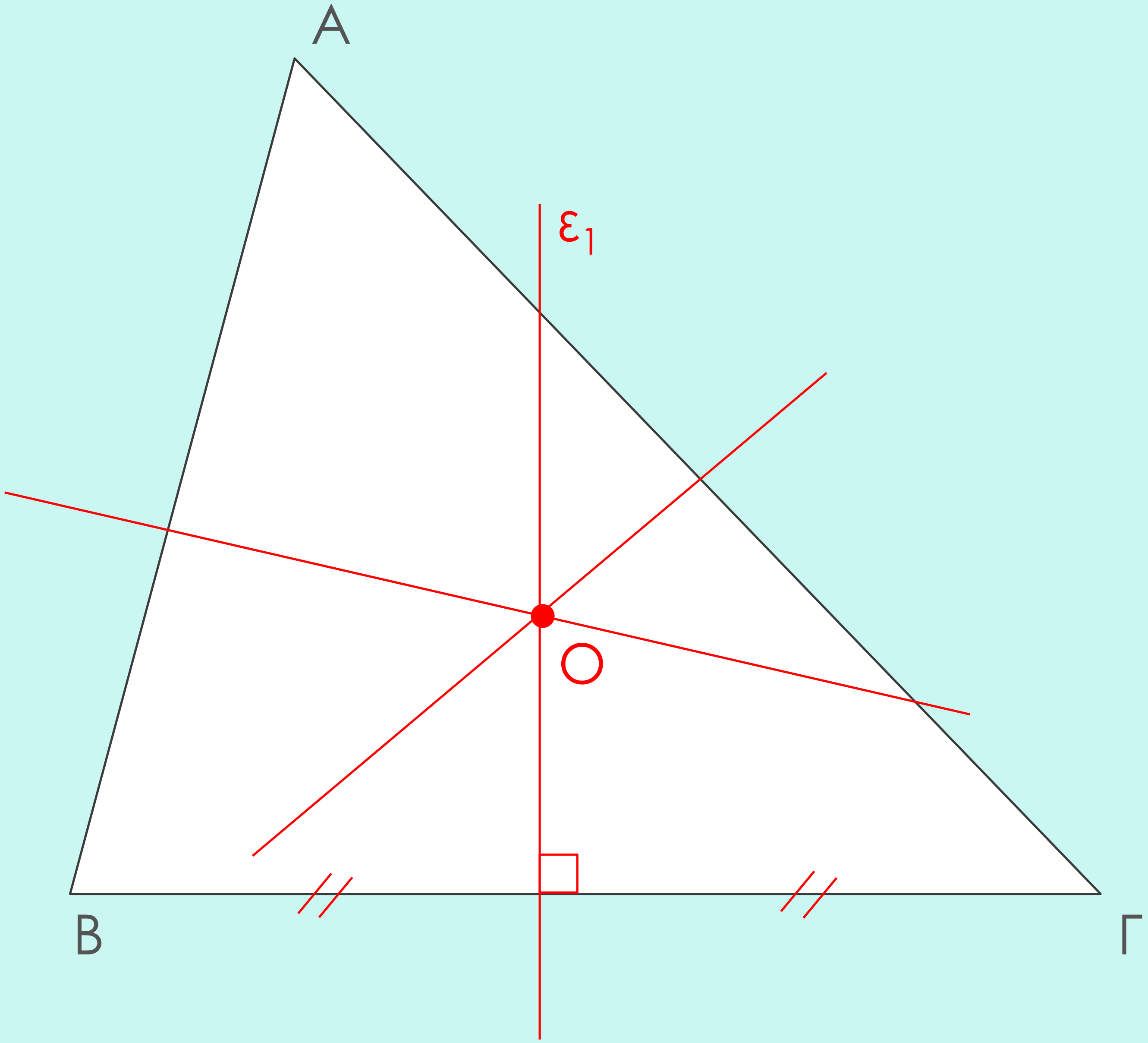
Τι είναι **μεσοκάθετος** σε τρίγωνο ΑΒΓ;
Τι είναι το **περίκεντρο**;

ΑΠ:

Μεσοκάθετος = η ευθεία ε_1 που είναι κάθετη στο μέσο της πλευράς ΒΓ.

Το κάθε τρίγωνο έχει 3 μεσοκαθέτους που τέμνονται στο ίδιο σημείο Ο που λέγεται περίκεντρο.



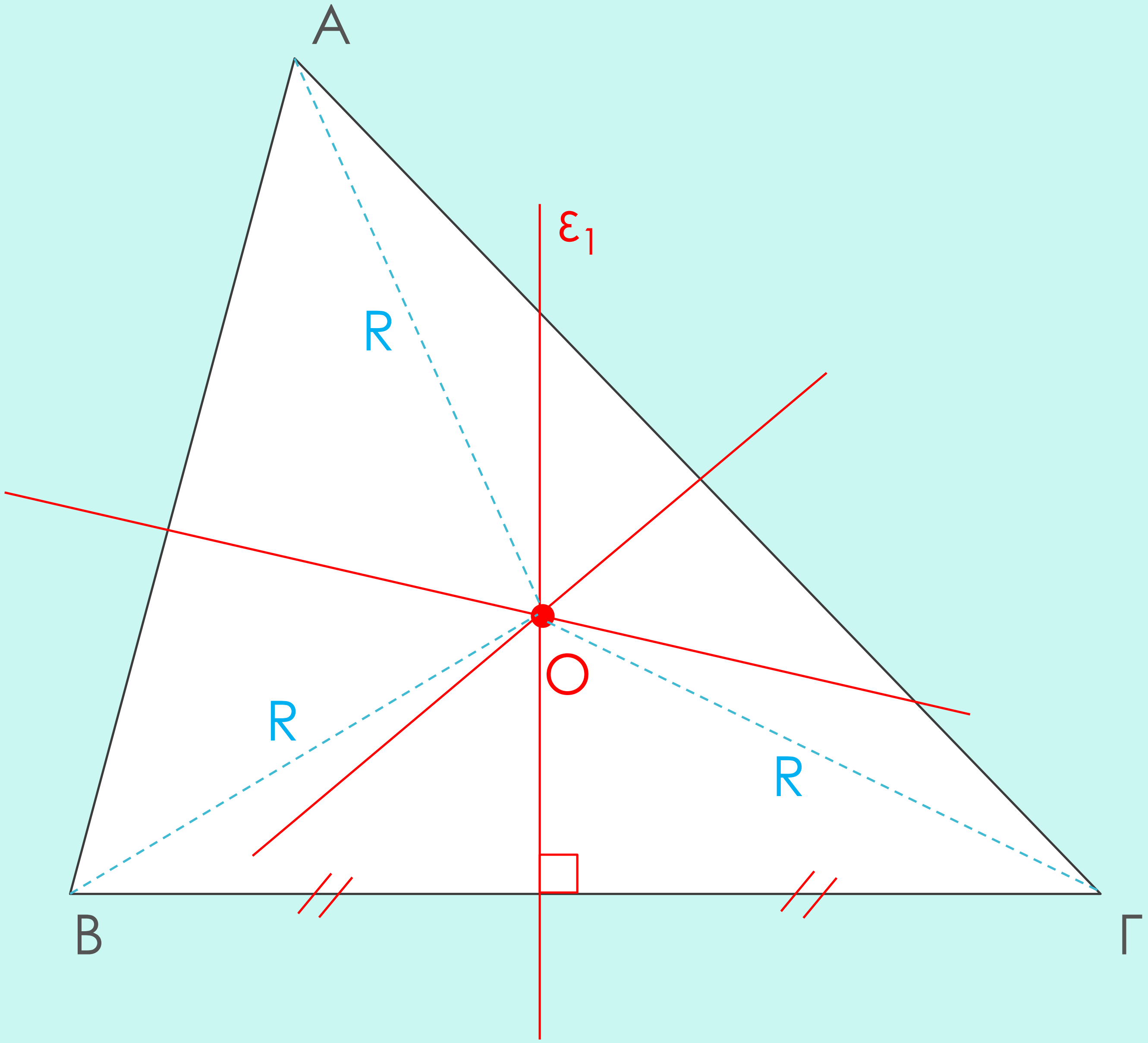


Τι είναι το R σε τρίγωνο ΑΒΓ;

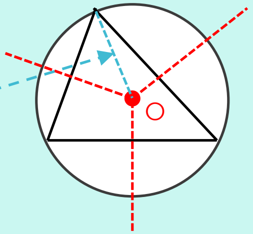
ΑΠ:

Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ, δηλαδή η ακτίνα του κύκλου που διέρχεται και από τις τρεις κορυφές Α , Β , Γ.

R = ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.



R = ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου



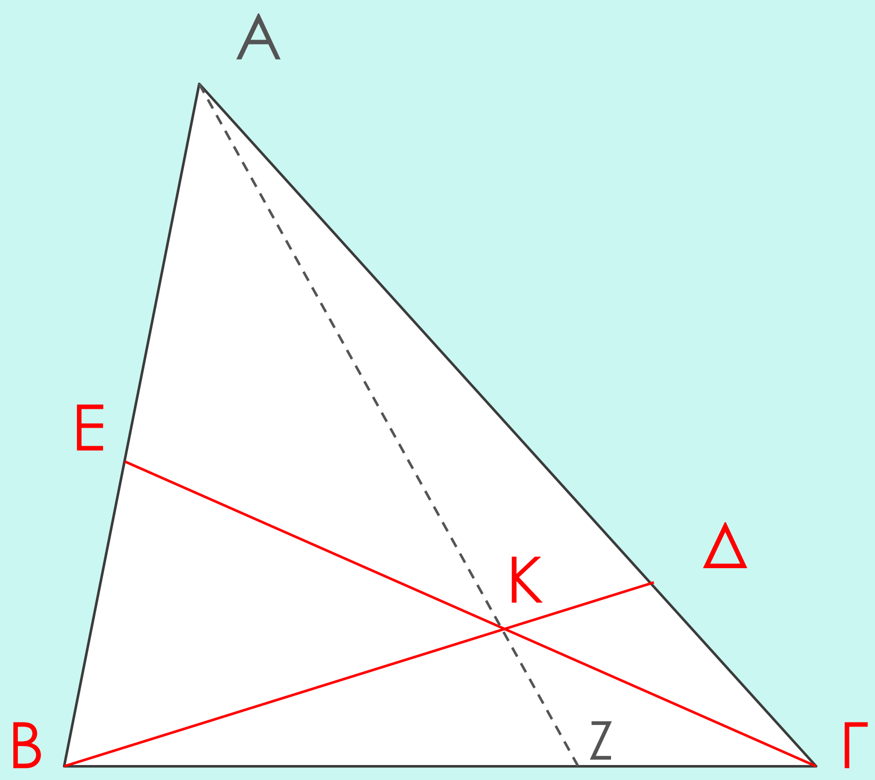
Πως δείχνω ότι τρεις ευθείες ή τρία ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ, ΓΕ, ΑΖ τέμνονται στο ίδιο σημείο ;

ΑΠ:

Δείχνω ότι είναι
ύψη ή διάμεσοι ή διχοτόμοι ή μεσοκάθετοι
σε κάποιο τρίγωνο ΑΒΓ.

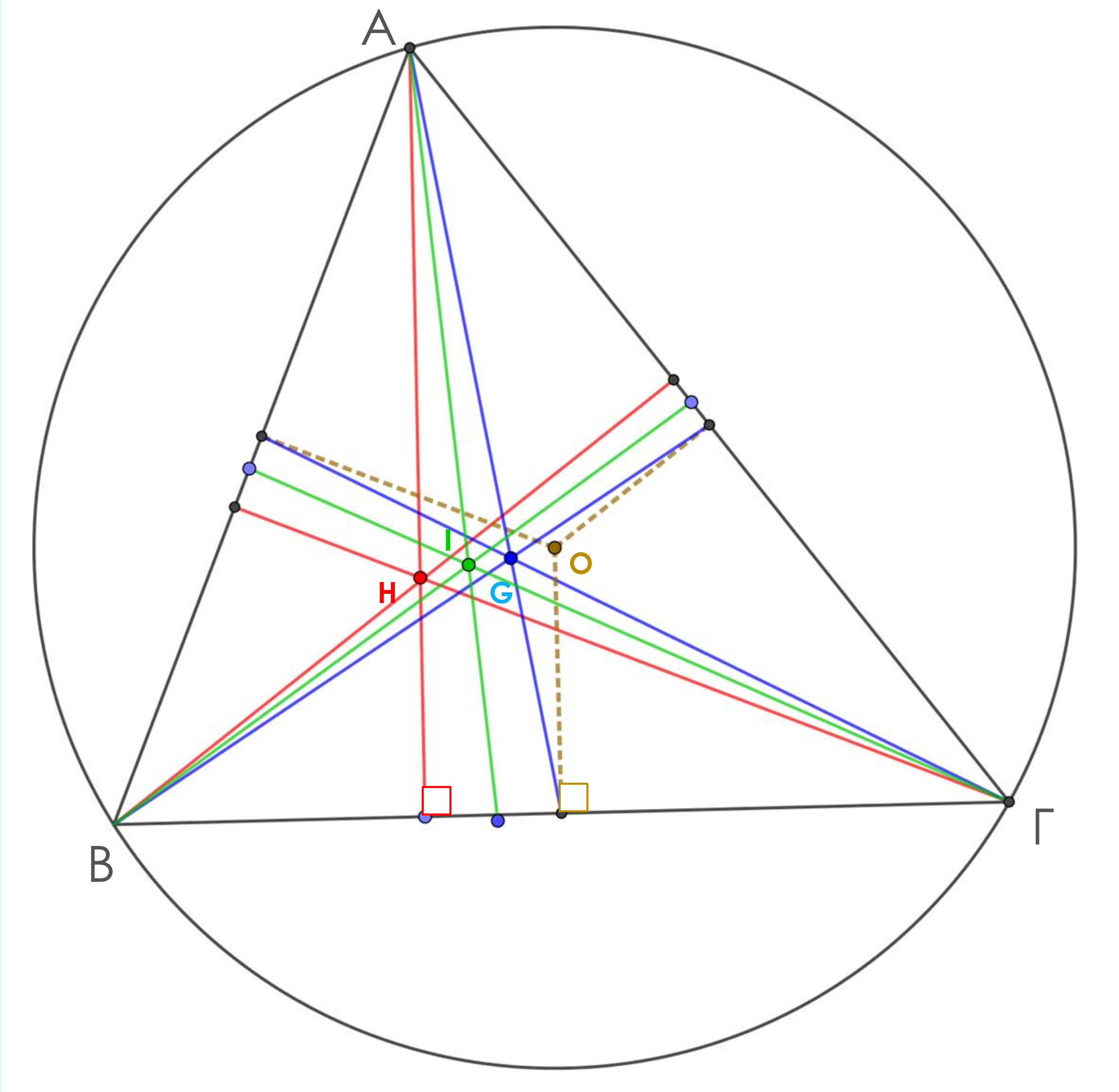
ή

Φέρω πρώτα την ΒΔ και την ΓΕ
που τέμνονται στο Κ.
Ενώνω το Κ με το Α και το Κ με το Ζ
και δείχνω ότι η
γωνία ΑΚΖ = 180 μοίρες.



Τρίγωνο ΑΒΓ και τα εξής στοιχεία του:

- *3 Διάμεσοι (με σημείο τομής το G).*
- *3 Ύψη (με σημείο τομής το H).*
- *3 Διχοτόμοι (με σημείο τομής το I).*
- *3 Μεσοκάθετοι (με σημείο τομής το O).*

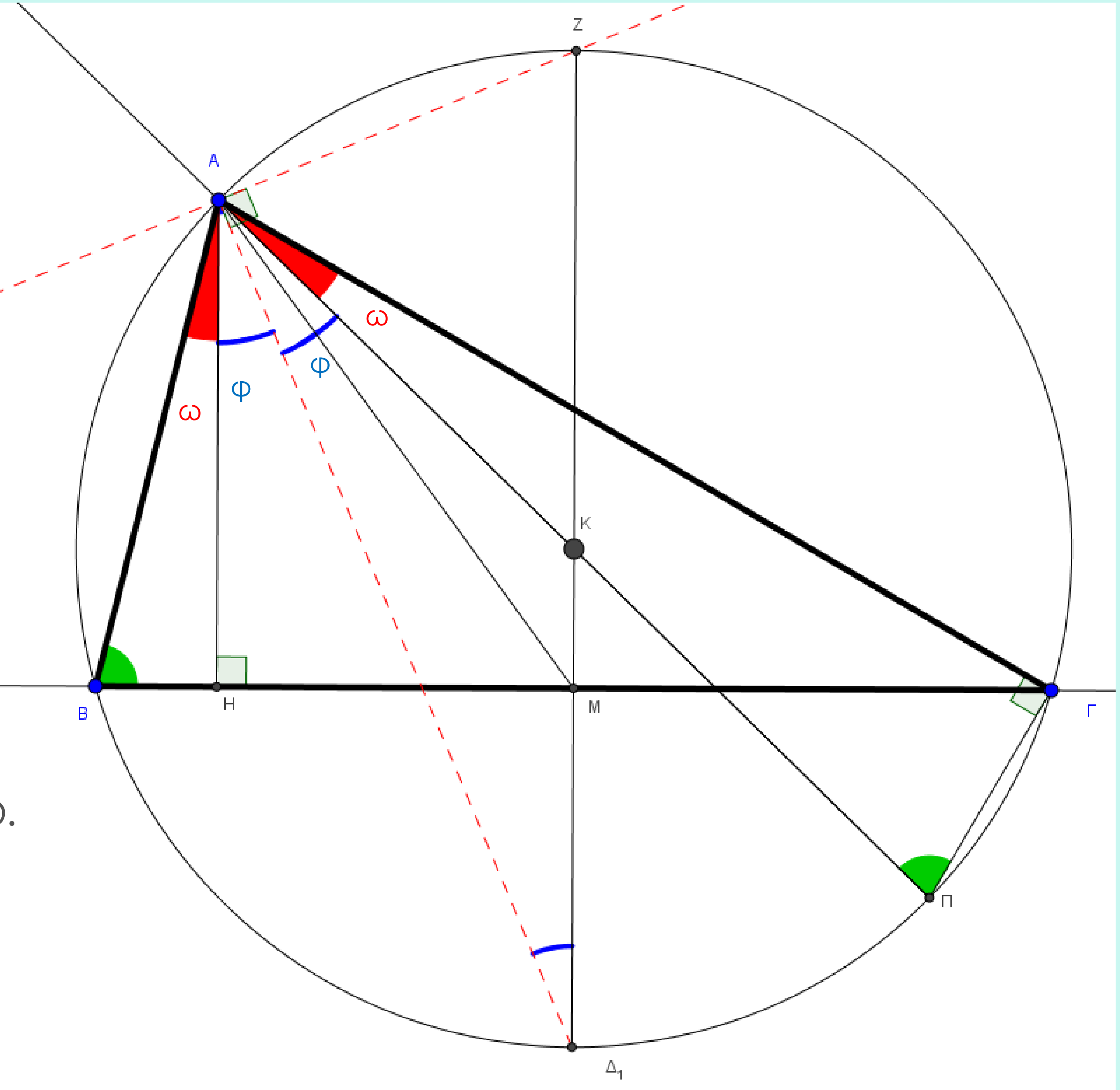


Προσοχή: Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, τα 4 σημεία ***H***, ***G***, ***O***, ***I*** *ταυτίζονται.*

ΣΕ ΚΑΘΕ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΒΓ ΜΕ
ΓΩΝΙΑ Β > ΓΩΝΙΑ Γ, ΙΣΧΥΕΙ:

Μπλε γωνία = φ = (Β – Γ)/2.

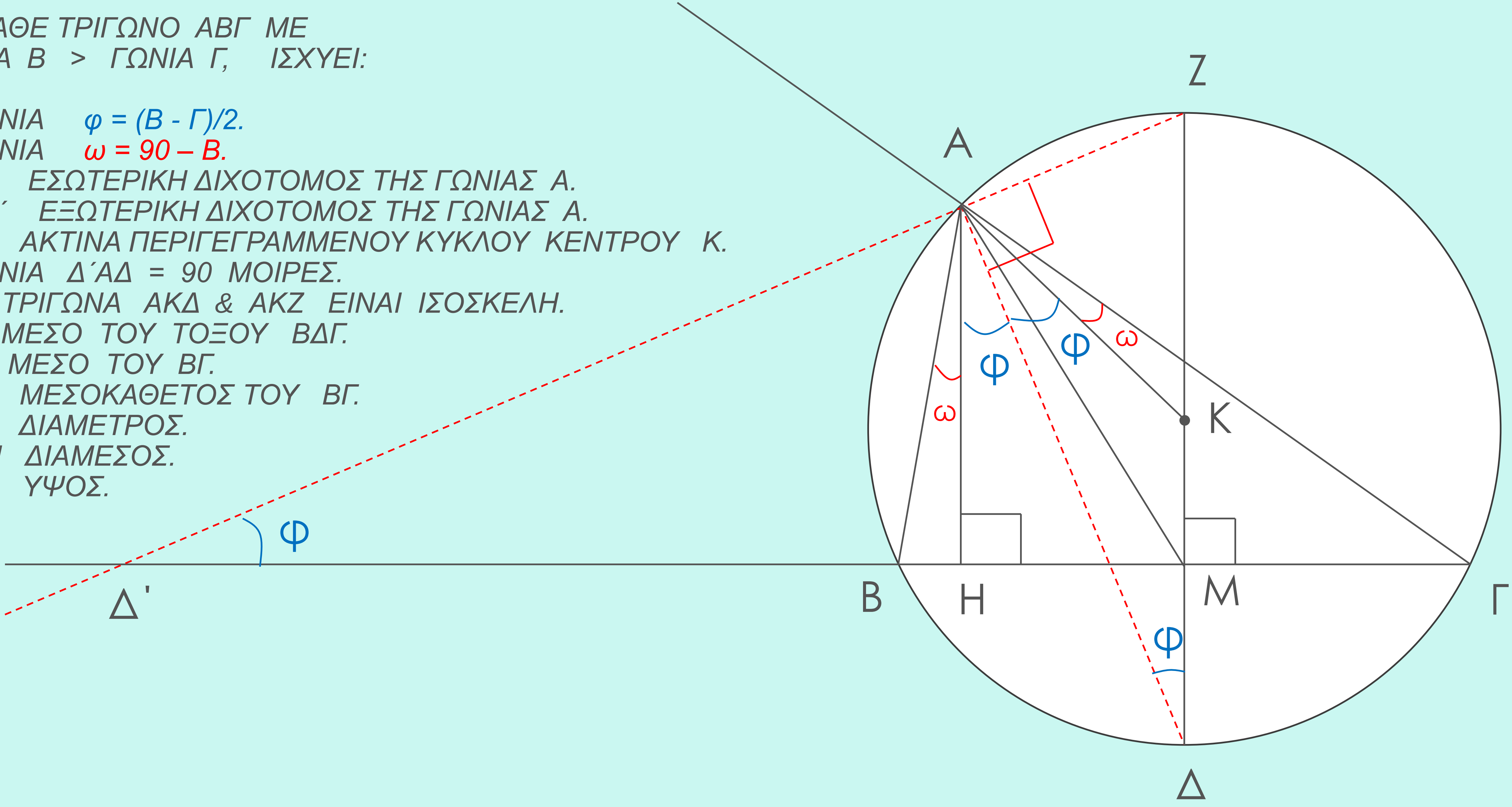
Κόκκινη γωνία = ω = 90 – Β.



Όπου: Κ: το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.
ΑΗ: ύψος.
ΑΔ1: εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.
ΑΔ2: εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.
ΑΚ: ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου.
ΑΜ: διάμεσος.

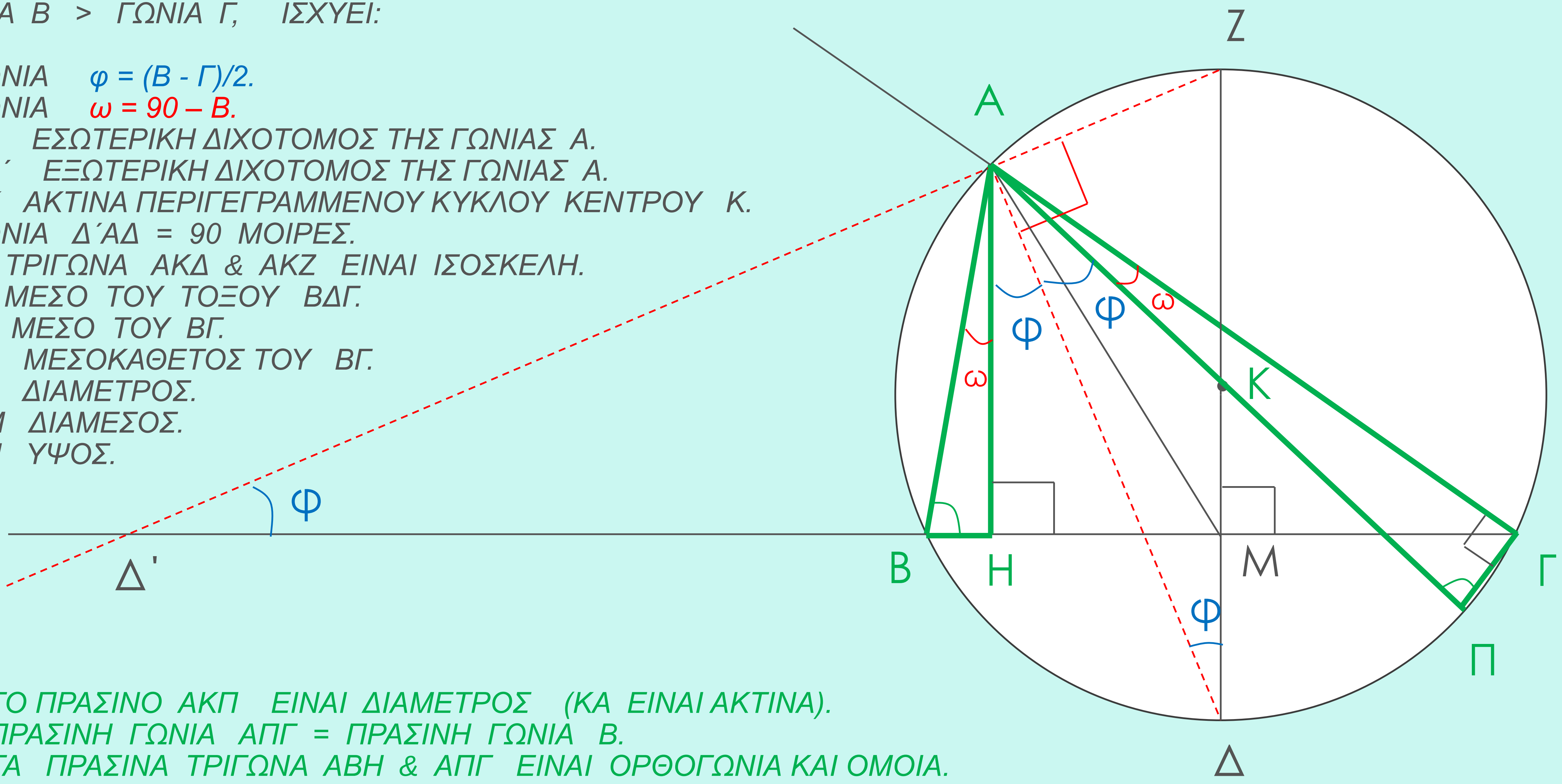
ΣΕ ΚΑΘΕ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΒΓ ΜΕ
ΓΩΝΙΑ Β > ΓΩΝΙΑ Γ, ΙΣΧΥΕΙ:

- ΓΩΝΙΑ $\varphi = (B - \Gamma)/2$.
- ΓΩΝΙΑ $\omega = 90 - B$.
- ΑΔ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ Α.
- ΑΔ΄ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ Α.
- ΑΚ ΑΚΤΙΝΑ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ Κ.
- ΓΩΝΙΑ Δ΄ΑΔ = 90 ΜΟΙΡΕΣ.
- ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΑΚΔ & ΑΚΖ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΗ.
- Δ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ ΒΔΓ.
- Μ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΒΓ.
- ΔΖ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΤΟΥ ΒΓ.
- ΔΖ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ.
- ΑΜ ΔΙΑΜΕΣΟΣ.
- ΑΗ ΥΨΟΣ.



ΣΕ ΚΑΘΕ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΒΓ ΜΕ
ΓΩΝΙΑ Β > ΓΩΝΙΑ Γ, ΙΣΧΥΕΙ:

- ΓΩΝΙΑ φ = (Β - Γ)/2.
- ΓΩΝΙΑ ω = 90 – Β.
- ΑΔ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ Α.
- ΑΔ΄ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ Α.
- ΑΚ ΑΚΤΙΝΑ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ Κ.
- ΓΩΝΙΑ Δ΄ΑΔ = 90 ΜΟΙΡΕΣ.
- ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΑΚΔ & ΑΚΖ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΗ.
- Δ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ ΒΔΓ.
- Μ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΒΓ.
- ΔΖ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΤΟΥ ΒΓ.
- ΔΖ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ.
- ΑΜ ΔΙΑΜΕΣΟΣ.
- ΑΗ ΥΨΟΣ.



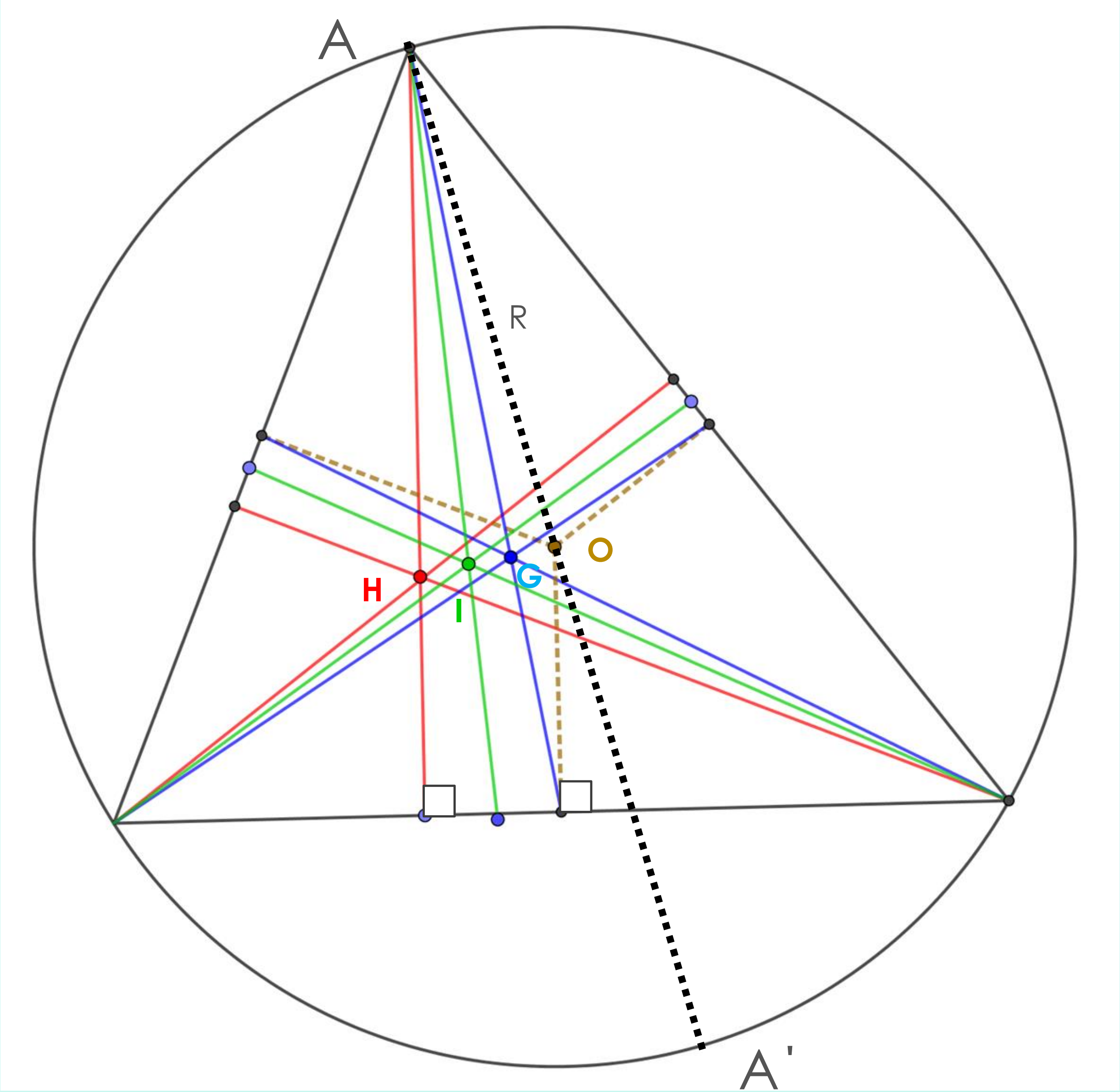
- ► ΤΟ ΠΡΑΣΙΝΟ ΑΚΠ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ (ΚΑ ΕΙΝΑΙ ΑΚΤΙΝΑ).
- ► ΠΡΑΣΙΝΗ ΓΩΝΙΑ ΑΠΓ = ΠΡΑΣΙΝΗ ΓΩΝΙΑ Β.
- ► ΤΑ ΠΡΑΣΙΝΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΑΒΗ & ΑΠΓ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΟΜΟΙΑ.

Τρίγωνο ΑΒΓ και τα εξής στοιχεία του:

- 3 Διάμεσοι (με σημείο τομής το G).
- 3 Ύψη (με σημείο τομής το H).
- 3 Διχοτόμοι (με σημείο τομής το I).
- 3 Μεσοκάθετοι (με σημείο τομής το O).

- Περιγεγραμμένος κύκλος (**O** , **R**).
  Ακτίνα R.
  Διάμετρος ΑΑ΄.

Τα 3 σημεία **H** , **G** , **O** είναι πάντα σε ευθεία (ευθεία του EULER).



Προσοχή: Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, τα 4 σημεία **H**, **G**, **O**, **I** ταυτίζονται.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

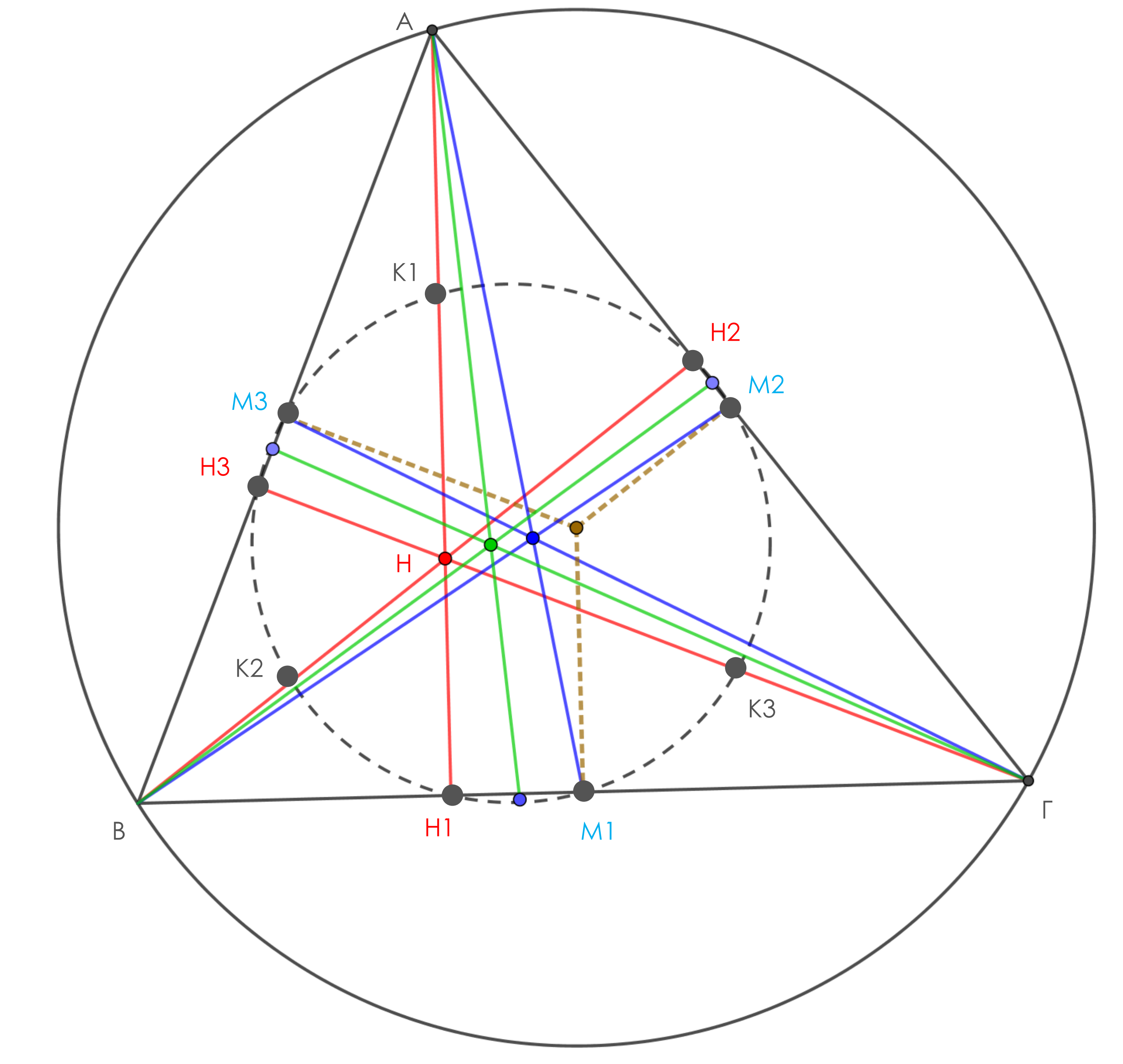
- ***Μ1 , Μ2 , Μ3*** *είναι τα μέσα των πλευρών.*

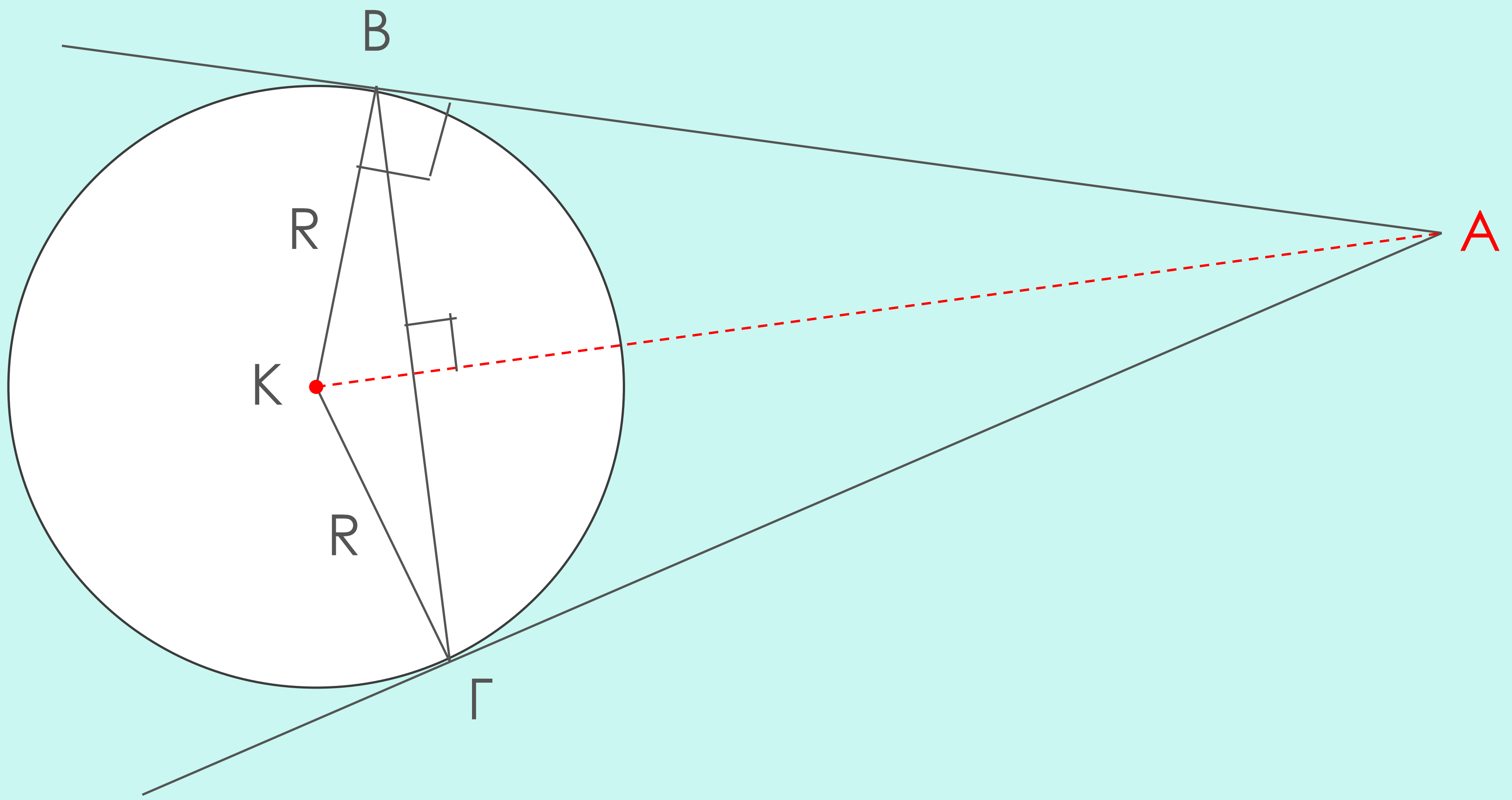
- ***Η1 , Η2 , Η3*** *είναι οι πόδες των υψών.*

- ***Κ1 , Κ2 , Κ3*** *είναι τα μέσα των ΑΗ , ΒΗ , ΓΗ αντίστοιχα, όπου Η είναι το σημείο τομής των υψών (ορθόκεντρο).*

Υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα εξής σημεία
Μ1, Μ2 , Μ3 ,
Η1 , Η2 , Η3 ,
Κ1 , Κ2 , Κ3.

Ο κύκλος αυτός λέγεται κύκλος του Euler ή κύκλος των 9 σημείων.





ΕΣΤΩ ΚΥΚΛΟΣ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟ Κ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΟ Α ΕΚΤΟΣ ΑΥΤΟΥ ΚΑΙ ΑΒ , ΑΓ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ.
ΤΟΤΕ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΕΞΗΣ:

- *ΤΑ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΑΒ ΚΑΙ ΑΓ ΕΙΝΑΙ ΙΣΑ (ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΒΓ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ).*
- *Η ΑΚ ΕΙΝΑΙ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΤΟΥ ΒΓ.*

Κοινές εφαπτομένες ευθείες δύο κύκλων που φέρονται από τα σημεία Ρ και Η.

$PA = PA'$

$PE = PE'$

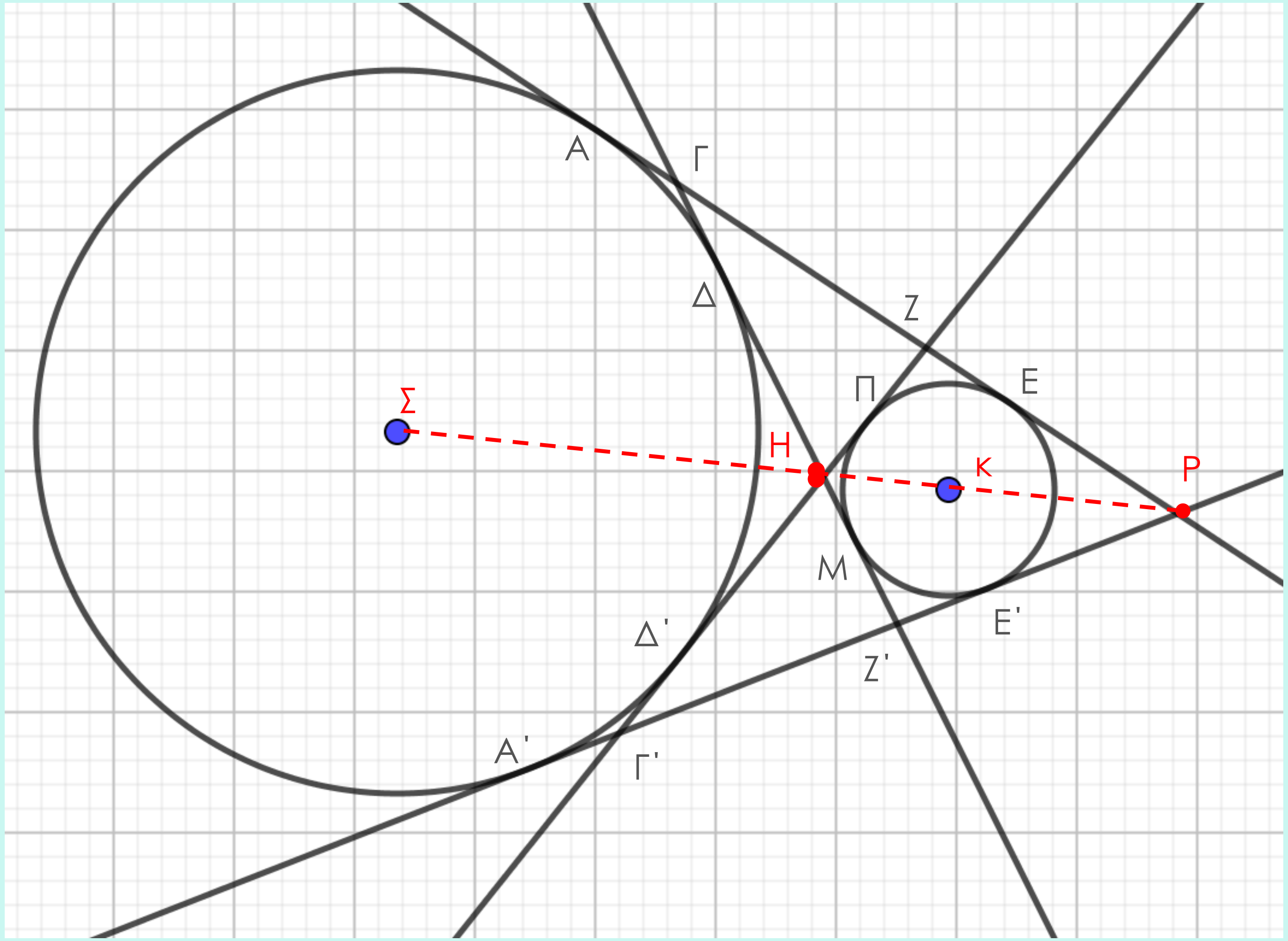
$AE = A'E'$

$\Gamma Z = \Gamma' Z'$

$\Delta M = \Delta' \Pi$

$\Gamma Z' = \Gamma' Z$

ΡΚΗΣ ευθεία



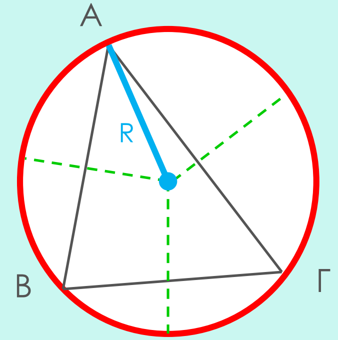
Σε τρίγωνο ΑΒΓ, πως βρίσκω το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, του εγγεγραμμένου κύκλου και του παραγεγραμμένου κύκλου και πως συμβολίζω την ακτίνα τους;

ΑΠ:

Περιγεγραμμένου: *Είναι το σημείο τομής όλων των μεσοκαθέτων των πλευρών του.*

Ακτίνα = R

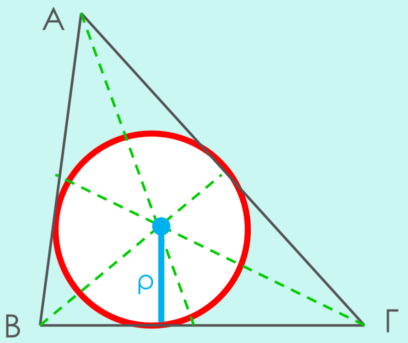
→



Εγγεγραμμένου: *Είναι το σημείο τομής όλων των διχοτόμων των γωνιών του.*

Ακτίνα = ρ

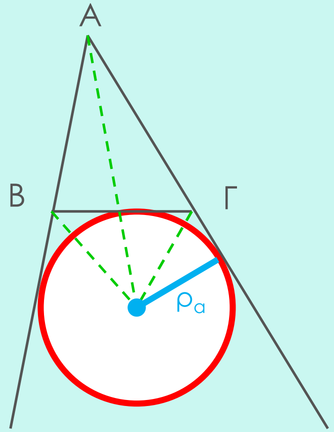
→



Παραγεγραμμένου: *Είναι το σημείο τομής δύο εξωτερικών διχοτόμων και της απέναντι εσωτερικής του.*
(Υπάρχουν τρεις κύκλοι)

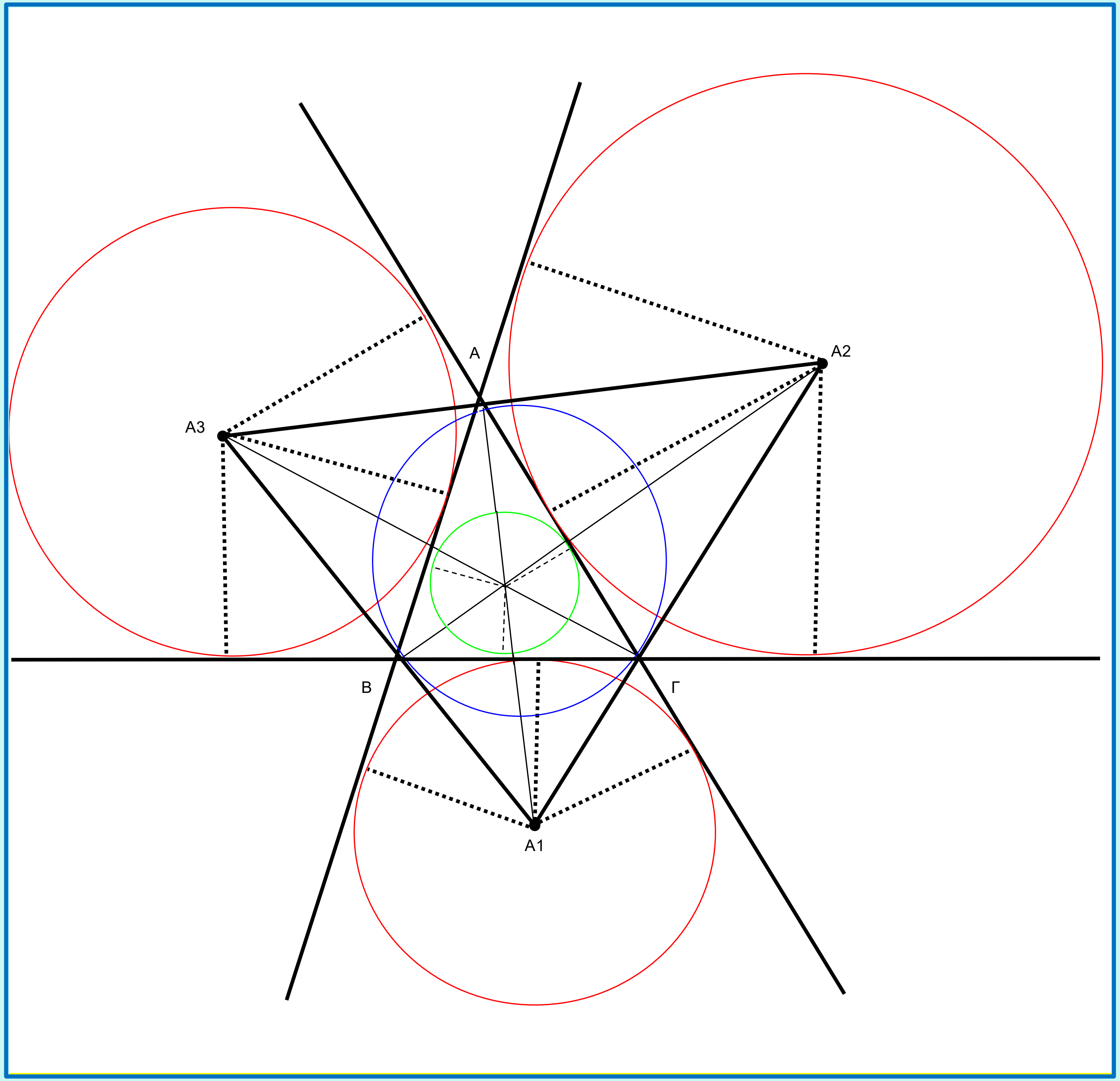
Ακτίνες = ρ_α , ρ_β , ρ_γ

→



Τρίγωνο ΑΒΓ και οι εξής κύκλοι του:

- *Εγγεγραμμένος (πράσινος)*
- *Περιγεγραμμένος (μπλε)*
- *Παραγεγραμμένοι (κόκκινοι)*



Τρίγωνο ΑΒΓ και οι εξής κύκλοι του:

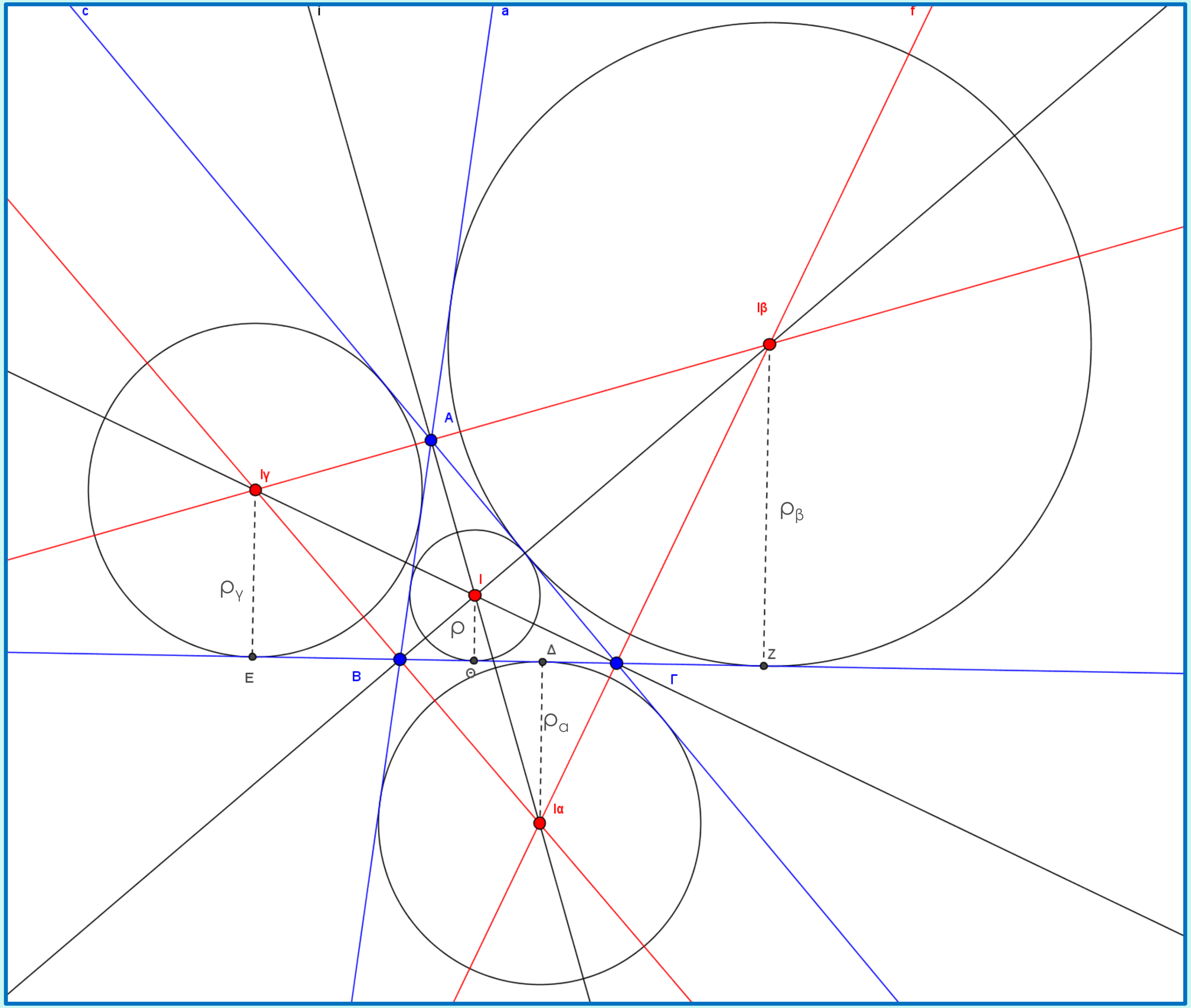
- Εγγεγραμμένος με κέντρο το I.

- παραγεγραμμένοι με κέντρα τα I_α , I_β , I_γ.

ρ = ακτίνα εγγεγραμμένου.

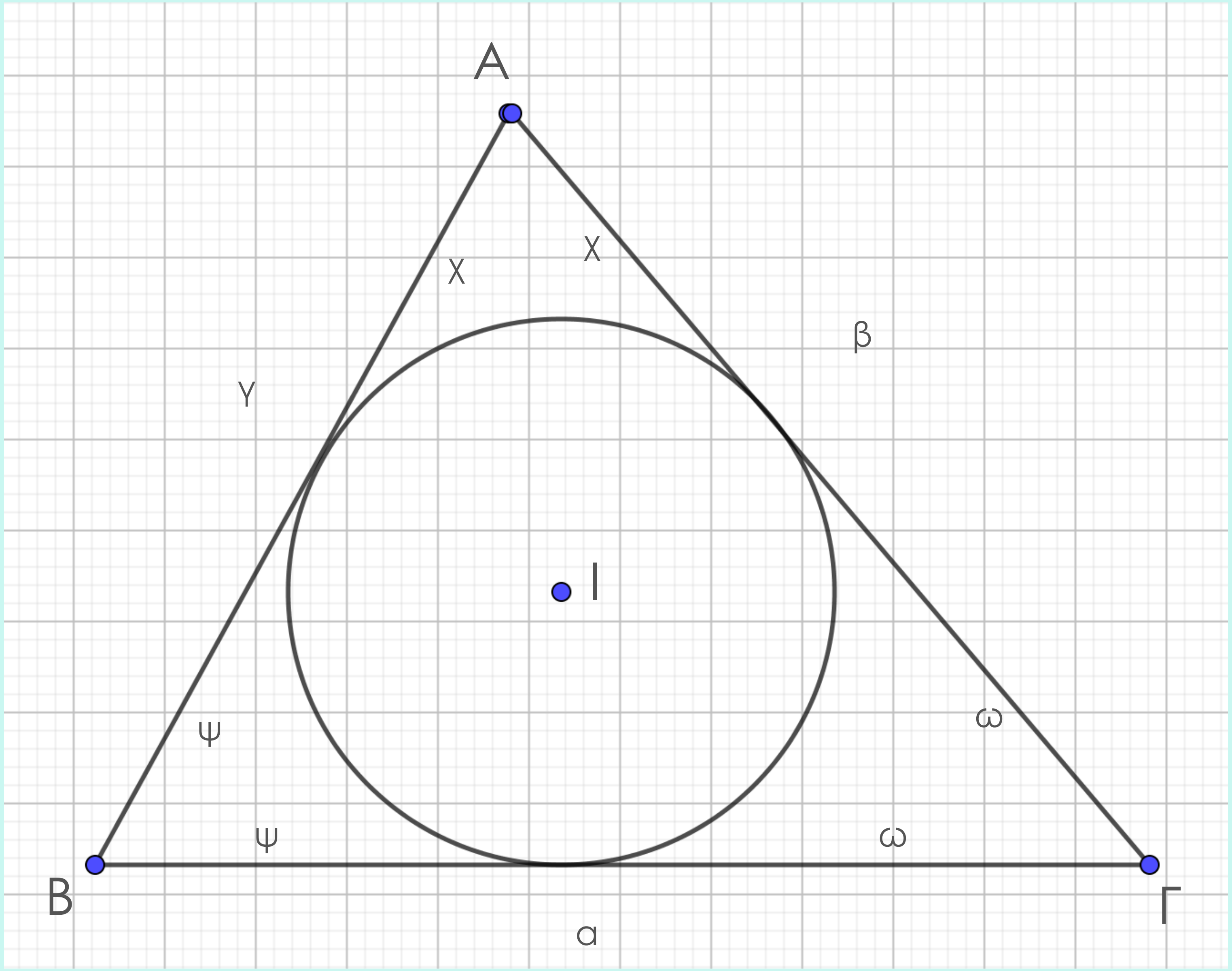
ρ_α = ακτίνα παραγεγραμμένου, απέναντι από την Α γωνία και εφαπτόμενου εξωτερικά στην α πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

Ομοίως αντίστοιχα και οι ακτίνες ρ_β και ρ_γ .



Στο διπλανό σχήμα, I είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Πως βρίσκω τα χ, ψ, ω, όταν γνωρίζω μόνο τις πλευρές α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ;



ΑΠ:

$$\chi = \tau - \alpha$$

$$\psi = \tau - \beta$$

$$\omega = \tau - \gamma$$

τ = μισή περίμετρος τριγώνου ΑΒΓ = ημιπερίμετρος ΑΒΓ = (α + β + γ)/2.

Στο διπλανό σχήμα, Ι είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου και I_a είναι το κέντρο του παραγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Πως βρίσκω το χ = ΑΜ = ΑΝ, όταν γνωρίζω μόνο τις πλευρές α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ;

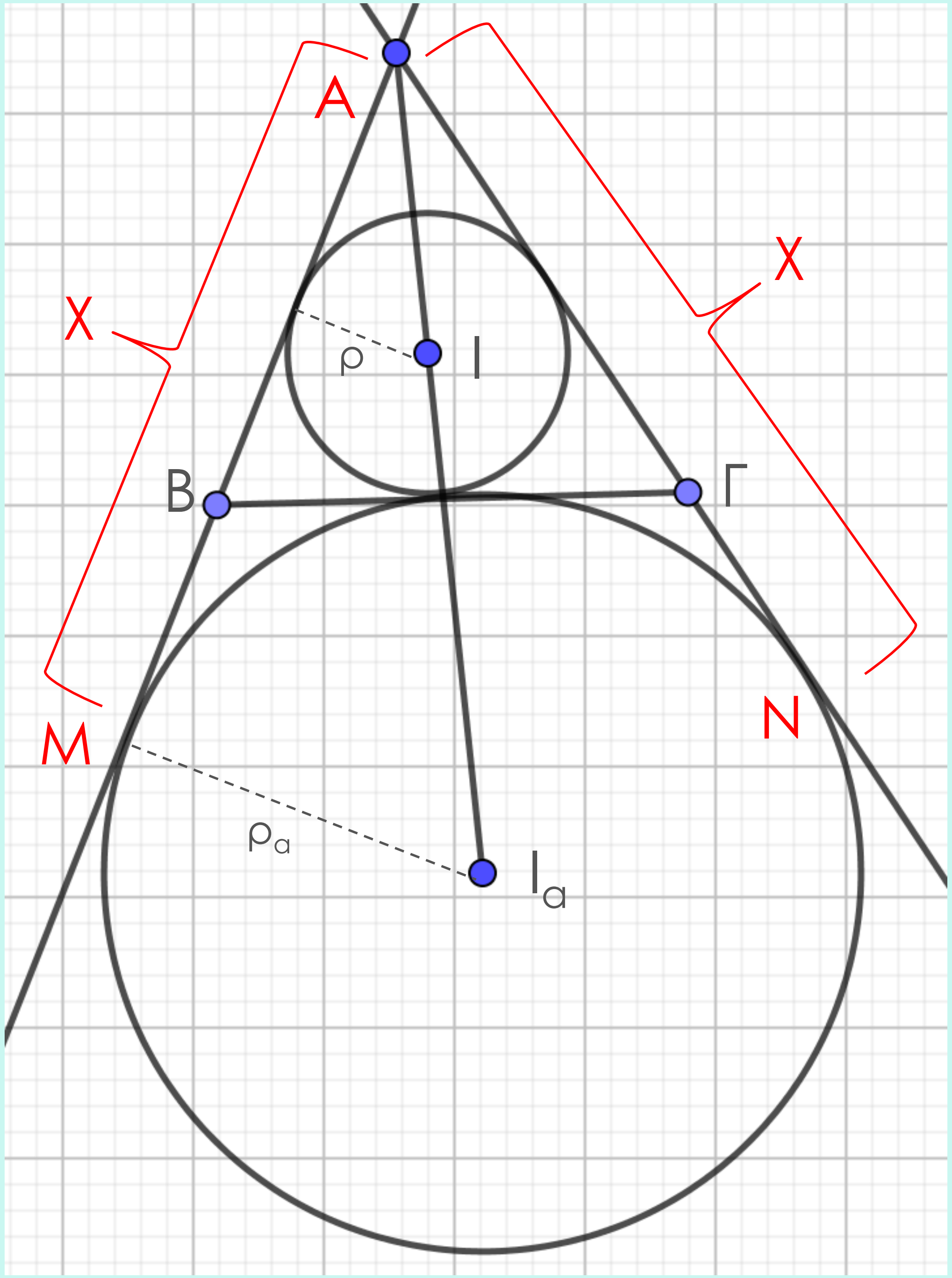
ΑΠ:

$\boxed{\chi = \tau}$

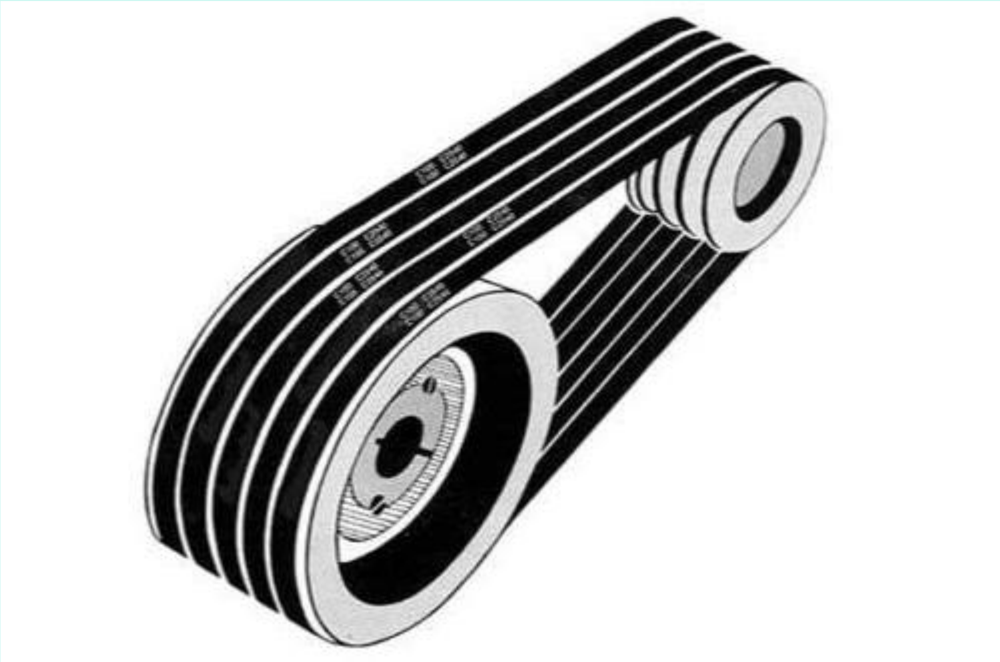
τ = μισή περίμετρος τριγώνου ΑΒΓ =
= ημιπερίμετρος ΑΒΓ =
= (α + β + γ)/2.

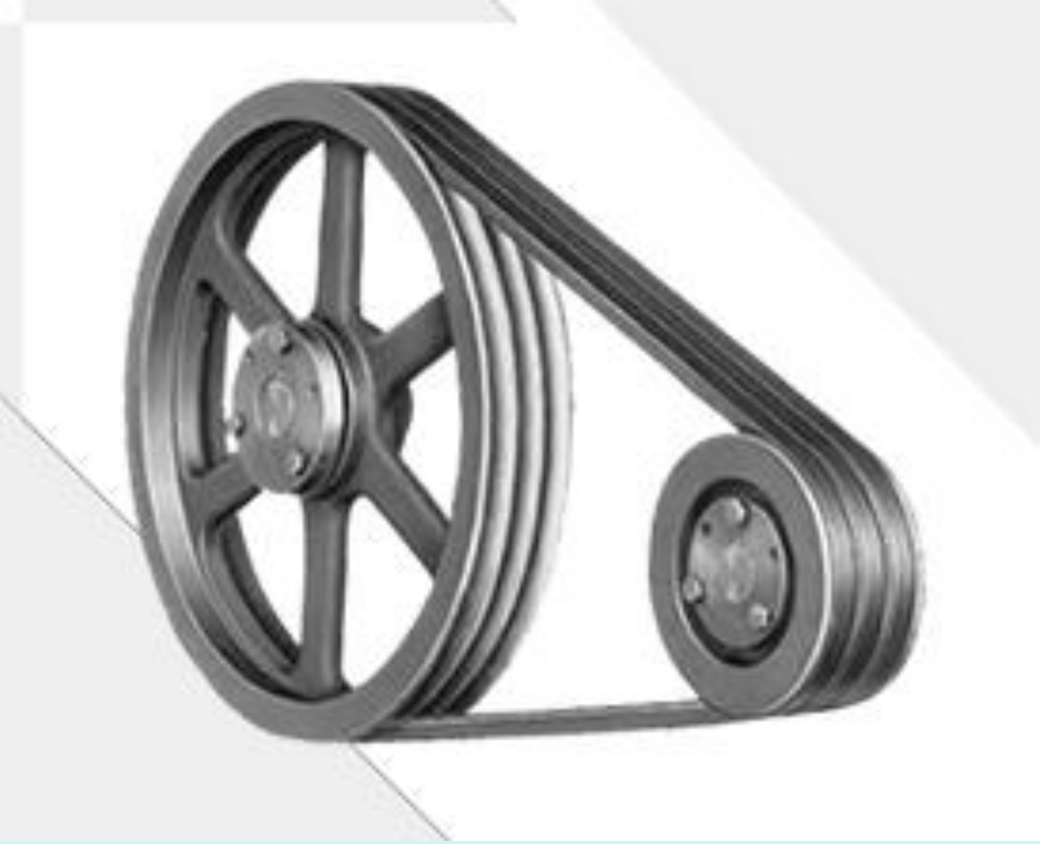
ρ = ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου με κέντρο το Ι.

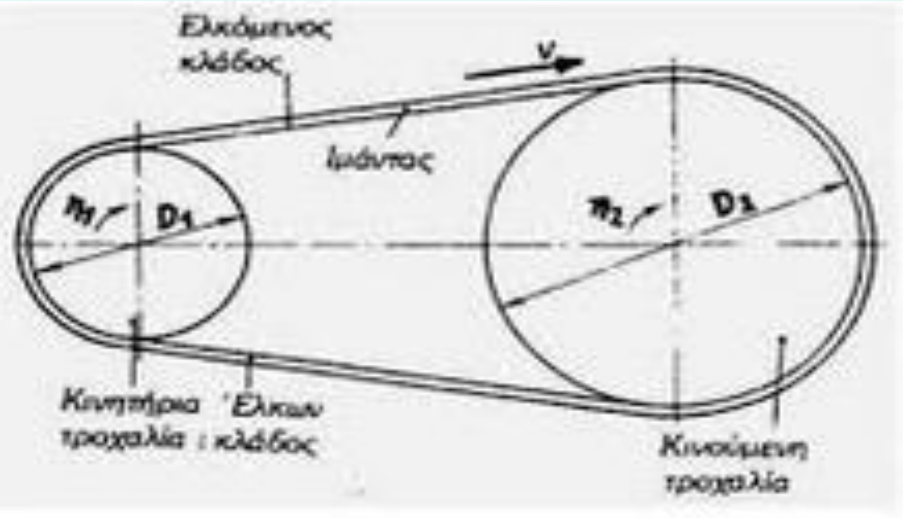
ρ_a = ακτίνα του παραγεγραμμένου κύκλου με κέντρο το I_a .



Κύκλοι και ιμάντες στις κατασκευές των μηχανών







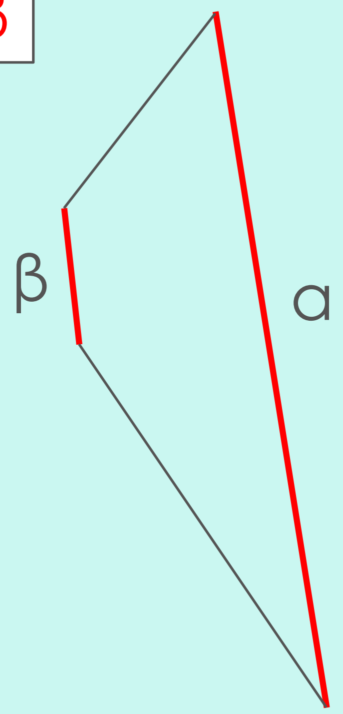
Μέρη του συστήματος μετάδοσης κίνησης με ιμάντες (ιμαντοκίνηση).

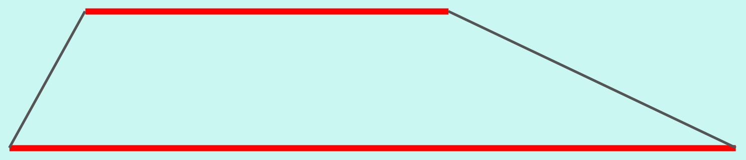
Τι είναι τραπέζιο;

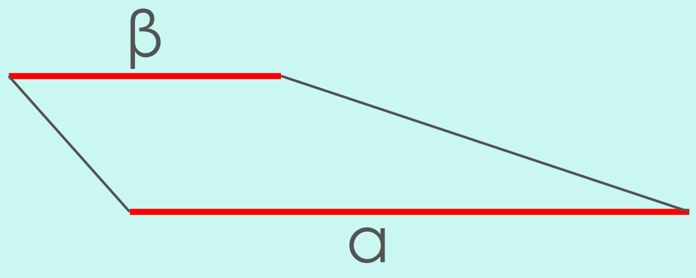
ΑΠ:

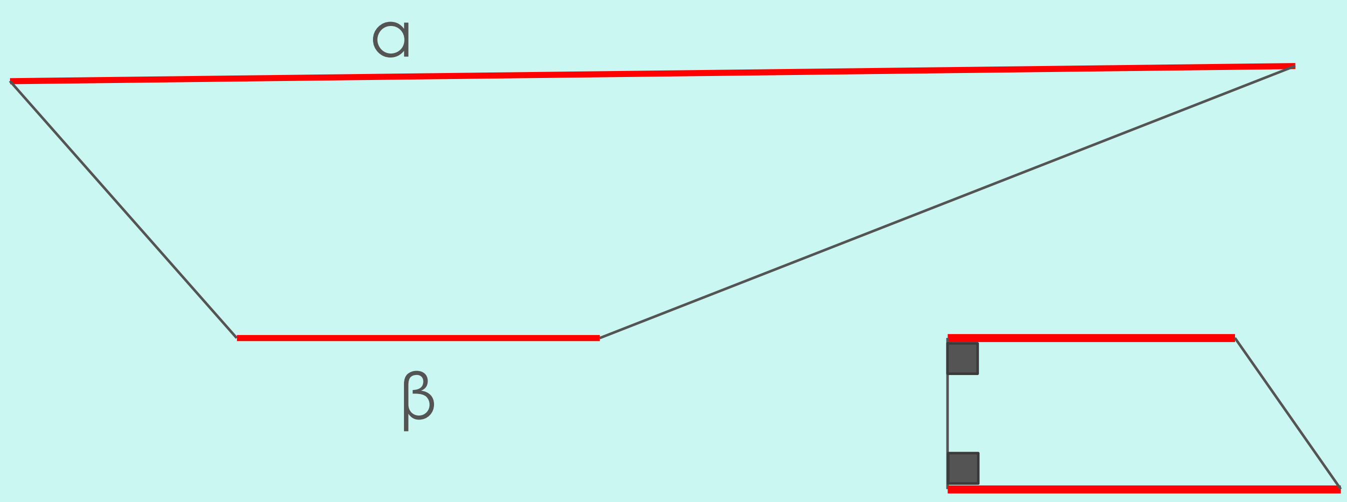
Το τετράπλευρο με μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

α // β

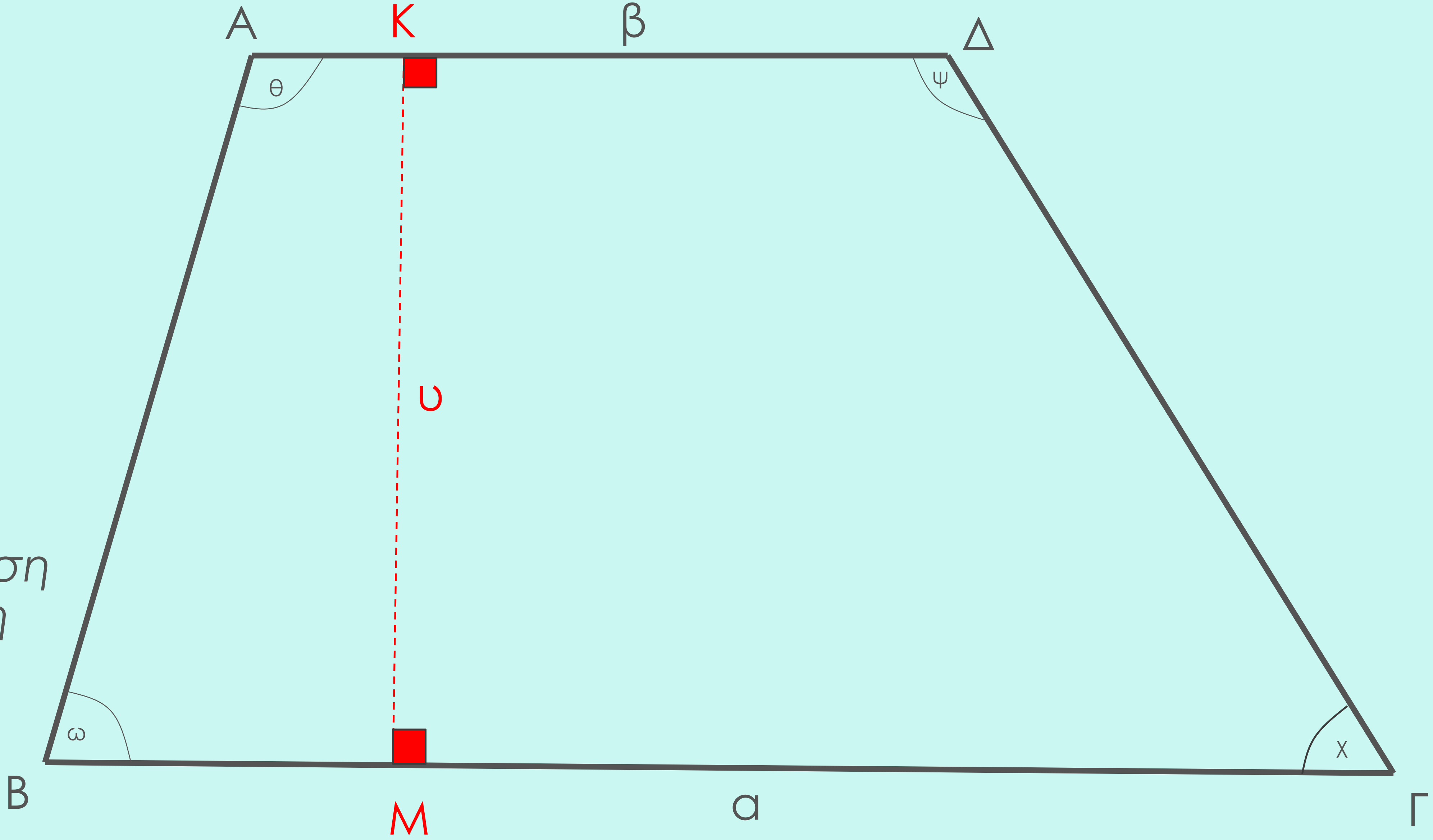








Το τραπέζιο ΑΒΓΔ



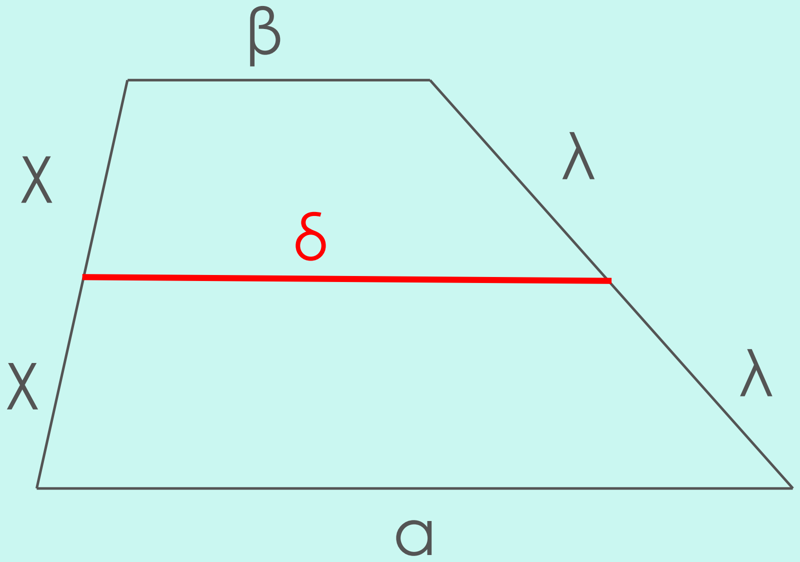
ΑΔ // ΒΓ

$\omega + \theta = 180$

$\chi + \psi = 180$

α = μεγάλη βάση
β = μικρή βάση
υ = ύψος

Η διάμεσος δ του τραπεζίου,
είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει
τα μέσα των δύο πλάγιων πλευρών του.



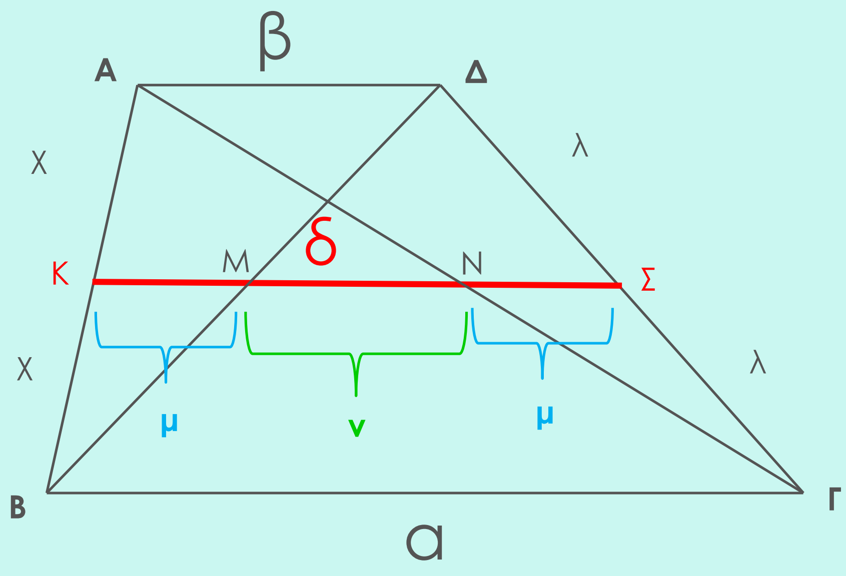
$δ = (α + β) / 2$

Η διάμεσος δ του τραπεζίου, χωρίζεται από τις δύο διαγώνιες του, στα εξής ευθύγραμμα τμήματα μ και ν:

$$\delta = (\alpha + \beta) / 2$$

- $\mu = \beta/2$

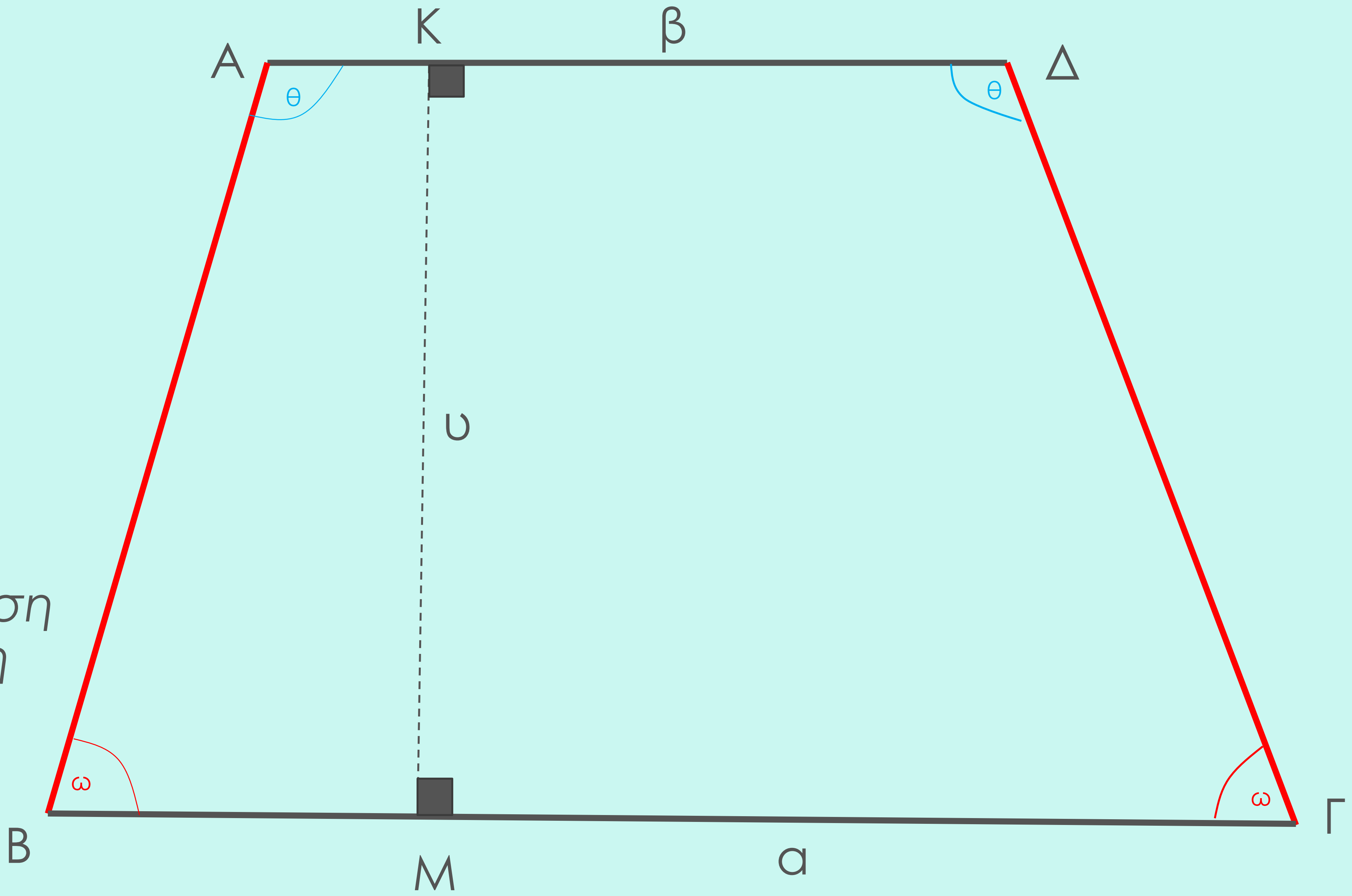
- $\nu = \delta - \mu - \mu =$
  $= [(\alpha + \beta)/2] - (\beta/2) - (\beta/2) =$
  $= (\alpha + \beta - \beta - \beta)/2 =$
  $= (\alpha - \beta)/2$



Παρατηρώ ότι $KM = N\Sigma = \mu = \beta/2$
και $KN = M\Sigma = \mu + \nu = \alpha/2$

Η διάμεσος του τραπεζίου ΚΣ = δ, χωρίζει τις πλάγιες και τις διαγώνιες του τραπεζίου στο μέσον (α // δ // β), δηλαδή ισχύει: $KA = KB = \chi$, $\Sigma\Delta = \Sigma\Gamma = \lambda$, $MB = M\Delta$, $N\Gamma = NA$.

Το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ



ΑΔ // ΒΓ
ΑΒ = ΓΔ

$\omega = \omega$
$\theta = \theta$
$\omega + \theta = 180$

α = μεγάλη βάση
β = μικρή βάση
υ = ύψος

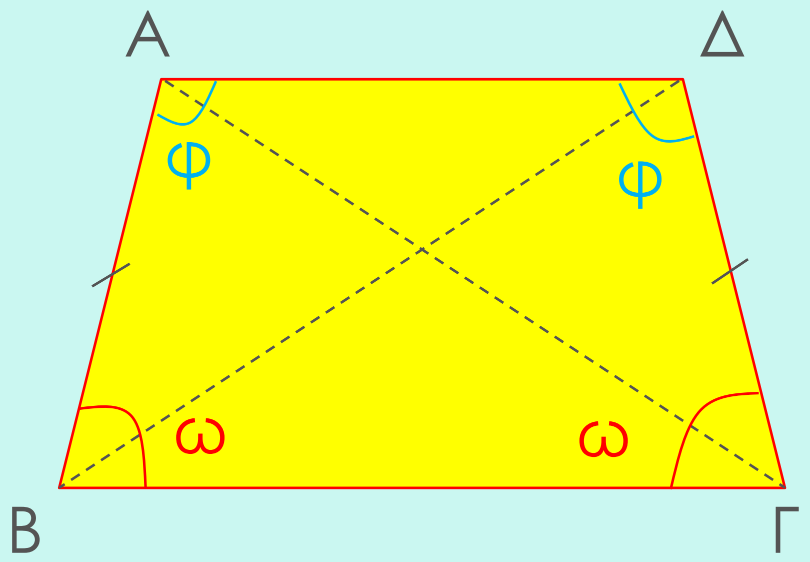
Στο ισοσκελές τραπέζιο ισχύει:

- *ΙΣΕΣ ΠΛΑΓΙΕΣ* $\Leftrightarrow$ *ΑΒ = ΔΓ*

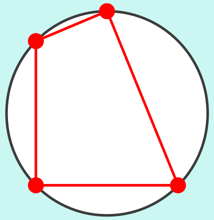
- *ΙΣΕΣ ΠΑΡΑ ΤΗΝ ΒΑΣΗ ΓΩΝΙΕΣ* $\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \omega = \omega \\ \varphi = \varphi \end{array} \right.$

  $\omega + \varphi = 180$

- *ΙΣΕΣ ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ* $\Leftrightarrow$ *ΒΔ = ΑΓ*

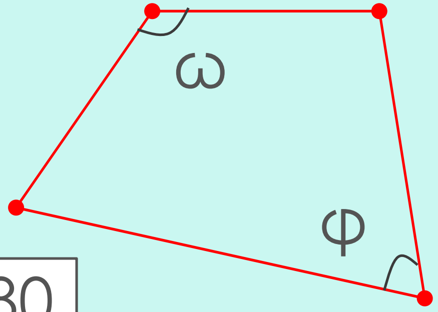


Πότε ένα τυχαίο κυρτό τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;



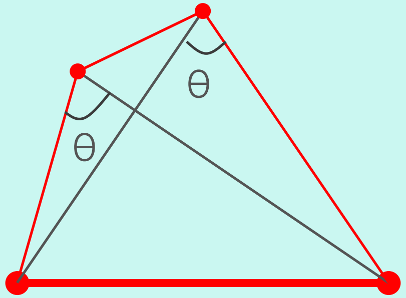
ΑΠ:

- *Το άθροισμα των δυο απέναντι γωνιών του, είναι 180 μοίρες.*



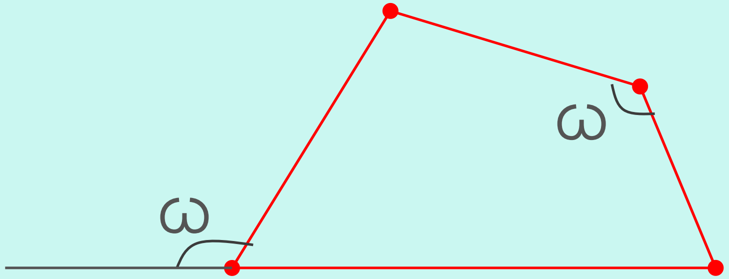
$\boxed{\omega + \varphi = 180}$

- *Μία πλευρά φαίνεται υπό ίσες απέναντι γωνίες.*



$\boxed{\theta \;=\; \theta}$

- *Μια γωνία είναι ίση με την εξωτερική απέναντι γωνία.*



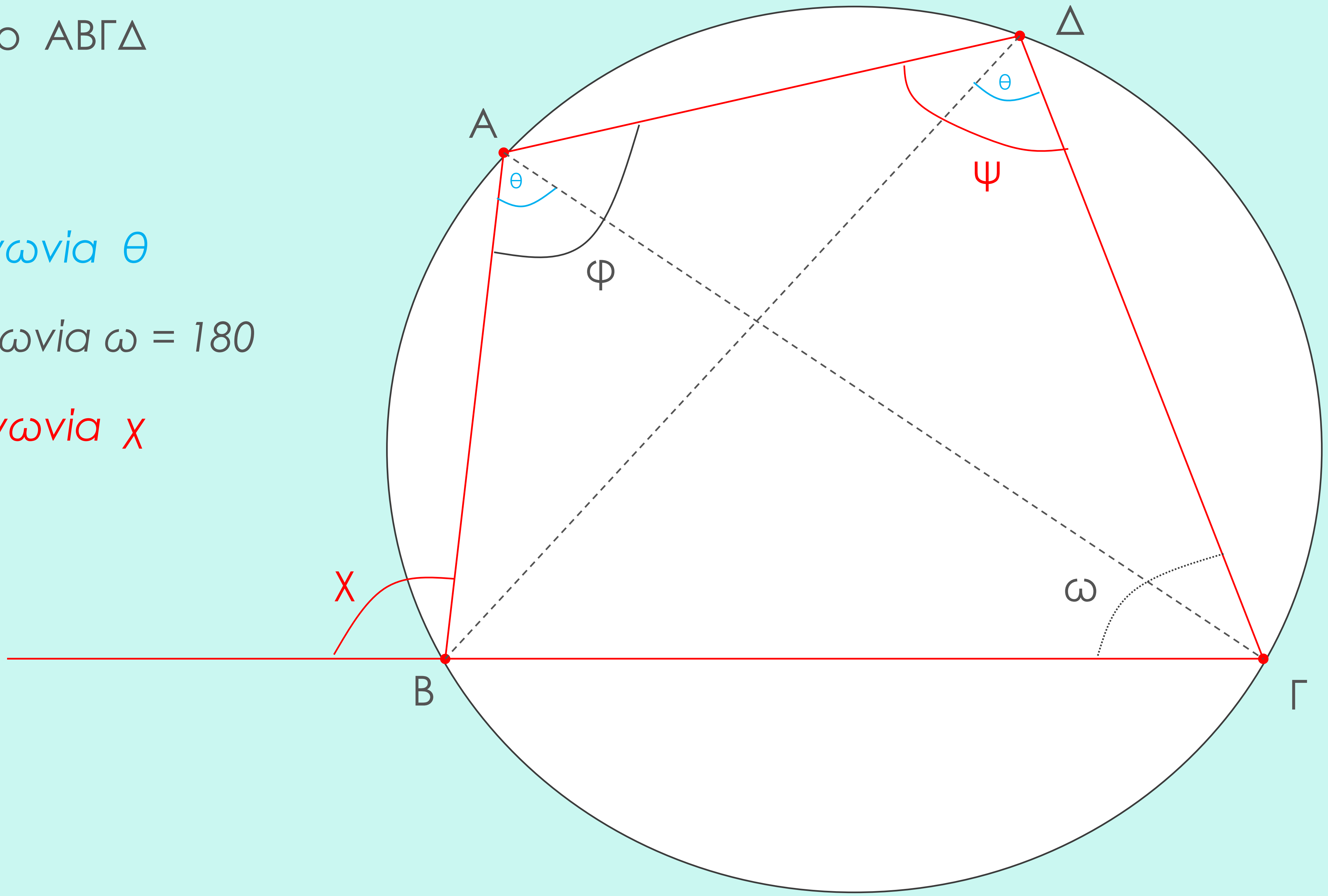
$\boxed{\omega \;=\; \omega}$

Το εγγράψιμο ΑΒΓΔ

Γωνία θ = γωνία θ

Γωνία φ + γωνία ω = 180

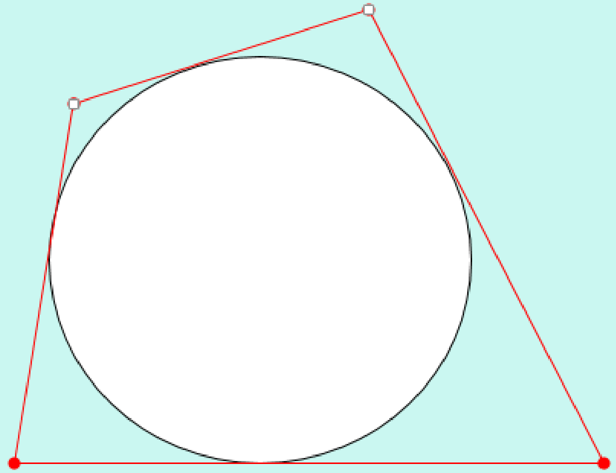
Γωνία ψ = γωνία χ



Πότε ένα τυχαίο κυρτό τετράπλευρο είναι περιγράψιμο;

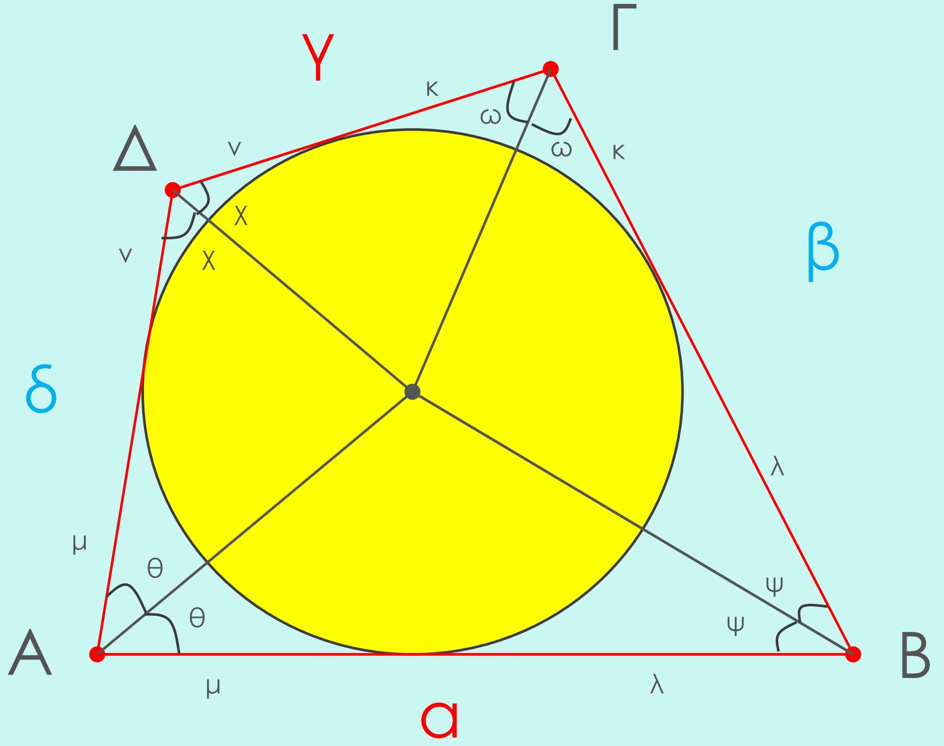
ΑΠ:

Όταν ισχύει ένα από τα εξής:



- *Όταν όλες οι διχοτόμοι όλων των γωνιών του, διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

- *Όταν ισχύει η εξής σχέση:* $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

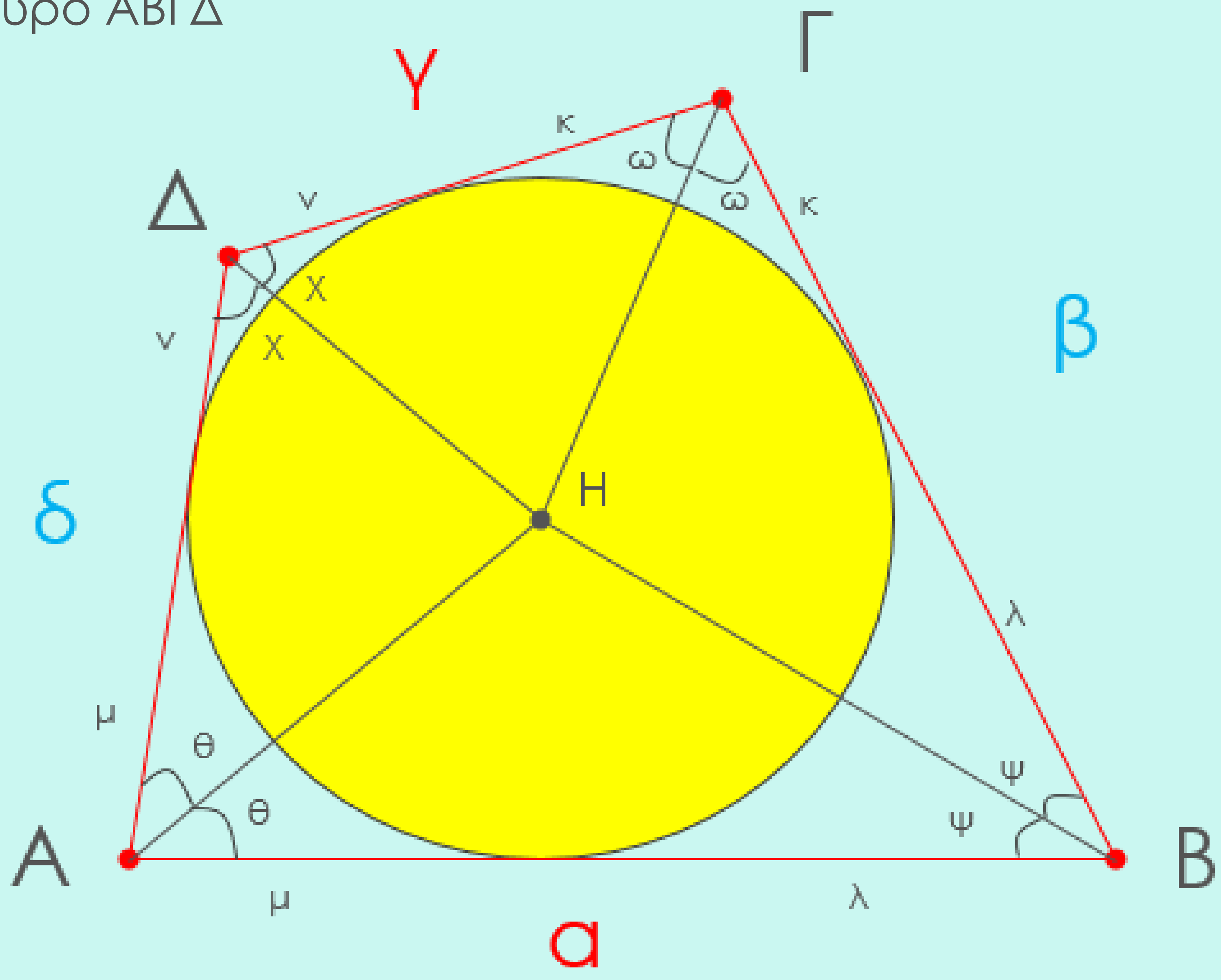


Το περιγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ

$\nu = \nu$
$\kappa = \kappa$
$\mu = \mu$
$\lambda = \lambda$
$\alpha + \gamma = \beta + \delta$

ΑΗ διχοτόμος γωνίας Α
ΒΗ διχοτόμος γωνίας Β
ΓΗ διχοτόμος γωνίας Γ
ΔΗ διχοτόμος γωνίας Δ

Το σημείο Η είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου και το σημείο τομής όλων των διχοτόμων όλων των γωνιών Α , Β , Γ , Δ.



Τι είναι λόγος λ στην γεωμετρία;

ΑΠ:

Είναι ένα κλάσμα με φυσικούς αριθμούς που δεν απλοποιείται πλέον.
Με τον λόγο λ συγκρίνω δύο μήκη, δύο γωνίες, δύο εμβαδά, …..

Παραδείγματα:

Ποιος είναι ο λόγος λ που έχουν τα μήκη α = 30 μέτρα και β = 10 μέτρα;
ΑΠ: $\lambda = \alpha / \beta = 30 / 10 = 3/1 = 3$.
Άρα $\alpha/\beta = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$, *δηλαδή το μήκος α είναι τριπλάσιο του β.*

Ποιος είναι ο λόγος λ που έχουν οι γωνίες ω = 40 μοίρες και θ = 20 μοίρες;
ΑΠ: $\lambda = \omega / \theta = 40 / 20 = 4/2 = 2$.
Άρα $\omega/\theta = 2 \Leftrightarrow \omega = 2\theta$, *δηλαδή η γωνία ω είναι διπλάσια της θ.*

Αναλογία = ισότητα κλασμάτων

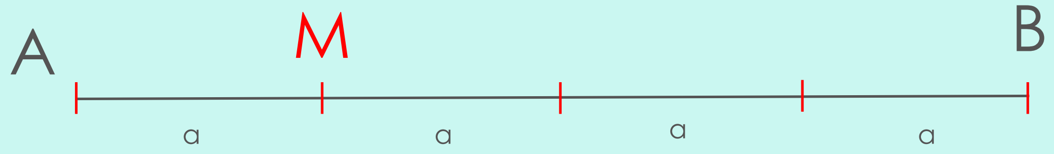
- $$\frac{40}{80} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{100}{200} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2} = \lambda$$

Το $\lambda = 1/2$ λέγεται λόγος αυτής της αναλογίας. Εδώ οι παρανομαστές είναι διπλάσιοι από τους αριθμητές.

- $$\frac{90}{30} = \frac{12}{4} = \frac{3x}{x} = \frac{6\omega}{2\omega} = 3 = \lambda$$

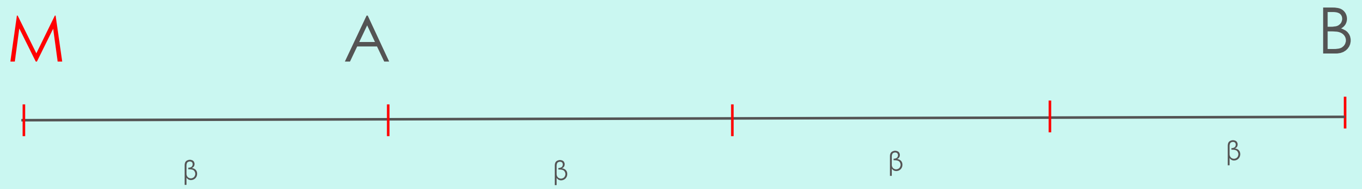
Το $\lambda = 3$ λέγεται λόγος αυτής της αναλογίας. Εδώ οι αριθμητές είναι τριπλάσιοι από τους παρανομαστές.

Το σημείο Μ χωρίζει
εσωτερικά το
ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ
σε λόγο ΜΑ / ΜΒ = λ = 1/3



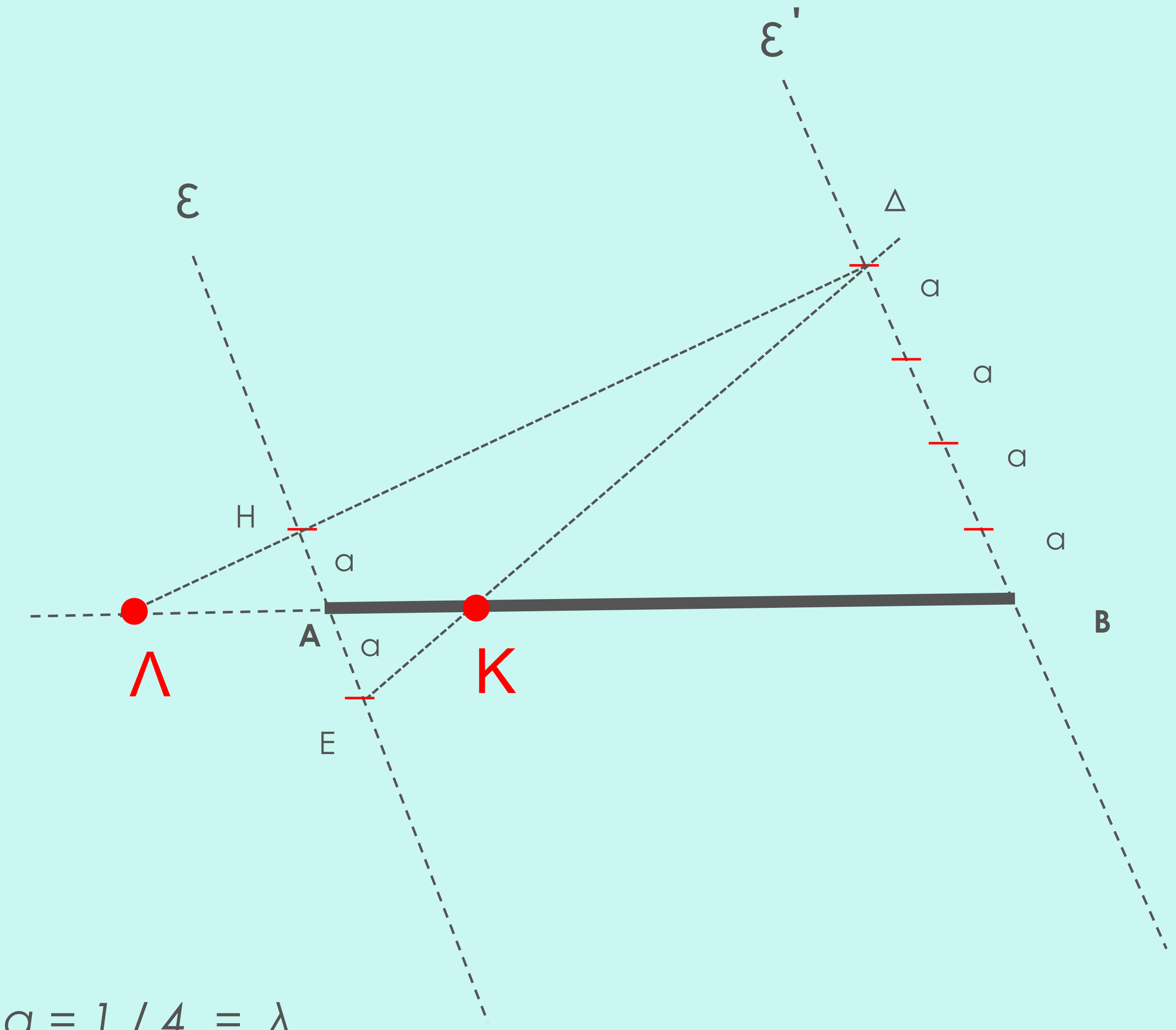
Παρατηρώ ότι το ΜΒ είναι τριπλάσιο του ΜΑ.

Το σημείο Μ χωρίζει
εξωτερικά το
ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ
σε λόγο ΜΑ / ΜΒ = λ = 1 / 4



Παρατηρώ ότι το ΜΒ είναι τετραπλάσιο του ΜΑ.

Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να χωρισθεί <u>εσωτερικά</u> και <u>εξωτερικά</u> στον ίδιο λόγο λ = 1/4.



Φέρω δύο τυχαίες παράλληλες ευθείες ε , ε΄ από τα Α και Β αντίστοιχα και πάνω στην ε΄ παίρνω τμήμα ΒΔ ίσο με 4α, (όπου α τυχαίο μήκος ή το 1) και πάνω στην ε και εκατέρωθεν του Α, παίρνω τμήμα ΑΗ και τμήμα ΑΕ ίσα με α. Φέρω τα ΔΗ και ΔΕ που μας δίνουν τα ζητούμενα σημεία τομής Λ και Κ με το ΑΒ.

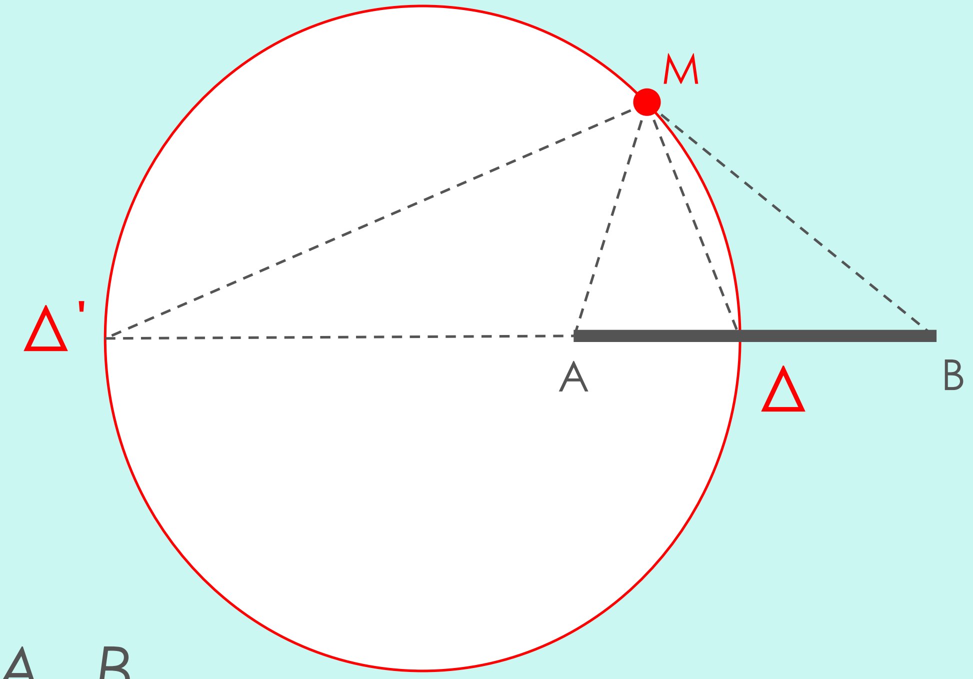
Το Κ χωρίζει εσωτερικά το ΑΒ σε λόγο ΚΑ / ΚΒ = α/4α = 1 / 4 = λ λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ΑΕΚ και ΔΚΒ.

Το Λ χωρίζει εξωτερικά το ΑΒ σε λόγο ΛΑ / ΛΒ = α /4α = 1 / 4 = λ λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ΗΛΑ και ΔΛΒ.

Δίδεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ο τυχαίος λόγος 1 / 4.
Να βρεθεί που μπορεί να βρίσκονται τα σημεία Μ
για τα οποία να ισχύει ΜΑ / ΜΒ = 1 / 4.

ΑΠ:

*Τα ζητούμενα σημεία Μ
θα βρίσκονται όλα πάνω
σε κύκλο με διάμετρο το ΔΔ΄,
όπου τα Δ και Δ΄
εντοπίζονται
χωρίζοντας εσωτερικά και εξωτερικά
το ΑΒ σε λόγο 1 / 4.*



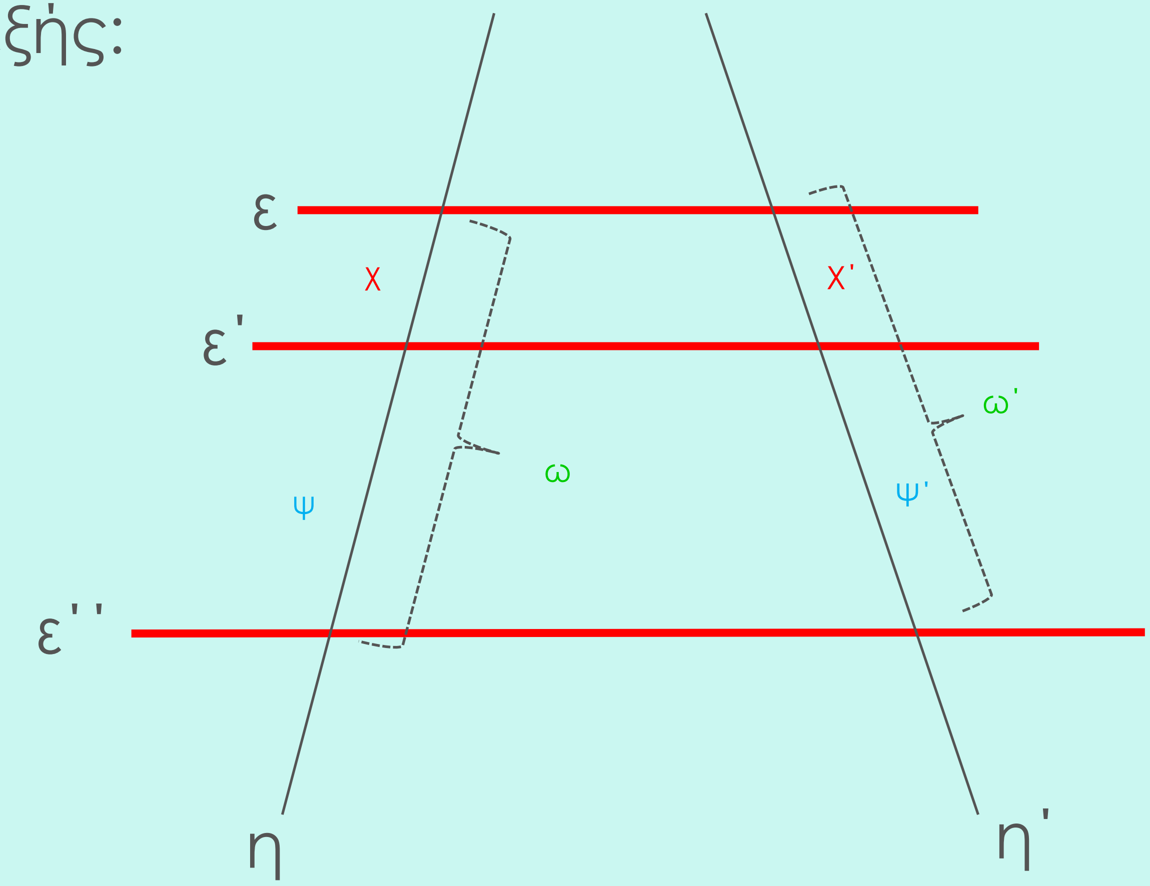
Τα Δ , Δ΄ λέγονται συζυγή αρμονικά των Α , Β.

*Ο κύκλος αυτός με διάμετρο το ΔΔ΄ λέγεται
Απολλώνειος κύκλος.*

Θεώρημα του Θαλή:

Αν ε // ε' // ε'' τότε ισχύει το εξής:

$$\frac{x}{x'} = \frac{\psi}{\psi'} = \frac{\omega}{\omega'}$$



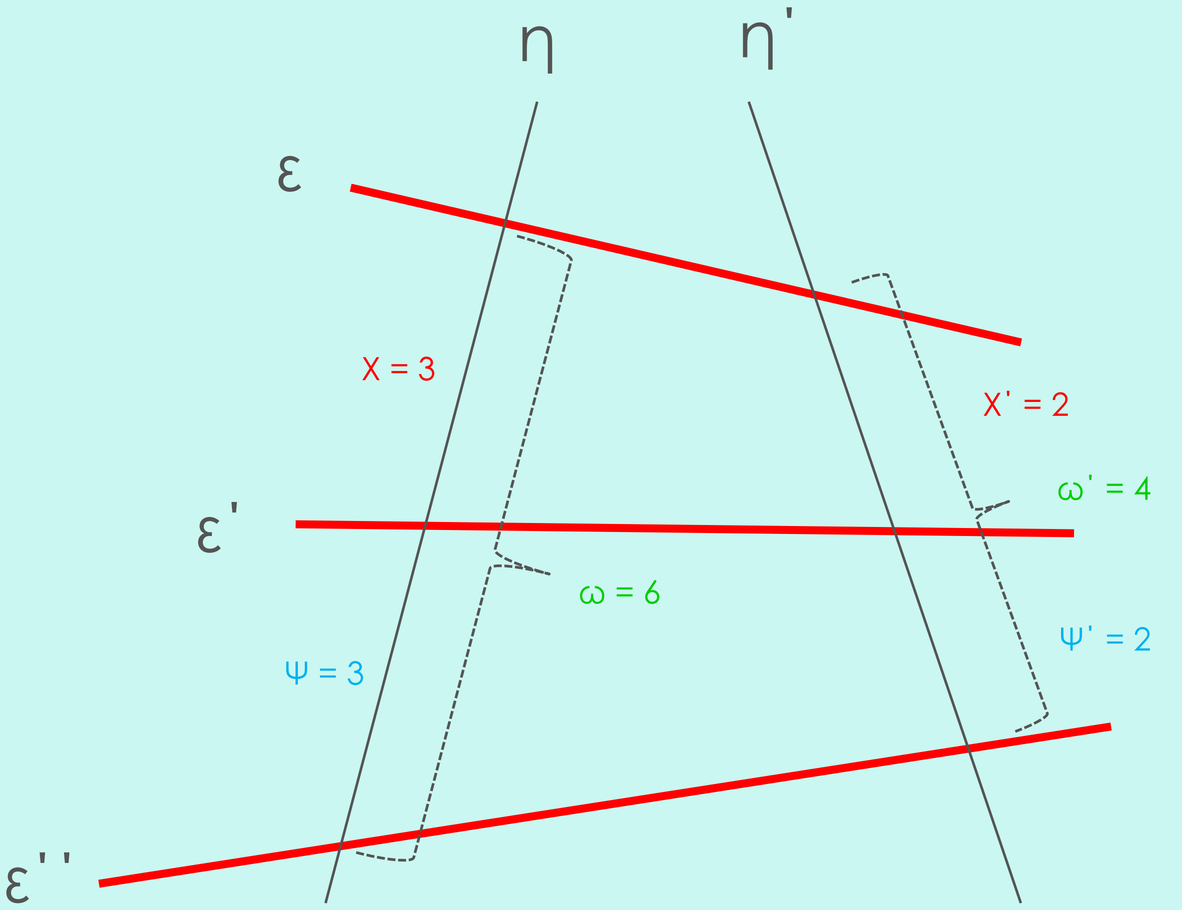
<u>*Προσοχή*</u>: *Όλοι οι αριθμητές,*
ανήκουν στην ίδια ευθεία η.
Το ίδιο αντίστοιχα και οι παρανομαστές στην ευθεία η'.

Αν ισχύει μόνο η εξής αναλογία:

$$\frac{\chi}{\chi'} = \frac{\psi}{\psi'} = \frac{\omega}{\omega'}$$

άραγε οι ευθείες ε , ε' , ε''
είναι μεταξύ τους
παράλληλες ;

ΑΠ:



Όχι, για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα είναι χ/χ' = ψ/ψ' = ω/ω' = 3/2
αλλά οι ευθείες ε , ε' , ε'' δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες.

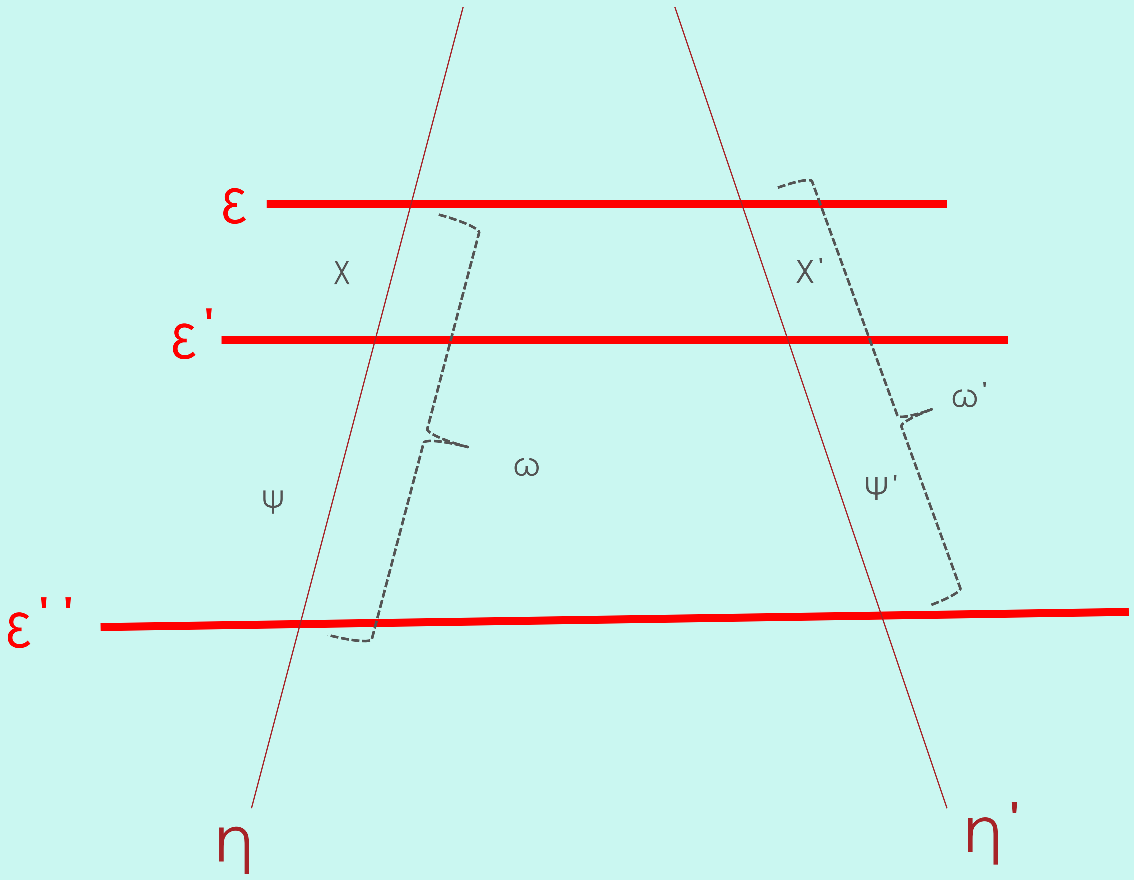
Πως δείχνω ότι τρεις ευθείες είναι παράλληλες;

ΑΠ:

Αν $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{\psi}{\psi'}$

και $\varepsilon \parallel \varepsilon'$

τότε $\varepsilon \parallel \varepsilon' \parallel \varepsilon''$

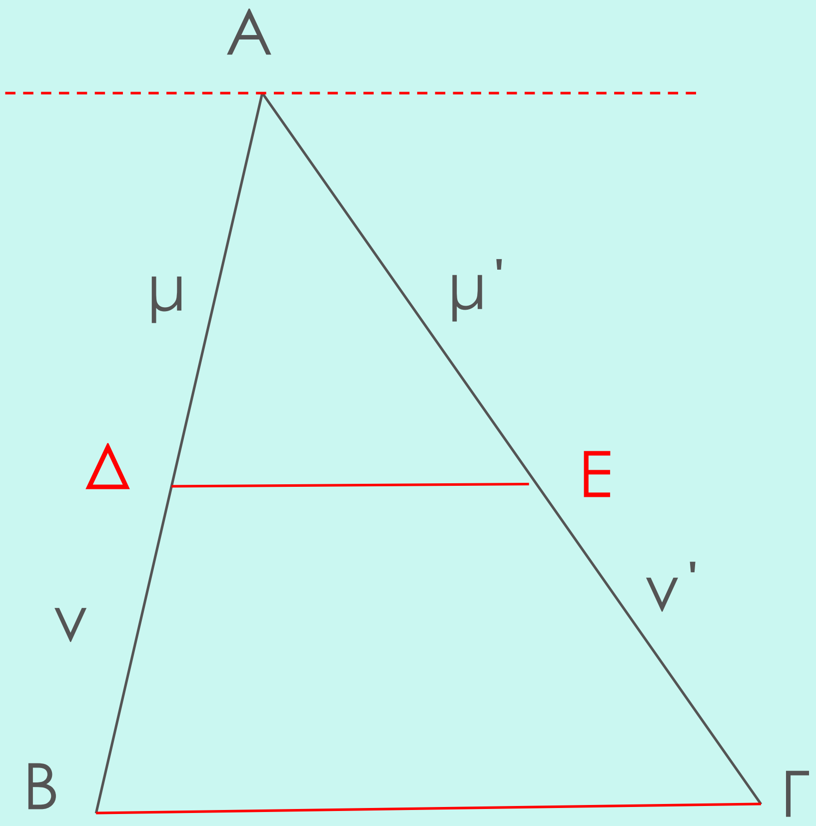


Αυτή η πρόταση είναι το <u>αντίστροφο</u> του θεωρήματος του Θαλή.

Πως ισχύει το θεώρημα του Θαλή στα τρίγωνα;

ΑΠ:

$\mu / \nu = \mu' / \nu' \Leftrightarrow ΔΕ \mathbin{//} ΒΓ$

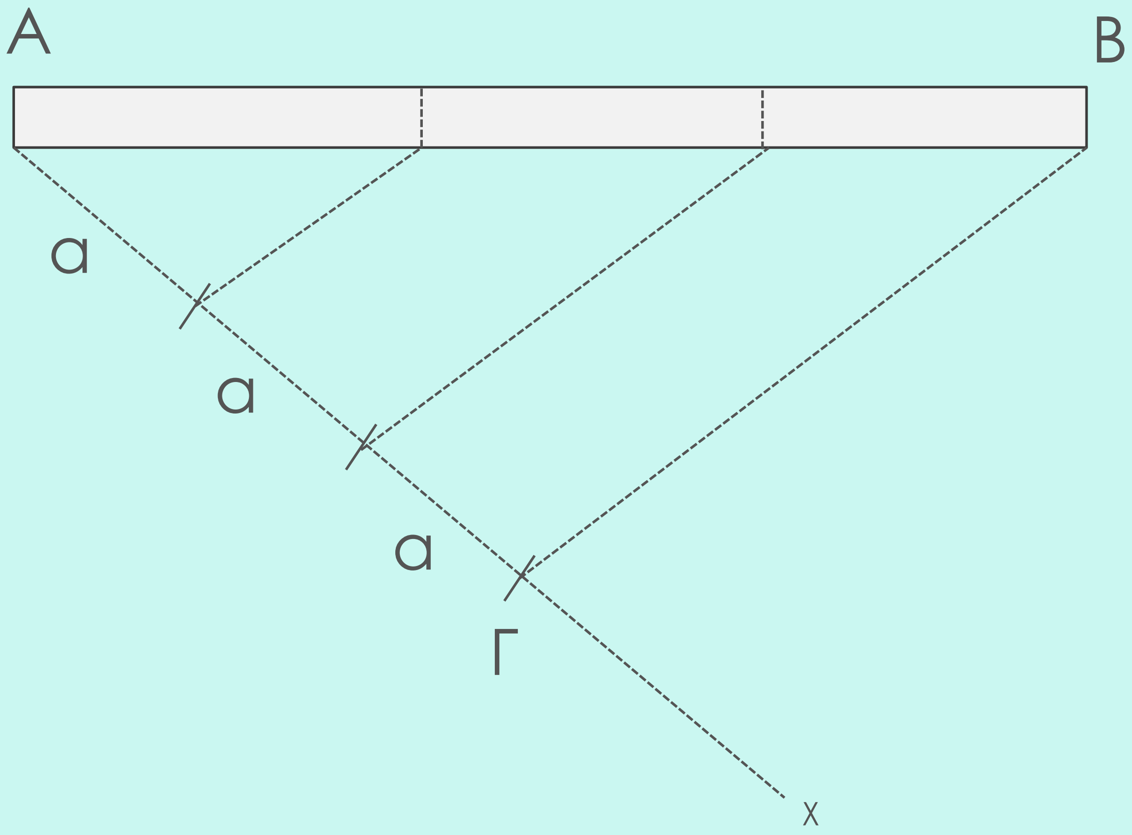


Η τρίτη παράλληλος θεωρείται νοητά από το σημείο Α.

Πως θα χωρίσω την μαρμάρινη κολώνα ΑΒ που είναι γερμένη πάνω στο χώμα, σε τρία ίσα μέρη;

ΑΠ:

Πάνω στο χώμα φέρω την τυχαία ημιευθεία Αχ και διατηρώντας το άνοιγμα του διαβήτη σταθερό, φέρω από το Α τρία ίσα διαδοχικά τμήματα με τυχαίο αλλά σταθερό μήκος α. Από το σημείο Γ φέρω το ΓΒ και μετά τις παράλληλες προς το ΓΒ από τα άκρα των τμημάτων α, που χωρίζουν λόγω του θεωρήματος του Θαλή το ΑΒ σε τρία ίσα μέρη.

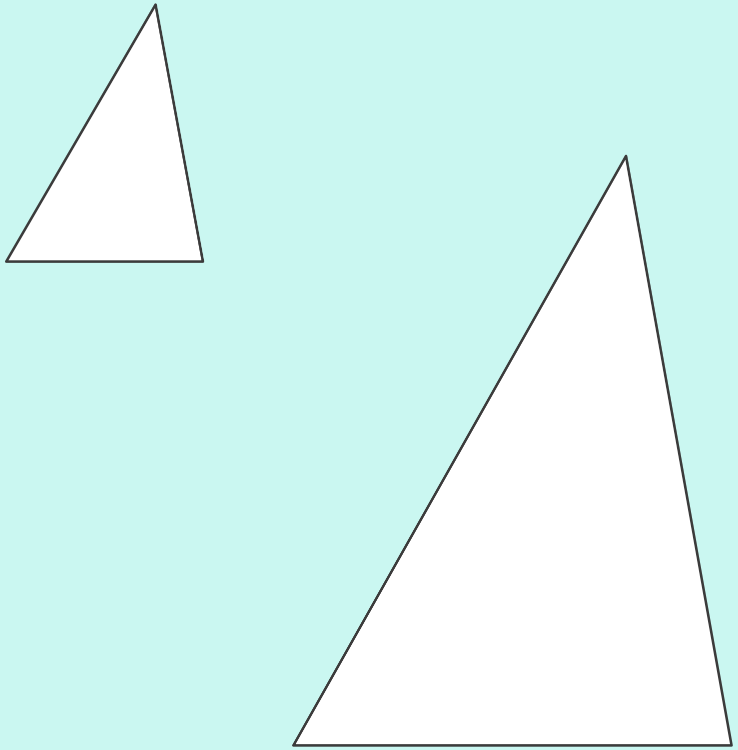


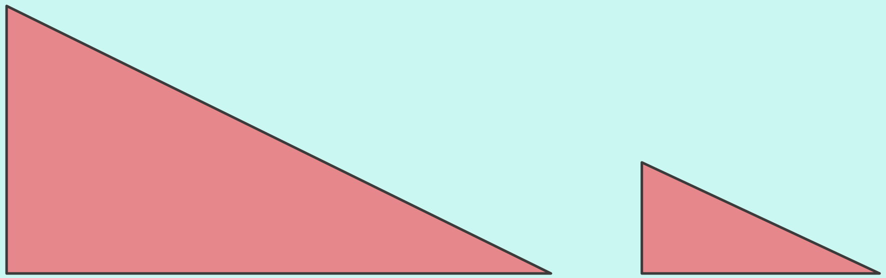
Το ίδιο κάνω για να την χωρίσω σε 2 , 4 , 5 , 6 , 7 , ...   ίσα μέρη

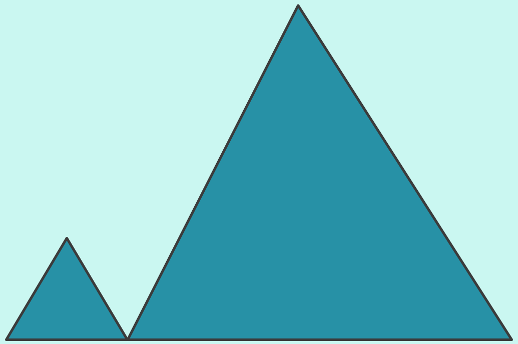
Τι είναι όμοια τρίγωνα;

ΑΠ:

Τα τρίγωνα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.







Τι σημαίνει η κλίμακα 1 : 20000000 ενός χάρτη;

ΑΠ:

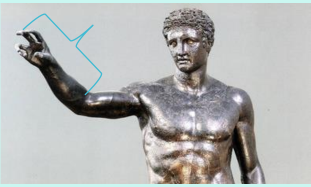
$$1:20000000 = \frac{1}{20000000}$$

Ένα εκατοστό (cm) πάνω στο χάρτη αντιστοιχεί με 20000000 εκατοστά πάνω στο επίπεδο της Γης.
Αν μία απόσταση δύο τυχαίων σημείων πάνω στον χάρτη είναι 3 εκατοστά, τότε πάνω στη Γη, η αντίστοιχη απόσταση είναι 3.20000000 = 60000000 εκατοστά.

Ένα τυχαίο τρίγωνο πάνω στον χάρτη, είναι μια σμίκρυνση του αντίστοιχου όμοιου τριγώνου πάνω στη Γη.

Πως τα κατάφερναν οι αρχαίοι Έλληνες με την τέχνη;

1 a



2

→ a / 2a = 1 / 2

3

→ a / 3a = 1 / 3

Οι «αναλογίες» στο άγαλμα 2, είναι διπλάσιες από τις «αναλογίες» στο άγαλμα 1.

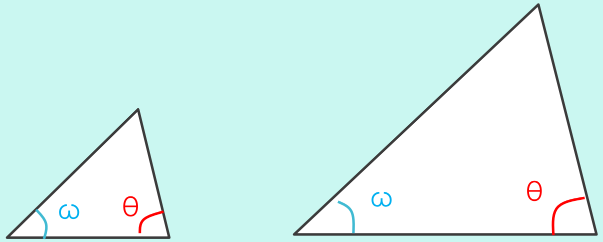
Οι «αναλογίες» στο άγαλμα 3, είναι τριπλάσιες από τις «αναλογίες» στο άγαλμα 1.

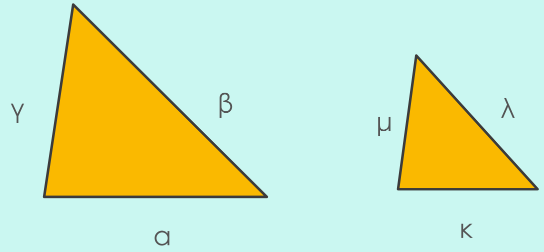
Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

ΑΠ

Όταν έχουν:

- *Ή δύο γωνίες ίσες* $\quad \omega = \omega \quad$ *και* $\quad \theta = \theta$

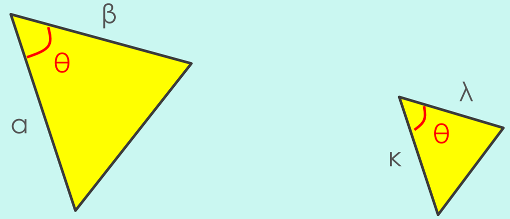




- *Ή όλες τις αντίστοιχες πλευρές ανάλογες*

$$\frac{\kappa}{\alpha} = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\mu}{\gamma}$$

<u>Προσοχή</u>: Οι αριθμητές είναι όλοι από το ίδιο τρίγωνο. Ομοίως αντίστοιχα και οι παρανομαστές.



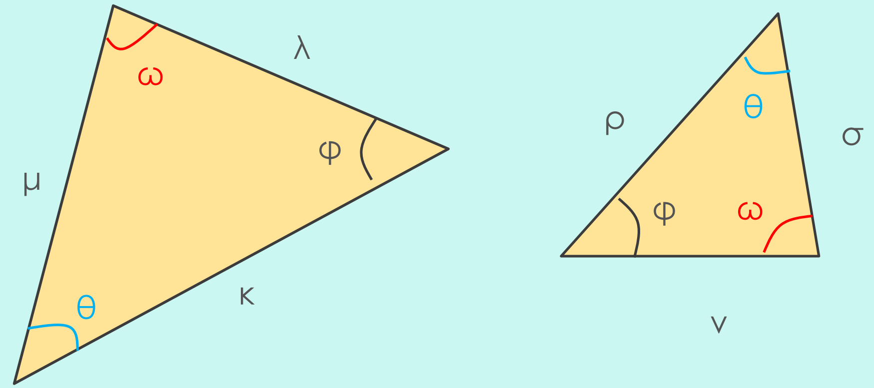
- *Ή μία γωνία ίση και τις προσκείμενες πλευρές ανάλογες.*

$$\theta = \theta \quad \text{και} \quad \frac{\kappa}{\alpha} = \frac{\lambda}{\beta}$$

<u>Προσοχή</u>: Οι αριθμητές είναι όλοι από το ίδιο τρίγωνο. Ομοίως αντίστοιχα και οι παρανομαστές.

Πως κατασκευάζω την αναλογία των πλευρών στα όμοια τρίγωνα;

ΑΠ:



- *Γράφω τρεις παύλες με το ίσο ανάμεσα.* →

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

- *Βάζω στους αριθμητές τις πλευρές από το ένα μόνο τρίγωνο.* →

$$\frac{\kappa}{\quad} = \frac{\lambda}{\quad} = \frac{\mu}{\quad}$$

- *Στο πρώτο κλάσμα, κάτω από τον αριθμητή κ, βάζω την πλευρά ρ του άλλου τριγώνου, διότι κ και ρ είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ω. Ομοίως αντίστοιχα και οι άλλες πλευρές ν , σ.*

$$\boxed{\frac{\kappa}{\rho} = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\mu}{\sigma}}$$

Πως αποδεικνύω μια ισότητα με την βοήθεια όμοιων τριγώνων;

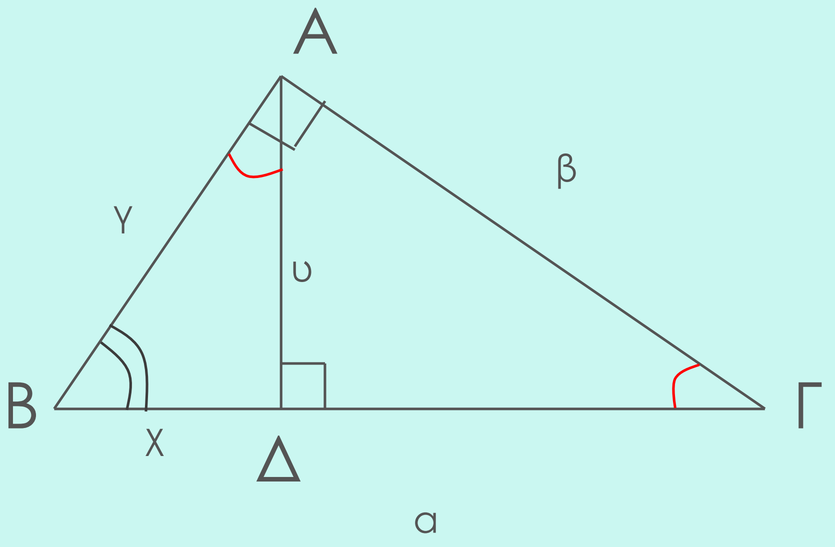
ΑΠ:

Από τα σημεία (δεδομένα) που υπάρχουν στην ισότητα, εντοπίζω όμοια τρίγωνα που έχουν κορυφές αυτά τα σημεία και παίρνω τις αναλογίες των πλευρών τους.

<u>Παράδειγμα</u>:

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α = 90 μοίρες και ΑΔ ύψος, να αποδειχθεί ότι ισχύει η εξής ισότητα:

$ΑΒ^2 = ΒΓ.ΒΔ$



Απ:

Από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ που υπάρχουν στην δοθείσα ισότητα, προσπαθώ να εντοπίσω (αν υπάρχουν) όμοια τρίγωνα και να πάρω μετά τις αναλογίες των πλευρών τους.

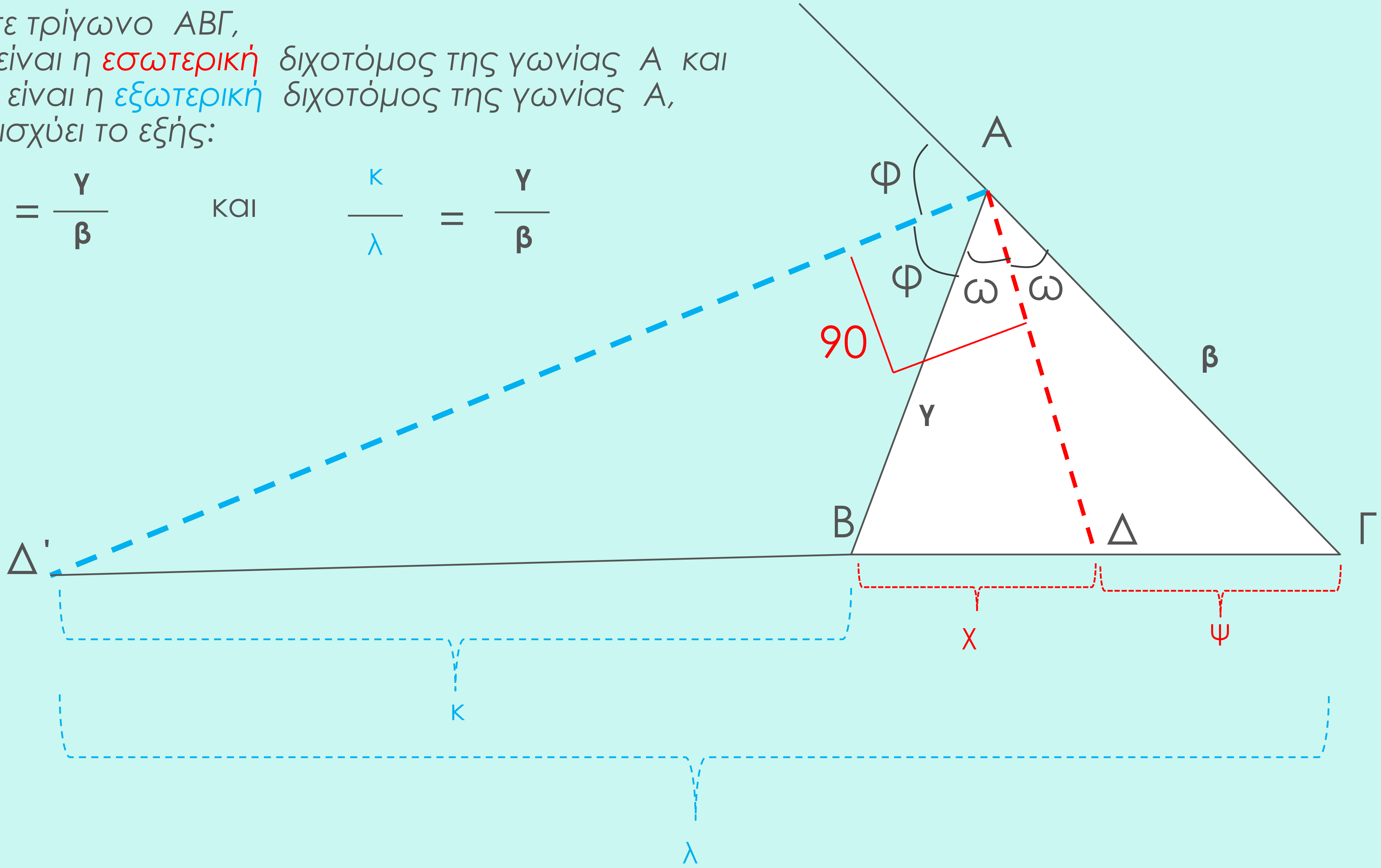
Παρατηρώ ότι το τρίγωνο ΑΒΔ, είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, διότι έχουν την γωνία Β κοινή και είναι ορθογώνια.

Άρα $\dfrac{χ}{γ} = \dfrac{υ}{β} = \dfrac{γ}{α} \Rightarrow \dfrac{χ}{γ} = \dfrac{γ}{α} \Rightarrow γ.γ = α.χ \Leftrightarrow γ^2 = αχ \Leftrightarrow$

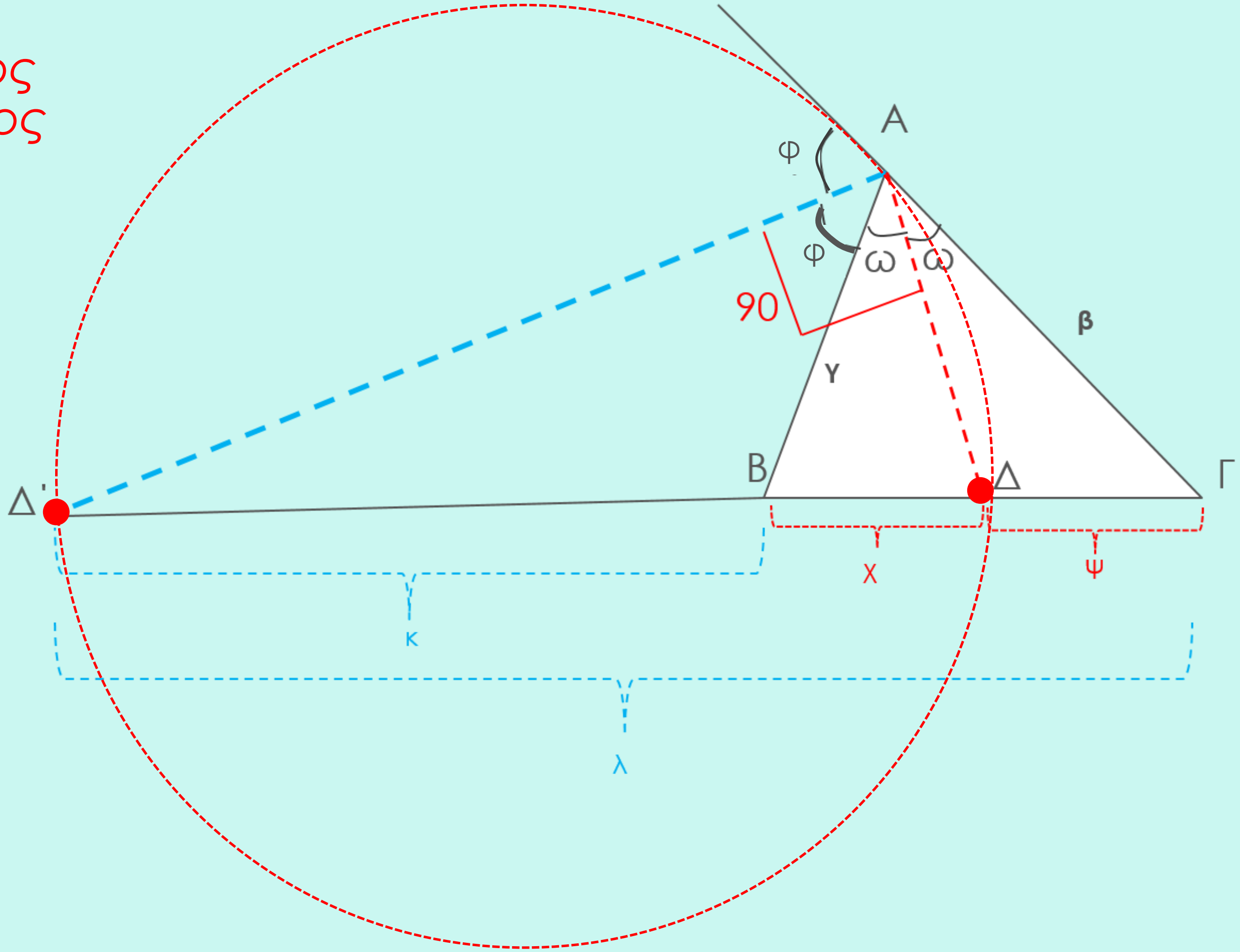
$\Leftrightarrow \quad ΑΒ^2 = ΒΓ.ΒΔ$

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ,
ΑΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Α και
ΑΔ΄ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α,
τότε ισχύει το εξής:

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\gamma}{\beta}$$



Πως λέγονται τα σημεία Δ και Δ΄ στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ που η ΑΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας Α και η ΑΔ΄ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α;



- Από το θεώρημα εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου για την γωνία Α, προκύπτει ότι
  χ/ψ = γ/β και κ/λ = γ/β.
  Παρατηρώ ότι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα άρα θα είναι και τα πρώτα, οπότε
  χ/ψ = κ /λ.

- Τα Δ και Δ΄ λέγονται συζυγή αρμονικά των Β και Γ και τα σημεία Δ΄ , Δ , Β , Γ λέμε ότι αποτελούν αρμονική τετράδα.

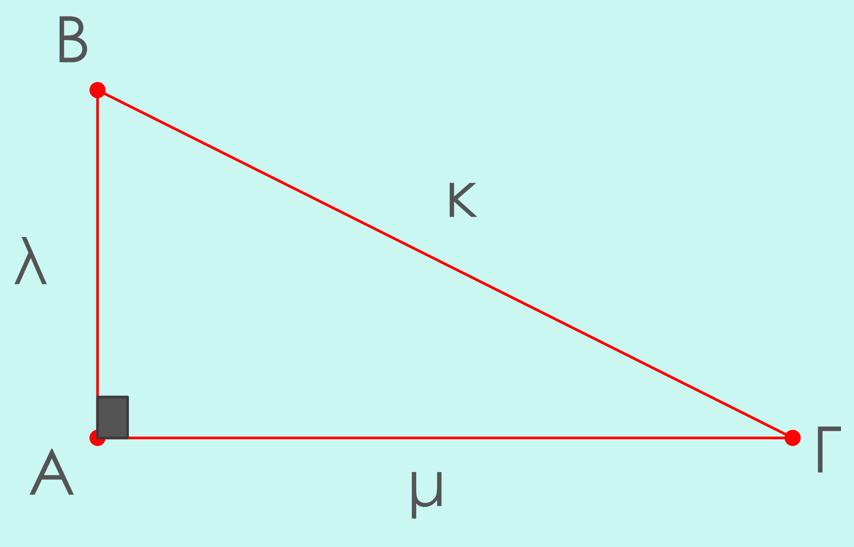
- Υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα Α , Δ , Δ΄ με διάμετρο το ΔΔ΄ και λέγεται Απολλώνιος κύκλος.
  Για κάθε σημείο Μ αυτού του κύκλου ισχύει το εξής: ΜΒ / ΜΓ = χ/ψ = κ/λ = γ/β.

Ποιο είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα;

Πυθαγόρας: Διάσημος Έλληνας μαθηματικός από το νησί Σάμος (580 π.Χ. – 496 π.Χ.).

ΑΠ:

*Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ,
με γωνία Α = 90 μοίρες, ισχύει
για τις πλευρές του το εξής:*

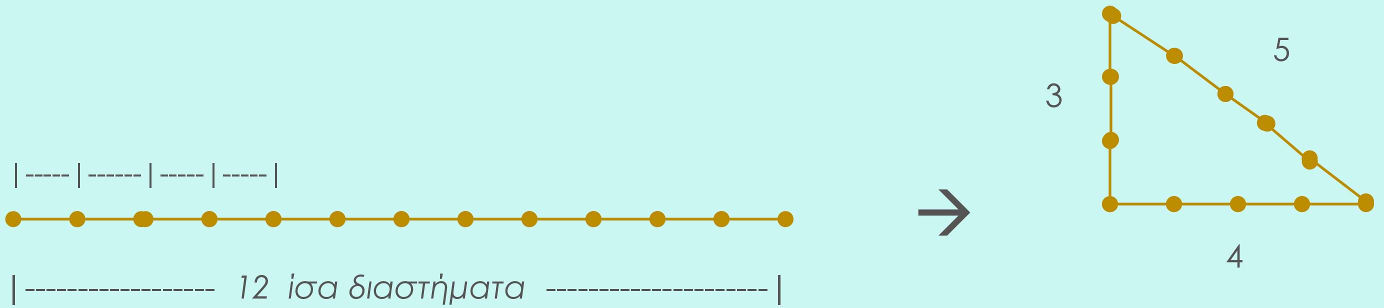


$$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2$$

Προσοχή: Η κ είναι η μεγαλύτερη πλευρά = υποτείνουσα.

Έχω ένα σχοινί χωρισμένο
με κόμπους σε ίσα 12 διαστήματα.

Μπορώ άραγε να κατασκευάσω
με αυτό το σχοινί,
ένα ορθογώνιο τρίγωνο, με
περίμετρο ακριβώς το μήκος
που έχει αυτό το σχοινί;



ΑΠ:

Ναι, διότι παρατηρώ ότι για τις τρεις πλευρές με μήκος διαστημάτων, 5 για την μεγαλύτερη πλευρά και 4 για την άλλη πλευρά και 3 για την άλλη πλευρά του τριγώνου που θέλω να κατασκευάσω, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα ως εξής:

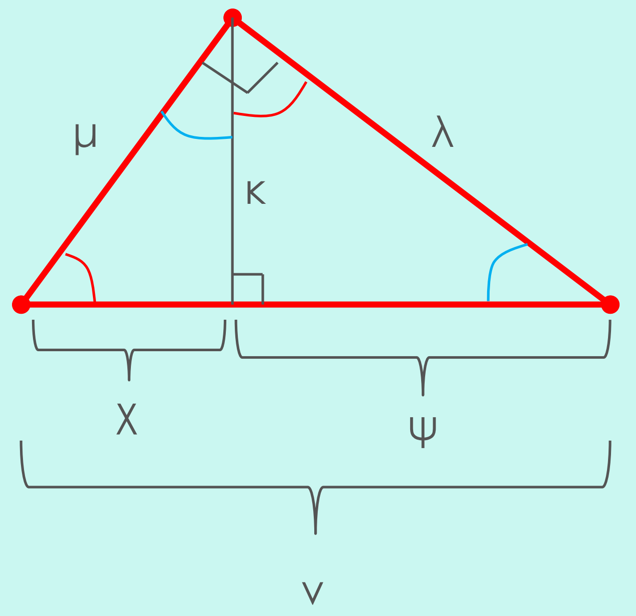
$5^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + 9 \Leftrightarrow 25 = 25 \rightarrow$ *ισχύει.*

Παρατηρώ ότι η περίμετρος του τριγώνου που κατασκεύασα, είναι ίση με 12 διαστήματα (5 + 4 + 3), δηλαδή όσο είναι το μήκος που είχε το αρχικό σχοινί τεντωμένο.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείτο από τους αρχαίους, για να ανεγείρουν δύο κάθετους τοίχους, καθώς τοποθετούσαν αυτό ακριβώς το σχοινί πάνω στο έδαφος σαν οδηγό για την οικοδόμηση τους.

Άλλοι τύποι στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $\mu^2 = \chi.\nu$
- $\lambda^2 = \psi.\nu$
- $\kappa^2 = \chi.\psi$
- $\mu.\lambda = \kappa.\nu$
- $1/\kappa^2 = 1/\mu^2 + 1/\lambda^2$
- $\mu^2 / \lambda^2 = \chi/\psi$



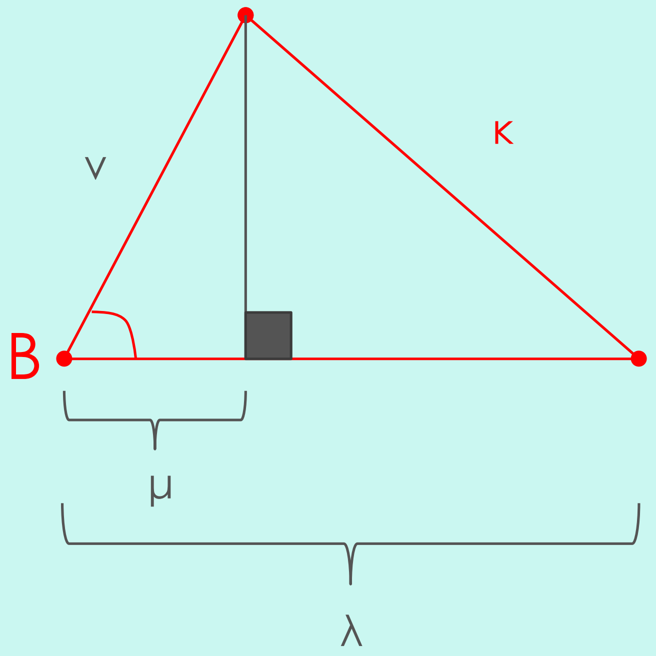
Ποιο είναι το γενικευμένο
Πυθαγόρειο θεώρημα σε τρίγωνο
με οξεία γωνία (Β < 90);

ΑΠ:

Όταν γωνία Β < 90 μοίρες, τότε
για την απέναντι πλευρά της γωνίας Β,
ισχύει το εξής:

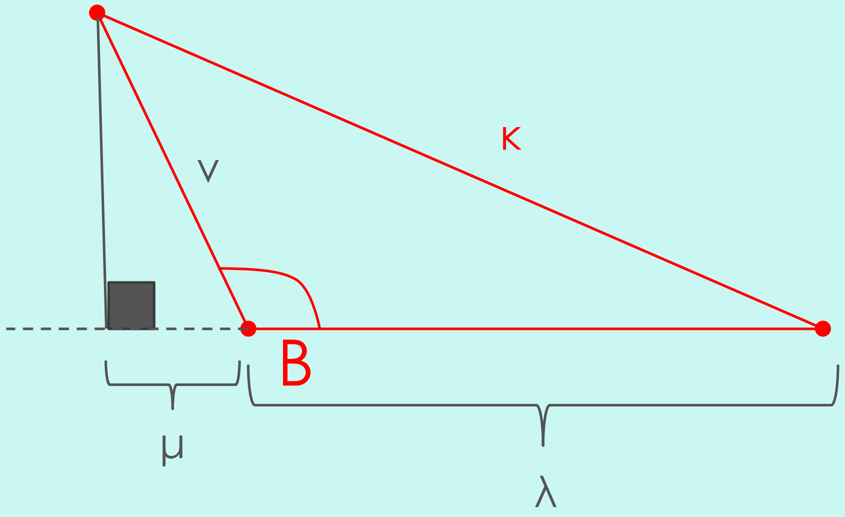
$$\kappa^2 = \lambda^2 + \nu^2 - 2\lambda\mu$$

μ = η προβολή της ν πάνω στην λ



Ποιο είναι το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα σε τρίγωνο με αμβλεία γωνία (Β > 90);

ΑΠ:

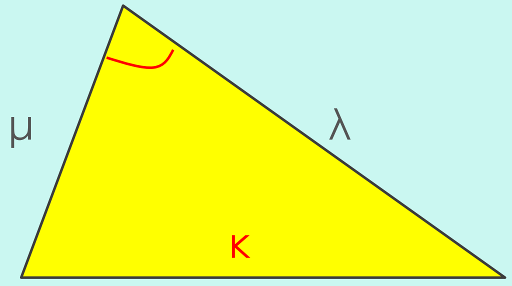


Όταν γωνία Β > 90 μοίρες, τότε για την απέναντι πλευρά της γωνίας Β, ισχύει το εξής:

$$\kappa^2 = \lambda^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu$$

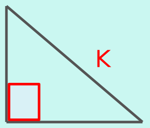
μ = η προβολή της ν πάνω στην λ

Πως βλέπω μόνο από τις πλευρές κ, λ, μ ενός τριγώνου, αν το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο ή οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο;

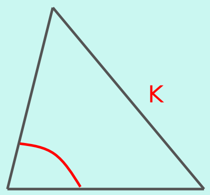


κ = η μεγαλύτερη πλευρά

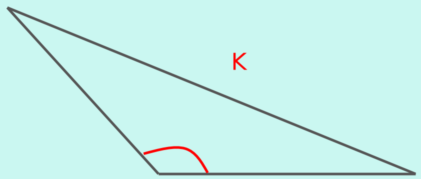
ΑΠ:



ορθογώνιο



οξυγώνιο



αμβλυγώνιο

Βρίσκω το τετράγωνο κ^2 της μεγαλύτερης πλευράς κ και το συγκρίνω με το άθροισμα των τετραγώνων $\lambda^2 + \mu^2$ των άλλων δύο πλευρών λ , μ.

$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2$ ⇔ *η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά κ είναι ορθή* → *ορθογώνιο.*

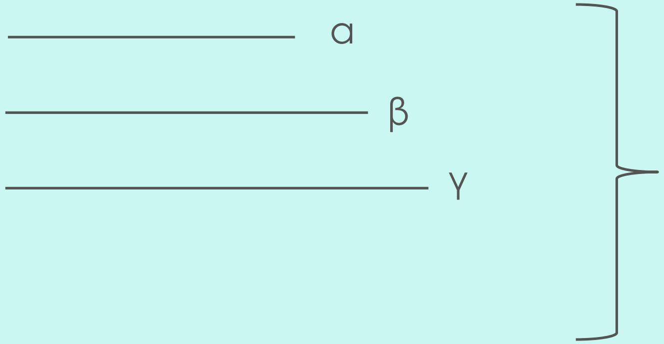
$\kappa^2 < \lambda^2 + \mu^2$ ⇔ *η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά κ είναι οξεία* → *οξυγώνιο.*

$\kappa^2 > \lambda^2 + \mu^2$ ⇔ *η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά κ είναι αμβλεία* → *αμβλυγώνιο.*

Προσοχή: κ είναι η μεγαλύτερη πλευρά από τις τρεις πλευρές κ, λ, μ του τριγώνου.

Αν $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$ είναι τα μήκη τριών ευθύγραμμων σιδερένιων ράβδων, με τις οποίες θέλω να κατασκευάσω ένα σιδερένιο τρίγωνο, να βρεθεί το είδος του τριγώνου που μπορώ να κατασκευάσω.

Ομοίως όταν $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 6$ και
$\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\gamma = 7$.



→ Τρίγωνο ;

ΑΠ:

- *Αν $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$ → μεγαλύτερη πλευρά $= \gamma = 5$ → $\gamma^2 = 5.5 = 25$.*
  $\alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 4^2 = 3.3 + 4.4 = 9 + 16 = 25$.

  Παρατηρώ ότι ισχύει το εξής: $25 = 25 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.
  Άρα για την γωνία Γ που είναι απέναντι από την πλευρά γ, ισχύει το εξής: $\Gamma = 90$ μοίρες → τρίγωνο ορθογώνιο.

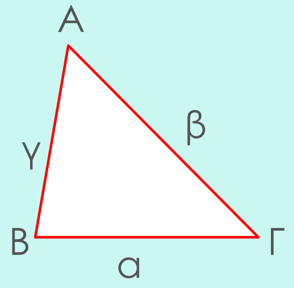
- *Αν $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 6$ → μεγαλύτερη πλευρά $= \gamma = 6$ → $\gamma^2 = 6.6 = 36$.*
  $\alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 4^2 = 3.3 + 4.4 = 9 + 16 = 25$.

  Παρατηρώ ότι ισχύει το εξής: $36 > 25 \Leftrightarrow \gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$.
  Άρα για την γωνία Γ που είναι απέναντι από την πλευρά γ, ισχύει το εξής: $\Gamma > 90$ μοίρες → τρίγωνο αμβλυγώνιο.

- *Αν $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\gamma = 7$ → μεγαλύτερη πλευρά $= \gamma = 7$ → $\gamma^2 = 7.7 = 49$.*
  $\alpha^2 + \beta^2 = 5^2 + 6^2 = 5.5 + 6.6 = 25 + 36 = 61$.

  Παρατηρώ ότι ισχύει το εξής: $49 < 61 \Leftrightarrow \gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$.
  Άρα για την γωνία Γ που είναι απέναντι από την πλευρά γ, ισχύει το εξής: $\Gamma < 90$ μοίρες → τρίγωνο οξυγώνιο.

Ποιος είναι ο νόμος του ημιτόνου
και ο νόμος του συνημιτόνου,
σε τρίγωνο ΑΒΓ;



ΑΠ:

- *Ο νόμος του ημιτόνου:*

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R.$$

- *Ο νόμος του συνημιτόνου:*

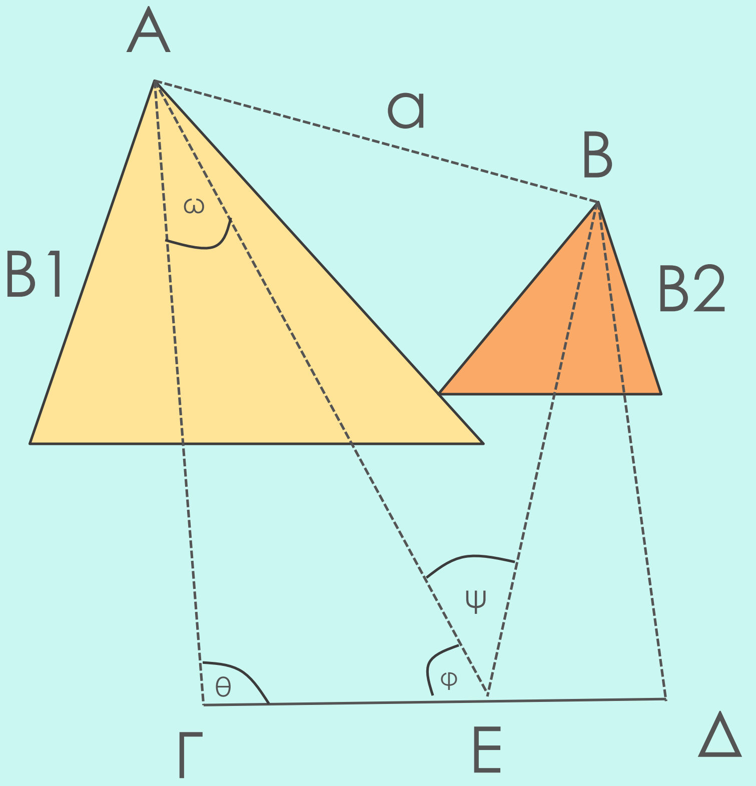
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

R = ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ

Πως μετρώ την απόσταση α των απρόσιτων κορυφών Α και Β στα δύο βουνά Β1 και Β2;

ΑΠ:

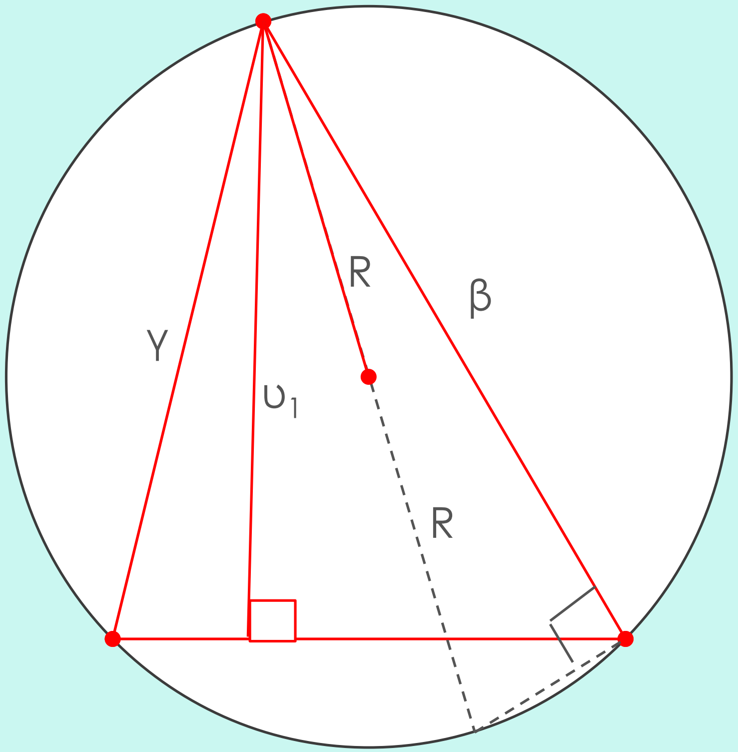
- Στην πεδιάδα ή σε προσιτό μέρος παίρνω ένα μήκος ΓΔ = γνωστό και ένα σημείο Ε ώστε ΓΕ = γνωστό.
- Με ειδικά όργανα (γωνιόμετρα) μετρώ την γωνία ΑΓΕ = θ = γνωστή και την γωνία ΑΕΓ = φ = γνωστή. Άρα στο τρίγωνο ΑΓΕ και γωνία ω = γνωστή.
- Με το θεώρημα του ημιτόνου βρίσκω στο τρίγωνο ΑΓΕ την πλευρά ΑΕ, οπότε ΑΕ = γνωστή.
- Επαναλαμβάνω το ίδιο στο τρίγωνο ΒΕΔ και βρίσκω την ΒΕ = γνωστή.
- Βρίσκω με το γωνιόμετρο την γωνία ΑΕΒ = ψ = γνωστή.
- Στο τρίγωνο ΑΕΒ έχω τελικά ότι
  ΑΕ = γνωστή.
  ΒΕ = γνωστή.
  Γωνία ψ = γνωστή,
  οπότε με το θεώρημα του συνημιτόνου υπολογίζω την ζητούμενη απόσταση ΑΒ = α.



Ποιος τύπος συνδέει την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου, με το ύψος $υ_1$ και τις πλευρές του β, γ ;

ΑΠ:

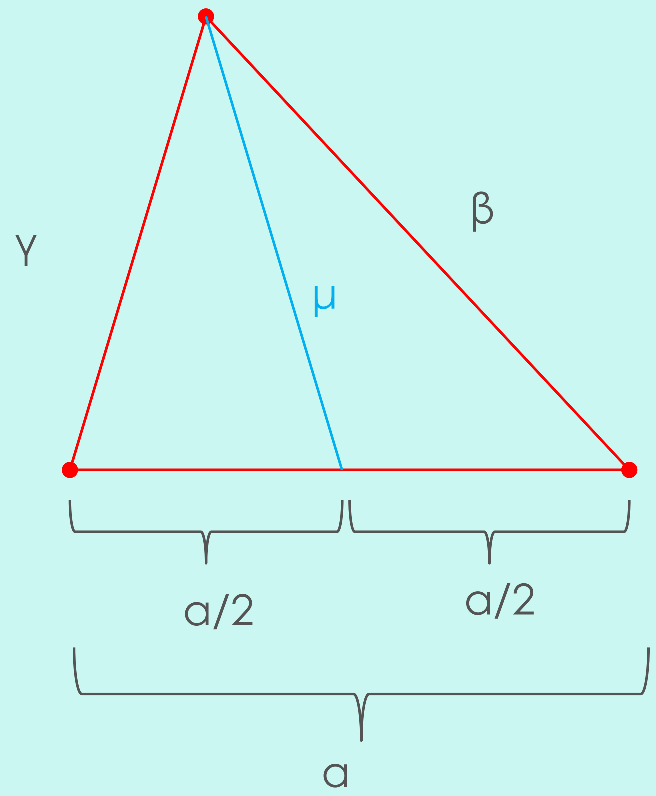
$$υ_1 = \frac{βγ}{2R}$$



Ποιο είναι το 1ο θεώρημα της διαμέσου μ, τριγώνου;

ΑΠ:

$$\boxed{\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu^2 + \alpha^2/2}$$



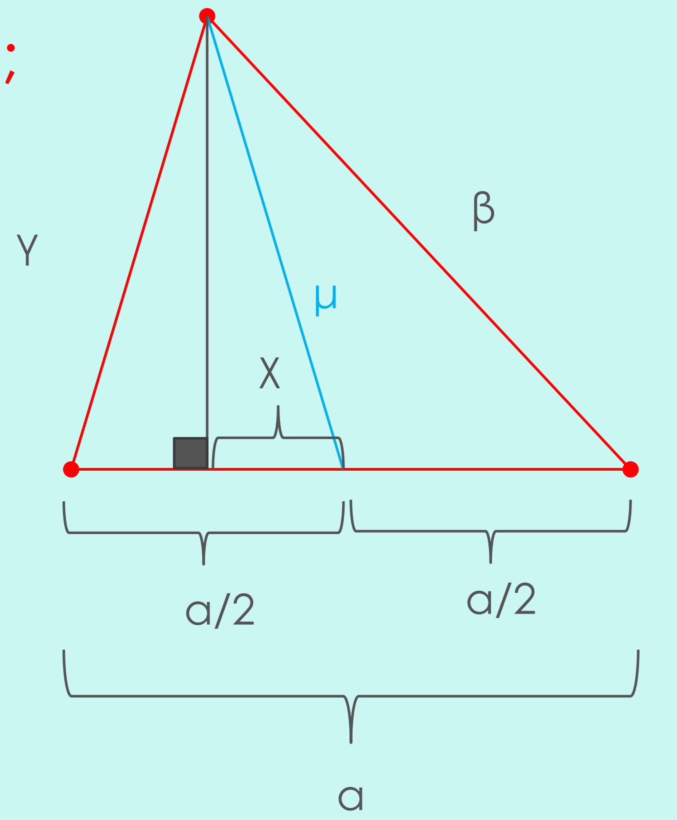
μ = διάμεσος του τριγώνου.

Ποιο είναι το 2ο θεώρημα της διαμέσου μ, τριγώνου;

ΑΠ:

$$\boxed{\beta^2 - \gamma^2 = 2\chi\alpha}$$

Όπου $\beta > \gamma$

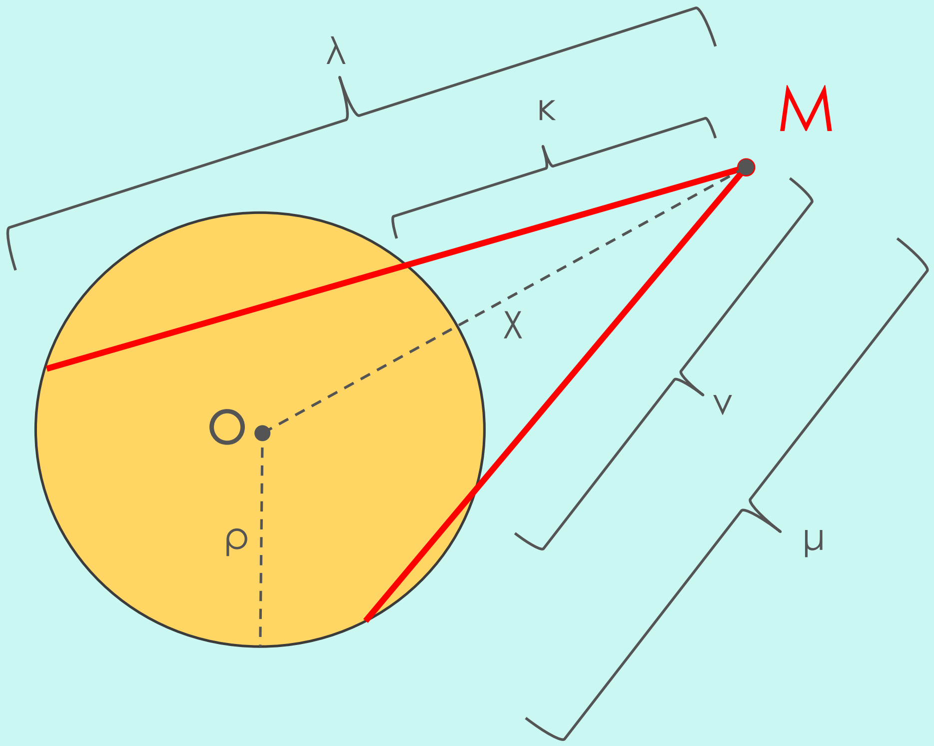


μ = *διάμεσος του τριγώνου.*

Τι ισχύει για τις τέμνουσες από σημείο Μ που είναι <u>εκτός</u> του κύκλου;

ΑΠ:

$$\boxed{\kappa.\lambda = \nu.\mu = \chi^2 - \rho^2}$$

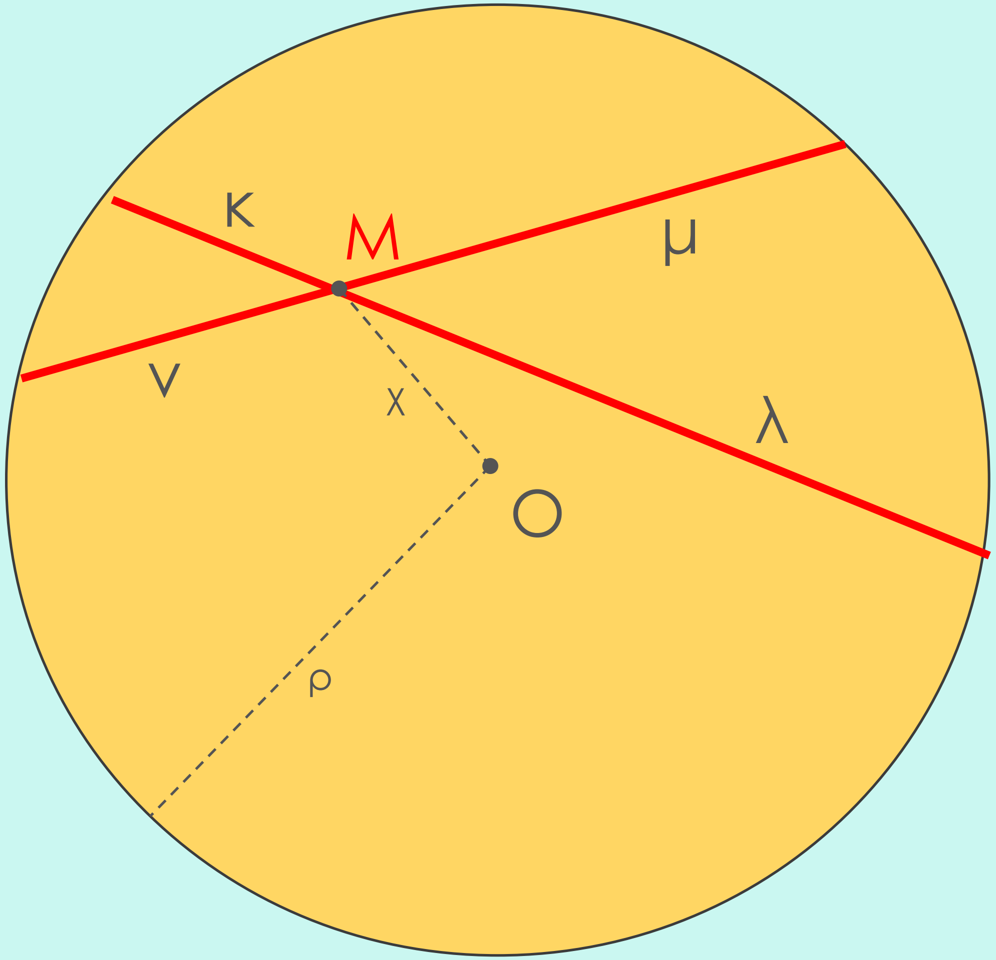


Ο = κέντρο του κύκλου
ρ = ακτίνα του κύκλου
χ = ΟΜ

Τι ισχύει για τις τέμνουσες από σημείο Μ
που είναι <u>εντός</u> του κύκλου;

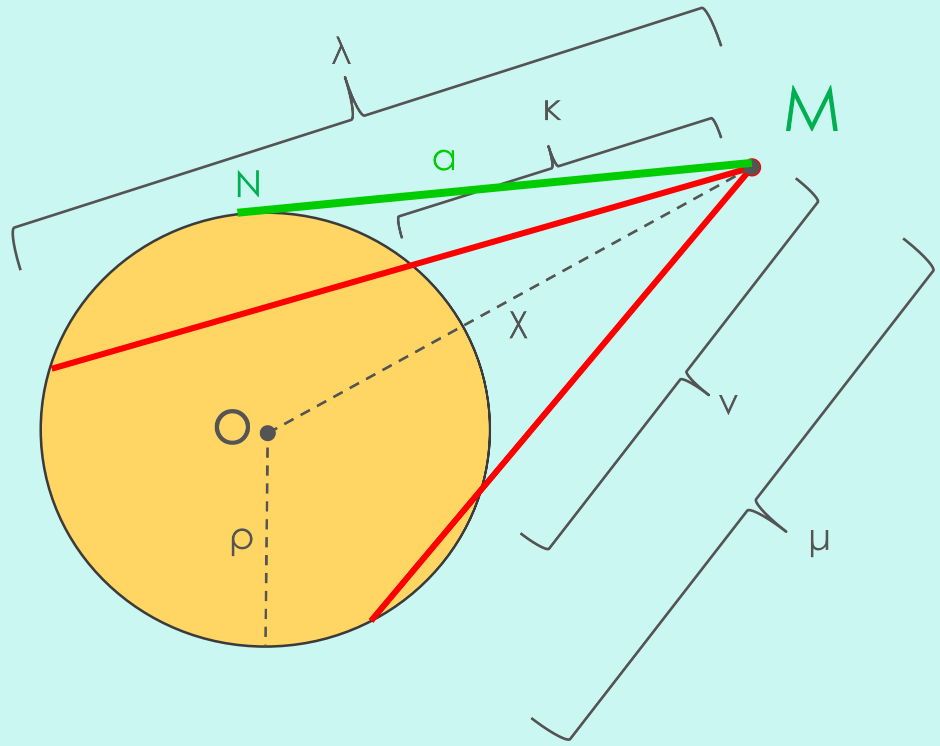
ΑΠ:

$$\boxed{\kappa . \lambda = \nu . \mu = \rho^2 - \chi^2}$$



Ο = κέντρο του κύκλου
ρ = ακτίνα του κύκλου
χ = ΟΜ

Τι ισχύει για τις τέμνουσες από σημείο Μ που είναι <u>εκτός</u> του κύκλου και το <u>εφαπτόμενο</u> τμήμα ΜΝ = α;



ΑΠ:

$$\boxed{\alpha^2 = \kappa.\lambda = \nu.\mu = \chi^2 - \rho^2}$$

Ο = κέντρο του κύκλου
ρ = ακτίνα του κύκλου
χ = ΟΜ
α = ΜΝ

Τι είναι ο αριθμός του Φειδία;

ΑΠ:

Φειδίας: Διάσημος Έλληνας αρχιτέκτονας, γλύπτης και ζωγράφος από την Αθήνα (490 π.Χ. - 430 π.Χ.). Είχε την γενική επιστασία από τον Περικλή στην κατασκευή του Παρθενώνα. Ο ιστορικός Πλούταρχος αναφέρει ότι ο Φειδίας είχε τόση εξουσία ώστε « πάντα ην σχεδόν επ' αυτώ, πάντων επίσκοπος ην και πάσιν επεστάτει τοις τεχνίταις δια φιλίαν Περικλέους ».

Είναι ο αριθμός $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ = 1,618…

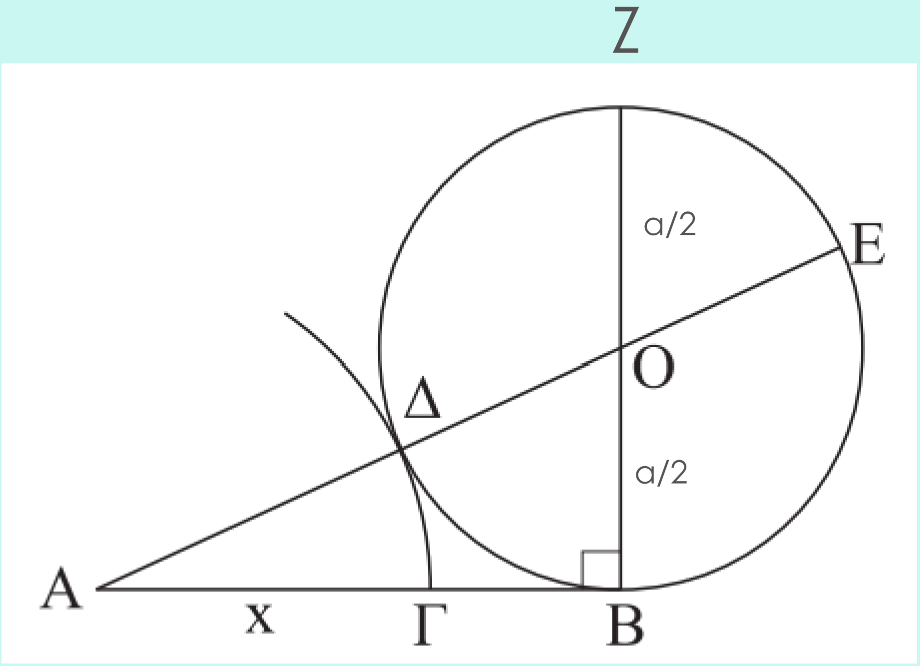
Κατά τους αρχαίους Έλληνες, όπου εμφανίζεται στην γλυπτική, αρχιτεκτονική, ανθρώπινο σώμα, φύση κ.τ.λ. ο αριθμός φ, δημιουργεί την αίσθηση της αρμονίας.

Πως μπορώ να κατασκευάσω ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις α και χ να έχουν λόγο ίσο με τον αριθμό φ του Φειδία;

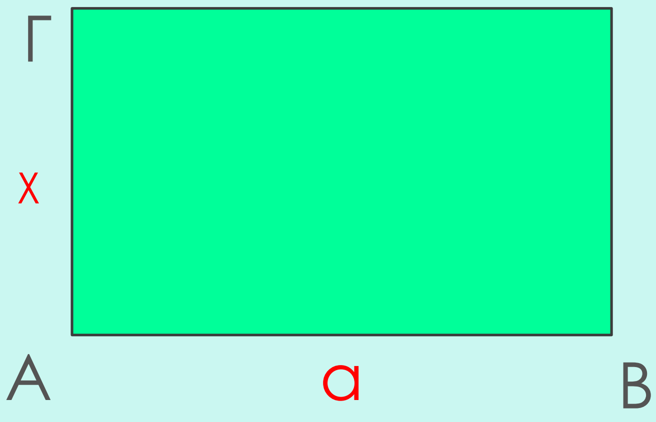
ΑΠ:

Παίρνω το ΑΒ = α, ως μήκος του ζητούμενου ορθογωνίου.
Θα βρω το πλάτος του, χ.

Φέρω ΒΖ = ΑΒ = α και ΒΖ κάθετο στο ΑΒ στο σημείο Β.
Βρίσκω το μέσο Ο του ΒΖ.
Φέρω τον κύκλο που έχει κέντρο το Ο και ακτίνα ΑΒ/2 = α/2.
Φέρω το ΑΟ που τέμνει τον προηγούμενο κύκλο στο Δ.
Φέρω τον κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα την ΑΔ,
που τέμνει το ΑΒ στο σημείο Γ.
Το ΑΓ = χ είναι το πλάτος του ζητούμενου ορθογωνίου.

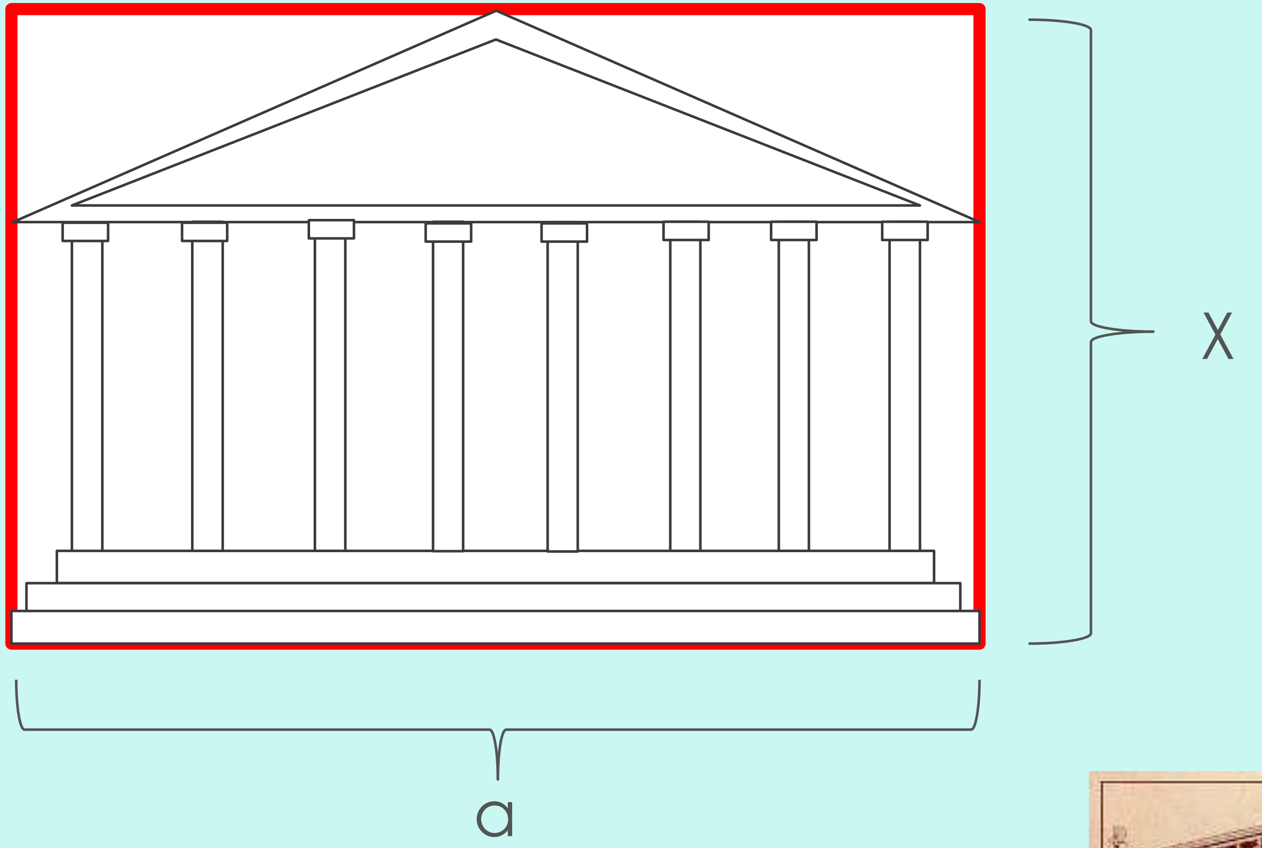


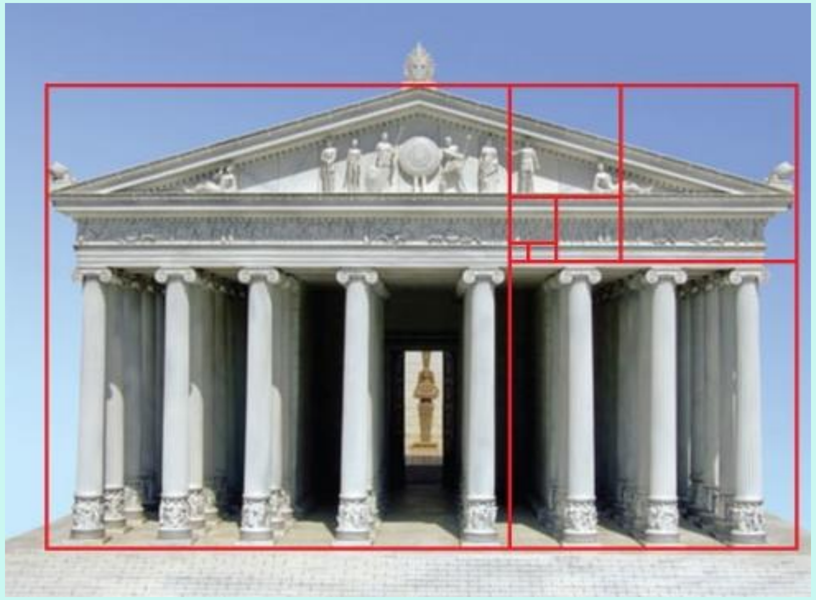
Ισχύει δηλαδή το εξής: ΑΒ / ΑΓ = α / χ = φ = 1,618…



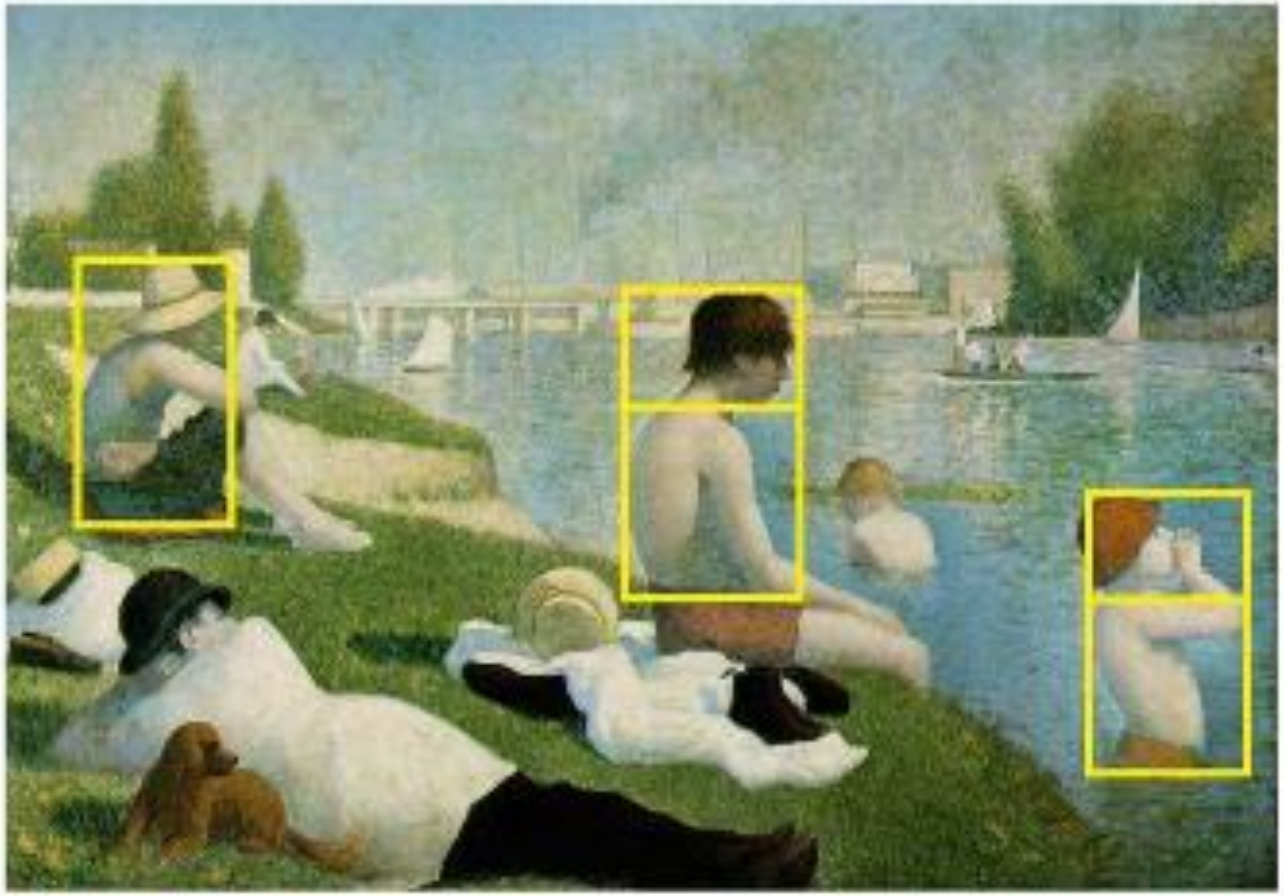
Ο λόγος φ = α/χ = 1,618… λέγεται χρυσή τομή.
Το ορθογώνιο με μήκος α και πλάτος χ,
όπου α/χ = φ = 1,618… λέγεται χρυσό ορθογώνιο.

Ο λόγος α/χ = φ = 1,618….
στην αρχιτεκτονική.

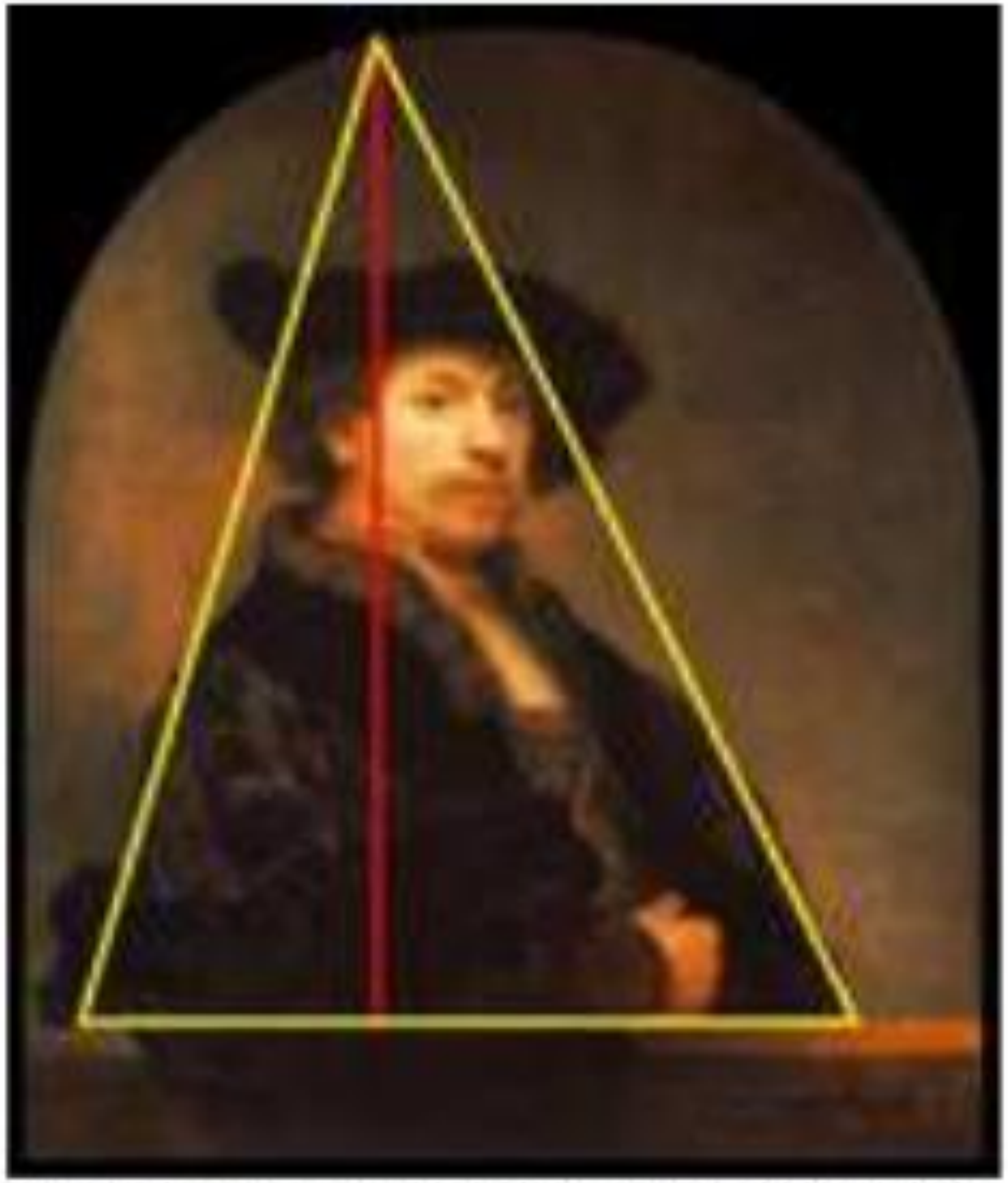




Ο λόγος $\varphi = a/\chi = 1{,}61\ldots$
στην ζωγραφική.

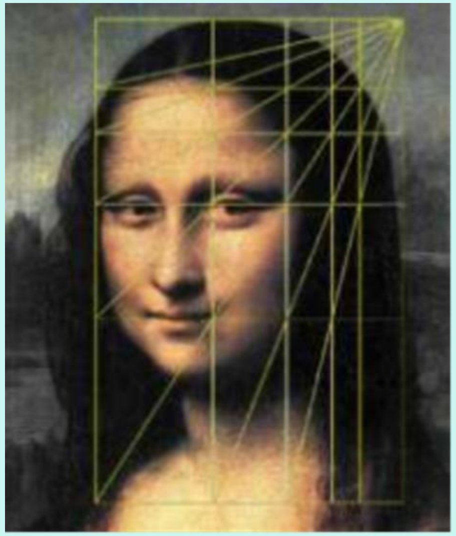


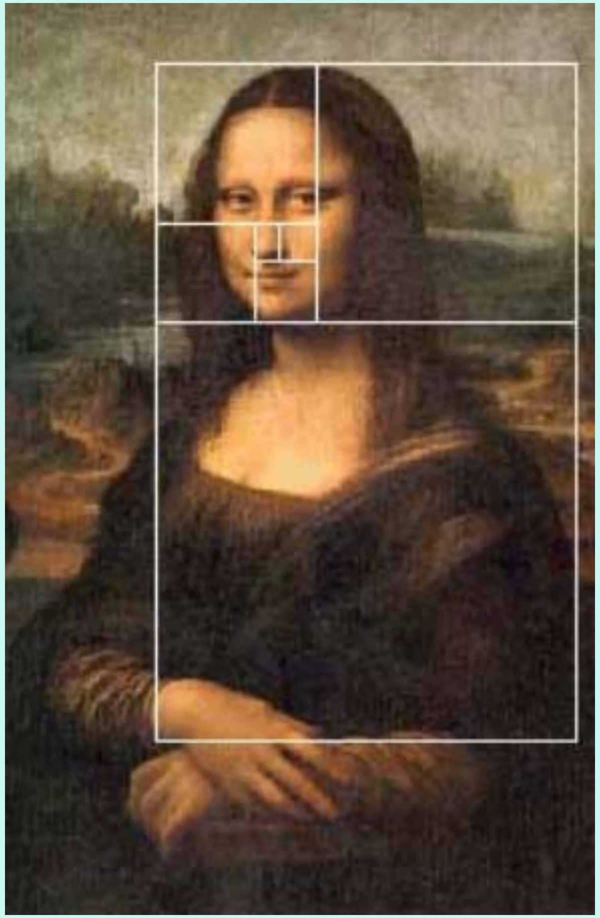
The Bathers at Ansières του Georges Seurat

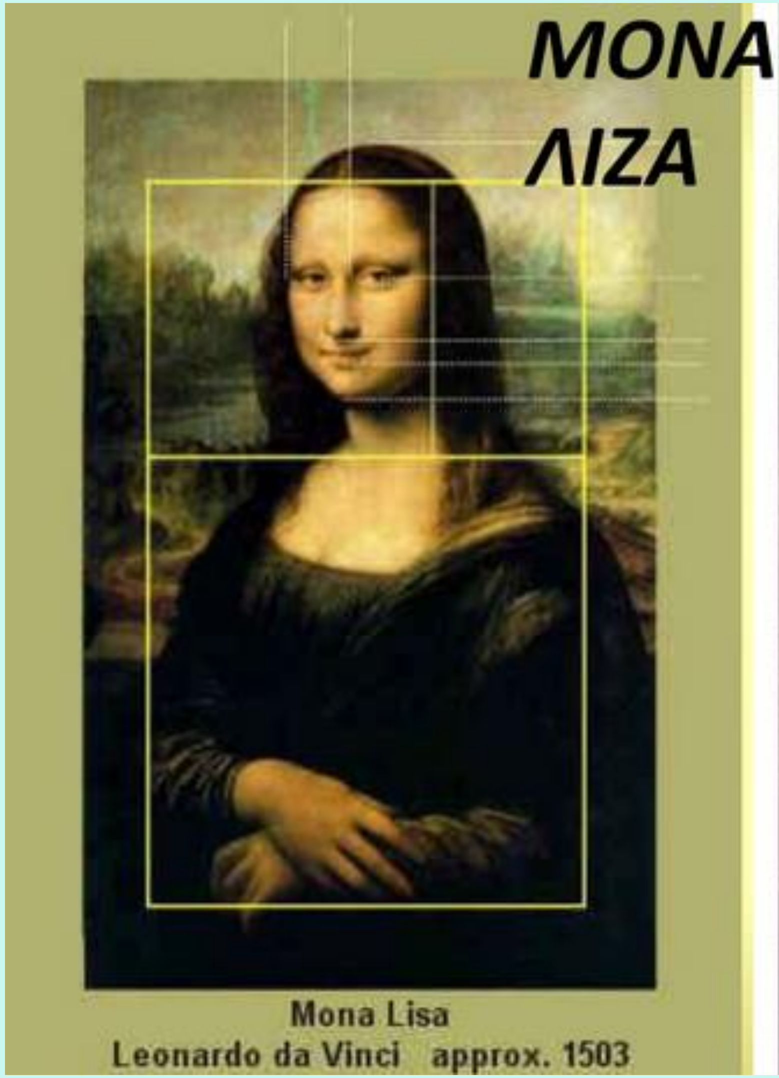


Αυτοπροσωπογραφία του Ρέμπραντ

Ο λόγος $\varphi = a/\chi = 1{,}61\ldots$ στην ζωγραφική.

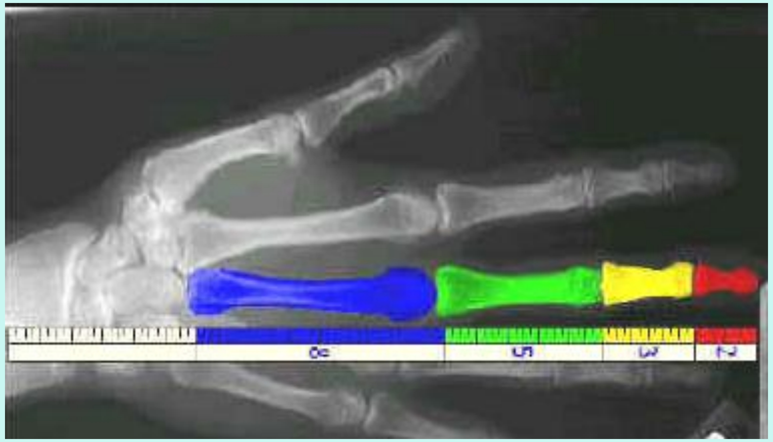


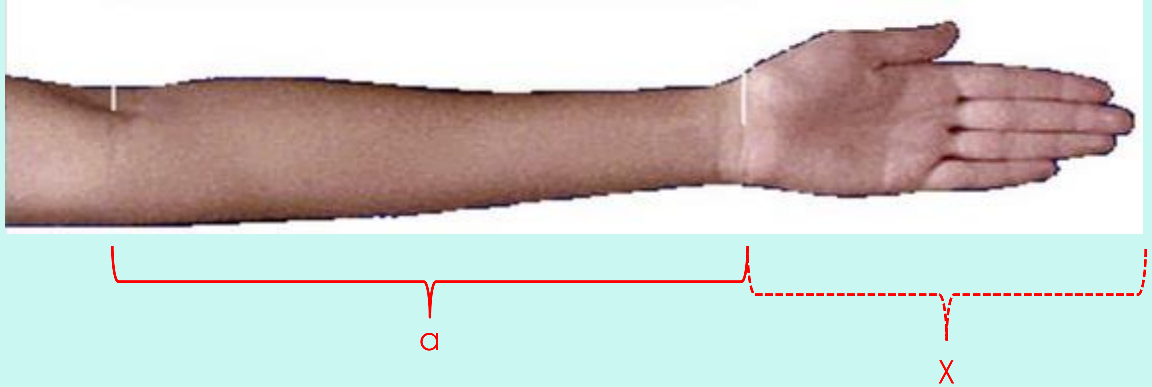


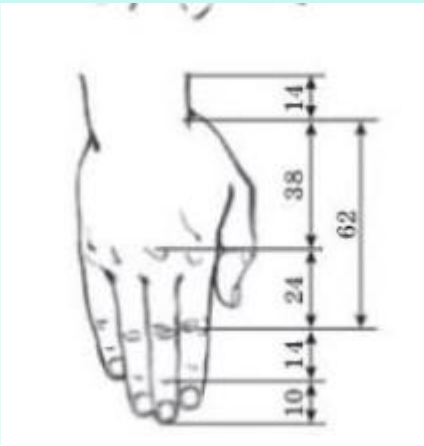


«Μόνα Λίζα»

Ένα από τα πιο φημισμένα και αμφιλεγόμενα έργα του Λεονάρντο Ντα Βίντσι είναι και η «Μόνα Λίζα». Ο Ντα Βίντσι ζωγράφισε το πρόσωπο της Μόνα Λίζα ώστε αυτό να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια.







$$a/\chi = \varphi = 1{,}618....$$

Χρυσή τομή (α/χ = φ = 1,618…) και ανθρώπινο σώμα.

Η χρυσή τομή παρουσιάζεται στις αναλογίες ενός ιδανικού ανθρώπινου σώματος στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Αν χωρίσουμε το σώμα σε δύο άνισα τμήματα, με σημείο διαχωρισμού τον ομφαλό. Είναι φανερό ότι το πάνω μέρος είναι μικρότερο από το κάτω, ποια όμως είναι η αναλογία των δύο μερών; Η απάντηση είναι ότι ο λόγος των δύο μερών είναι ο αριθμός Φ = ½ (1 + √5) = 1,618.... Όμως οι εκπλήξεις δεν τελειώνουν εδώ. Ο αριθμός Φ εμφανίζεται και στα ακόλουθα:

2. Ο λόγος του ύψους του συνολικού ανθρώπινου σώματος προς το ύψος του μεγαλύτερου από τα δύο τμήματα του προηγούμενου παραδείγματος είναι πάλι Φ.

3. Ο λόγος του ύψους του τμήματος του σώματος που ορίζεται από τις οριζόντιες γραμμές που περνούν αντίστοιχα από τον ομφαλό και τις θηλές του στήθους, προς το ύψος του τμήματος που προσδιορίζεται από την οριζόντιες γραμμές που ορίζουν οι θηλές και η βάση του λαιμού είναι πάλι Φ.

4. Ο λόγος του τμήματος που ορίζεται από τις οριζόντιες γραμμές που περνούν αντίστοιχα από το ψηλότερο σημείο της κεφαλής και τις θηλές του στήθους, προς το ύψος του τμήματος που ορίζουν οι οριζόντιες γραμμές που περνούν από τις θηλές και τον ομφαλό είναι πάλι Φ.

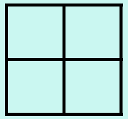
5. Το πηλίκο του μήκους του διαστήματος [κορυφή κεφαλής – γραμμή φρυδιών] προς το μήκος του διαστήματος [γραμμή φρυδιών – κάτω άκρο μύτης] είναι ο αριθμός της χρυσής τομής 1,618033...

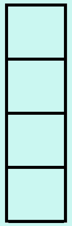
6. Όμοια το μήκος του τμήματος [κορυφή κεφαλής – κάτω άκρο μύτης] προς το μήκος του τμήματος [κάτω άκρο μύτης – κάτω άκρο λαιμού] είναι και πάλι Φ.

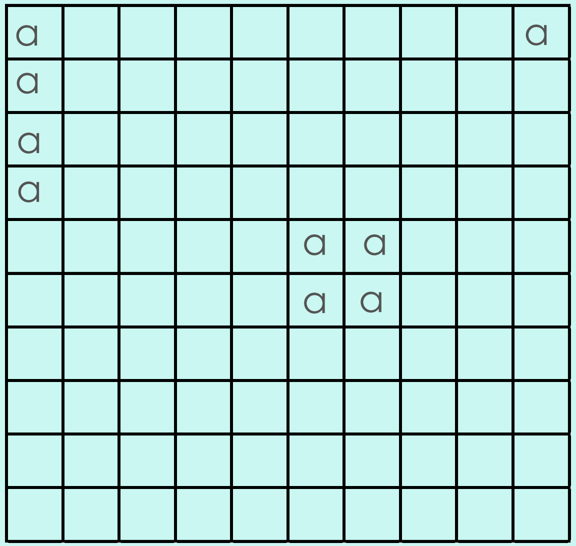
7. Κάθε δάκτυλο του χεριού του ανθρωπίνου σώματος έχει τρεις φάλαγγες, με την πρώτη φάλαγγα να είναι μεγαλύτερη από τη δεύτερη και τη δεύτερη μεγαλύτερη από την τρίτη. Αν προσθέσουμε το μήκος της δεύτερης και της τρίτης φάλαγγας και διαιρέσουμε το άθροισμα με το μήκος της πρώτης προκύπτει και πάλι ο αριθμός της χρυσής τομής.

Τι είναι το εμβαδόν;

$\boxed{a}$

Σ1  → $E1 = a + a + a + a = 4a$

Σ2  → $E2 = a + a + a + a = 4a$

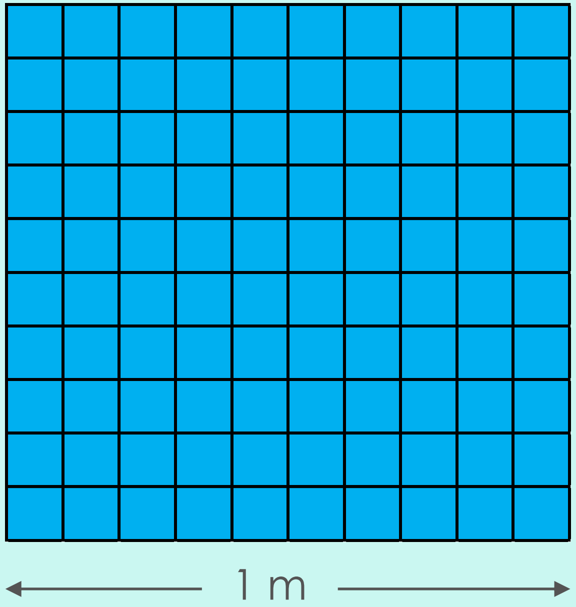


- *Με μονάδα μέτρησης το τετράγωνο α, έχω ότι το εμβαδόν του επίπεδου ευθύγραμμου σχήματος Σ1 είναι $E1 = a + a + a + a = 4a$. Δηλαδή το τετράγωνο α, χωρά ακριβώς 4 φορές μέσα στο Σ1.*
- *Με μονάδα μέτρησης το τετράγωνο α έχω ότι το εμβαδόν του επίπεδου ευθύγραμμου σχήματος Σ2 είναι $E2 = a + a + a + a = 4a$. Δηλαδή το τετράγωνο α, χωρά ακριβώς 4 φορές μέσα στο Σ2.*
- *Παρατηρώ ότι ενώ τα Σ1 και Σ2 έχουν διαφορετικό σχήμα, εντούτοις έχουν το ίδιο εμβαδό 4α .*

Τι είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2);

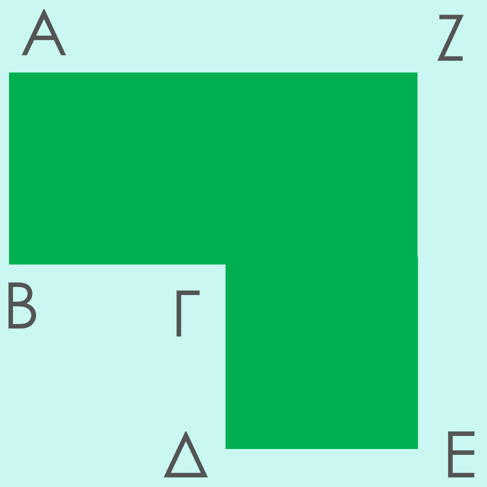
ΑΠ:

Είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1 μέτρο (1m).



1 τετραγωνικό μέτρο
1 m^2

Τι σημαίνει ότι το οικόπεδο ΑΒΓΔΕΖΑ, έχει εμβαδόν 250 τετραγωνικά μέτρα (250 m^2) και πως το γράφουμε;



ΑΠ:

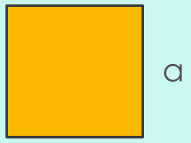
Το τετράγωνο με πλευρά 1 μέτρο (δηλαδή το τετραγωνικό μέτρο), χωρά μέσα στο ΑΒΓΔΕΖΑ, 250 φορές.

Γράφουμε $E = (ΑΒΓΔΕΖΑ) =$
$= \text{εμβαδόν του } ΑΒΓΔΕΖΑ = 250\ m^2 =$
$= 250 \text{ τετραγωνικά μέτρα}$

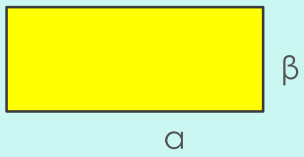
ή απευθείας $E = 250\ m^2$.

ΕΜΒΑΔΑ

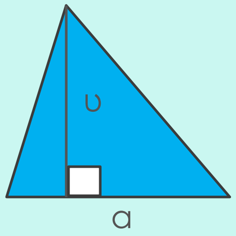
- ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ = $α^2$



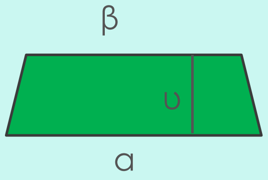
- ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ = $α.β$



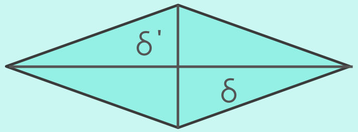
- ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΥΧΑΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ = $(α.υ)/2$



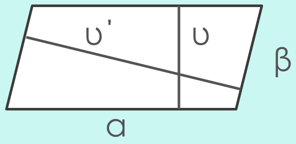
- ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ = $[(α + β)υ]/2$



- ΕΜΒΑΔΟΝ ΡΟΜΒΟΥ = $(δ.δ')/2$



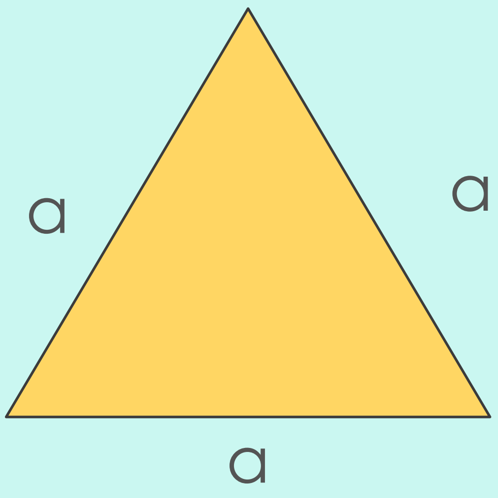
- ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ = $α.υ = β.υ'$



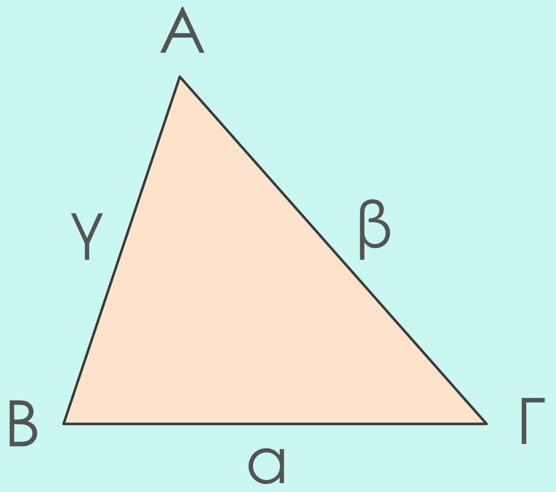
Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού Ε ενός ισοπλεύρου τριγώνου, όταν γνωρίζω μόνο την πλευρά του α ;

ΑΠ:

$$E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$$



Άλλοι τύποι για το εμβαδόν E, τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ και γωνίες A, B, Γ:

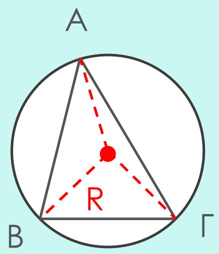


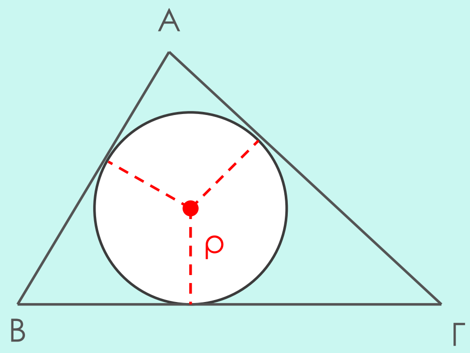
$$E = (\alpha\beta\gamma)/(4R)$$

$$E = (1/2)\beta\gamma\eta\mu A = (1/2)\gamma\alpha\eta\mu B = (1/2)\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

$$E = 2R^2\ \eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$$

$$E = \tau\rho$$



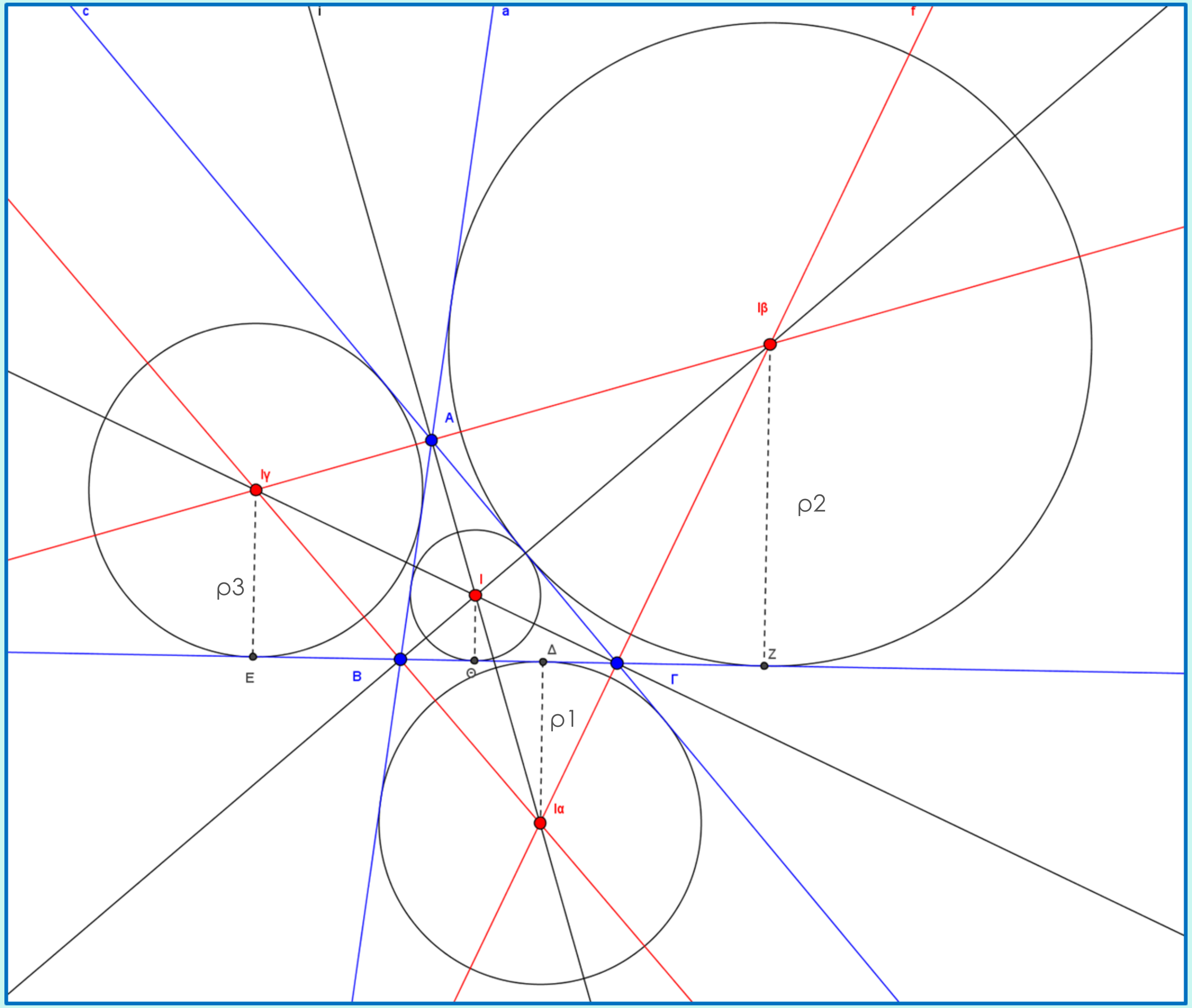


R = ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$.
ρ = ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$.
τ = μισή περίμετρος τριγώνου $AB\Gamma$ = ημιπερίμετρος $AB\Gamma = (\alpha + \beta + \gamma)/2$.
2τ = περίμετρος τριγώνου $= \alpha + \beta + \gamma$.

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν Ε, τριγώνου ΑΒΓ
με πλευρές α, β, γ και γωνίες Α, Β, Γ:

$$E = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{4\sigma\varphi A}$$

ρ1 , ρ2 , ρ3 = ακτίνες των παραγεγραμμένων κύκλων με κέντρα τα σημεία Ια , Ιβ , Ιγ.



$$E = (\tau - \alpha)\rho 1 = (\tau - \beta)\rho 2 = (\tau - \gamma)\rho 3$$

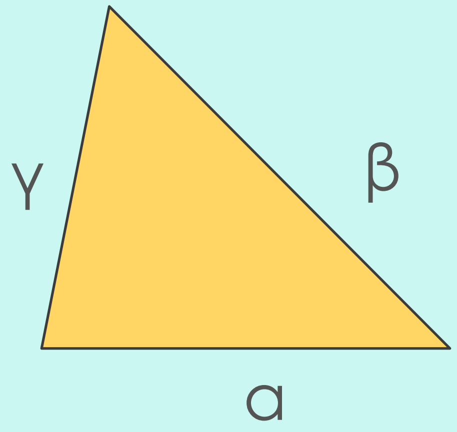
τ = μισή περίμετρος τριγώνου ΑΒΓ = ημιπερίμετρος ΑΒΓ = (α + β + γ)/2.

Πως βρίσκω το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου,
όταν γνωρίζω μόνο τις τρεις πλευρές του α, β, γ ;

ΑΠ:

Ήρων: Διάσημος Έλληνας μαθηματικός και μηχανικός (300 π.Χ. – 230 π.Χ.) από την Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου.

Χρησιμοποιώ τον εξής τύπο του Ήρωνα:



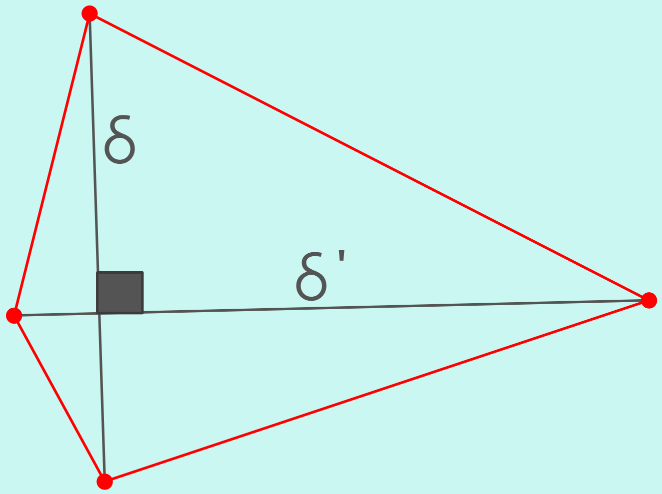
$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

τ = μισή περίμετρος τριγώνου ΑΒΓ = ημιπερίμετρος ΑΒΓ = (α + β + γ)/2.

Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού Ε σε τετράπλευρο, με κάθετες διαγώνιες δ και δ' ;

ΑΠ:

$$Ε = \frac{δ.δ'}{2}$$

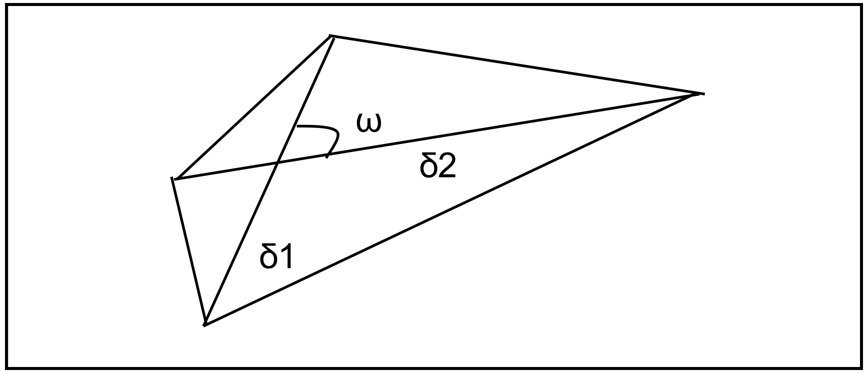


Ποιος είναι ο τύπος υπολογισμού του εμβαδού Ε σε τυχαίο τετράπλευρο, με διαγώνιες δ1 και δ2, που σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους ω ;

ΑΠ:

$$E = \frac{\delta 1 \cdot \delta 2 \cdot \eta\mu\omega}{2}$$

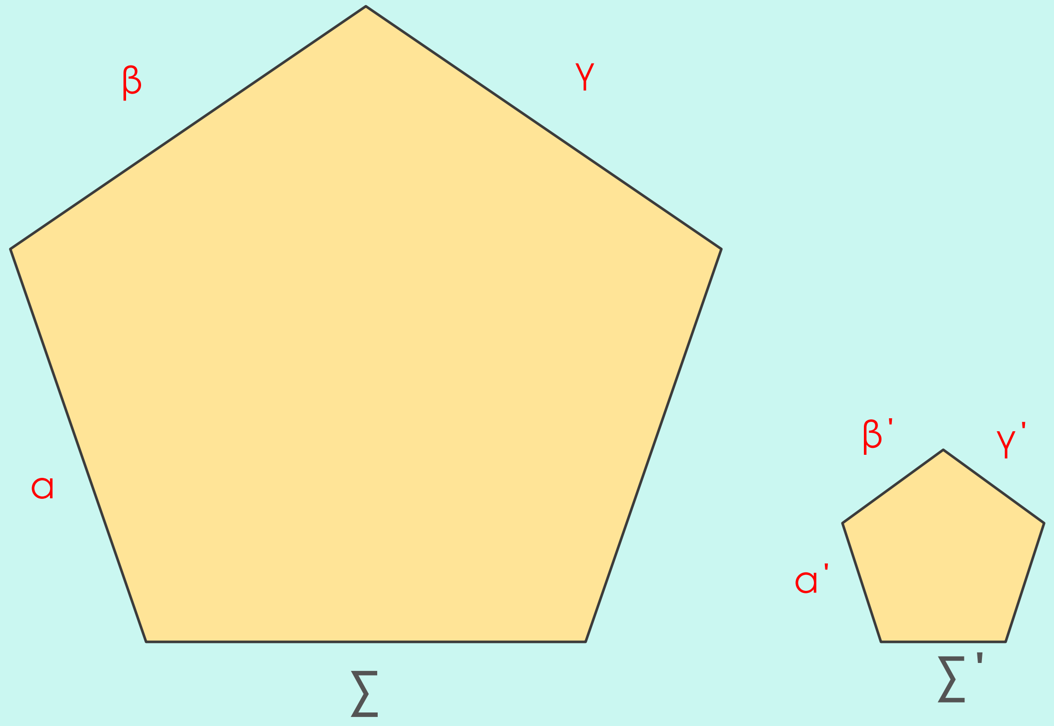
όπου δ1 , δ2 οι διαγώνιες
και ω η γωνία των διαγωνίων.



Τι είναι όμοια επίπεδα ευθύγραμμα σχήματα και τι είναι ο λόγος ομοιότητας τους λ;

ΑΠ:

- *Τα σχήματα που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.*



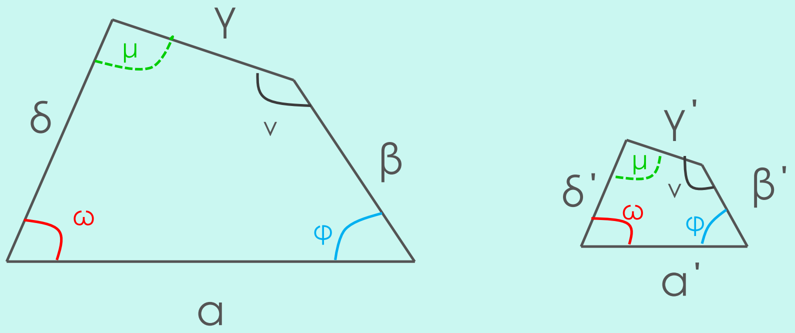
- *Το κλάσμα που έχει αριθμητή την πλευρά α του σχήματος Σ και παρανομαστή την αντίστοιχη πλευρά α' του όμοιου σχήματος Σ', λέγεται λόγος ομοιότητας και συμβολίζεται με λ.*

α / α' = λ = λόγος ομοιότητας

Πότε δύο επίπεδα ευθύγραμμα σχήματα είναι όμοια;

ΑΠ:

Όταν έχουν τις αντίστοιχες γωνίες ίσες και τις αντίστοιχες πλευρές ανάλογες. Δηλαδή το ένα να είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου.



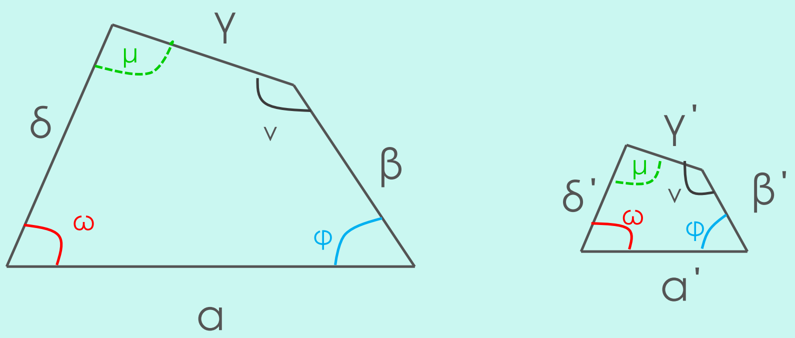
- $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'} = \dfrac{\gamma}{\gamma'} = \dfrac{\delta}{\delta'} =$

  $= \lambda =$ λόγος ομοιότητος

- Γωνία ω = γωνία ω
  Γωνία φ = γωνία φ
  Γωνία ν = γωνία ν
  Γωνία μ = γωνία μ

Περίμετρος δύο όμοιων επίπεδων ευθύγραμμων σχημάτων.

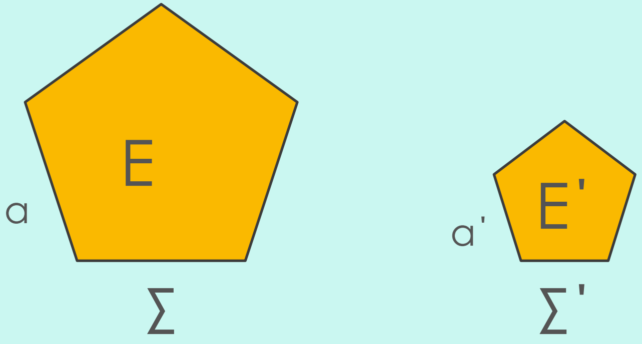
Ο λόγος των περιμέτρων τους, ισούται με τον λόγο ομοιότητας λ.



$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\delta}{\delta'} = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'} = \lambda = \text{λόγος ομοιότητας}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΜΟΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

Αν το σχήμα Σ με εμβαδόν Ε, είναι όμοιο με το σχήμα Σ' με εμβαδόν Ε' και έχουν λόγο ομοιότητας πλευρών $\lambda = a/a'$, τότε για τον αντίστοιχο λόγο των εμβαδών τους Ε / Ε', ισχύει το εξής: $E / E' = \lambda^2$



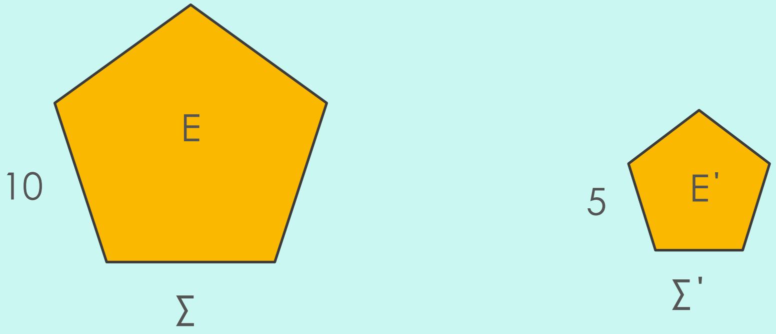
$$a / a' = \lambda \quad \rightarrow \quad E / E' = \lambda^2$$

Δηλαδή αν το σχήμα Σ έχει πλευρά διπλάσια από την αντίστοιχη πλευρά του όμοιου σχήματος Σ', τότε το εμβαδόν Ε του Σ θα είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν Ε' του Σ'.

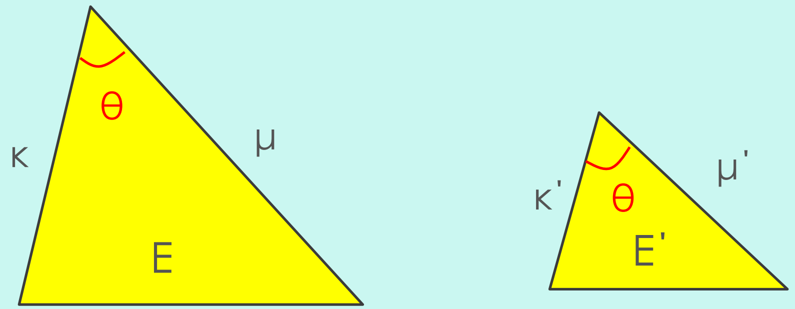
Δηλαδή: $a / a' = 10 / 5 = 2 = \lambda$ = λόγος ομοιότητας.

$E / E' = \lambda^2 = 2^2 = 4$ οπότε τελικά

$E / E' = 4 \Leftrightarrow E = 4E'$

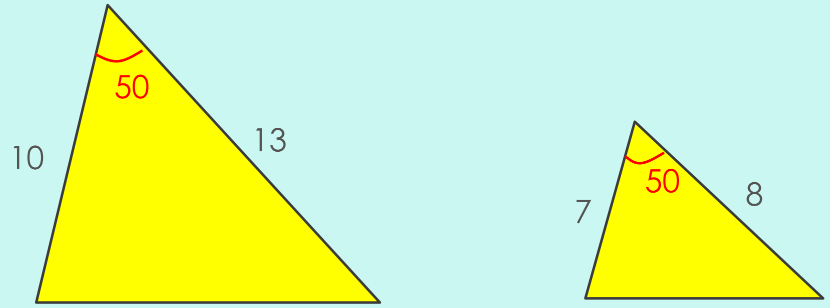


- *Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία θ ίση, τότε για τις πλευρές που είναι προσκείμενες αυτών των ίσων γωνιών και τα εμβαδά, ισχύει η εξής σχέση: Ε / Ε' = (κμ) / (κ'μ')*



$$\boxed{\theta = \theta \quad \rightarrow \quad E / E' = (\kappa.\mu) / (\kappa'\mu')}$$

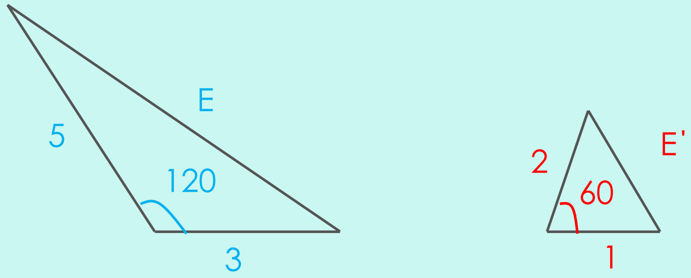
Παράδειγμα: 50 = 50 → Ε / Ε' = (10.13) / (7.8) = 130 / 56 = 2,32



- *Το ίδιο ακριβώς ισχύει αν οι γωνίες δεν είναι ίσες, αλλά έχουν άθροισμα 180 μοιρών (παραπληρωματικές).*

$$\boxed{\theta + \omega = 180 \quad \rightarrow \quad E / E' = (\kappa.\mu) / (\kappa'\mu')}$$

Παράδειγμα: 120 + 60 = 180 → Ε / Ε' = (5.3) / (2.1) = 15 / 2 = 7,5

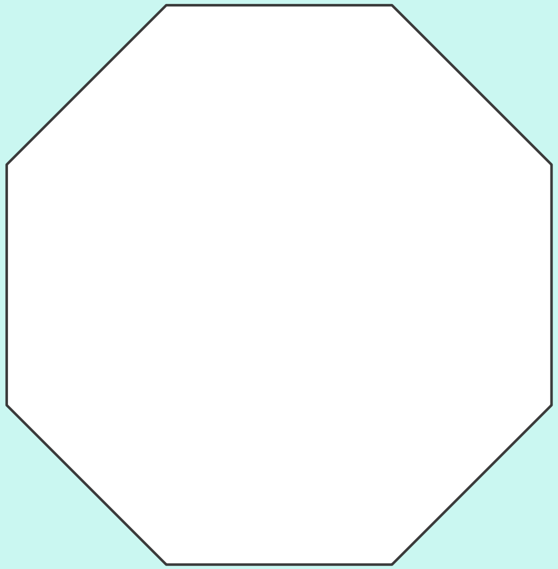


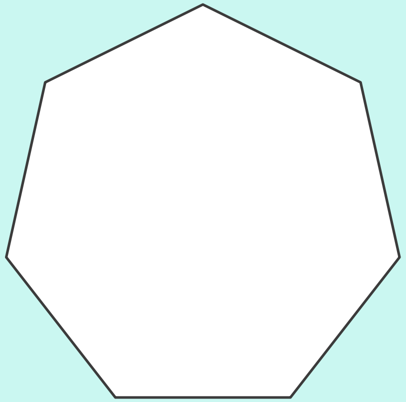
Τι είναι κανονικό πολύγωνο;

ΑΠ:

Το πολύγωνο που έχει ίσες πλευρές και ταυτόχρονα ίσες γωνίες.

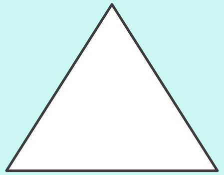
Κανονικό 8-γωνο →



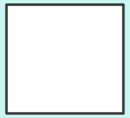


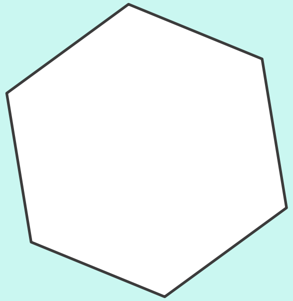
← Κανονικό 7-γωνο

Ισόπλευρο τρίγωνο →

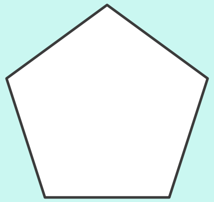


Τετράγωνο →





← Κανονικό 6-γωνο



← Κανονικό 5-γωνο

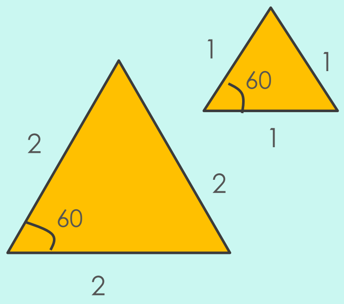
Τι ισχύει σε κανονικά πολύγωνα με ίδιο αριθμό πλευρών ;

ΑΠ:

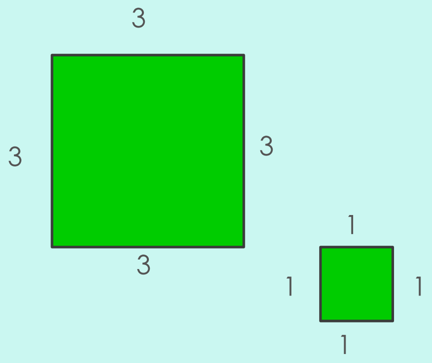
Τα κανονικά πολύγωνα με ίδιο αριθμό πλευρών, είναι όμοια.

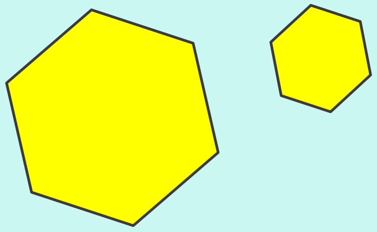
Αυτό συμβαίνει, διότι ισχύει ο ίδιος λόγος ομοιότητας   α/α΄   για όλες τους τις αντίστοιχες πλευρές και έχουν επίσης ίσες τις αντίστοιχες γωνίες.

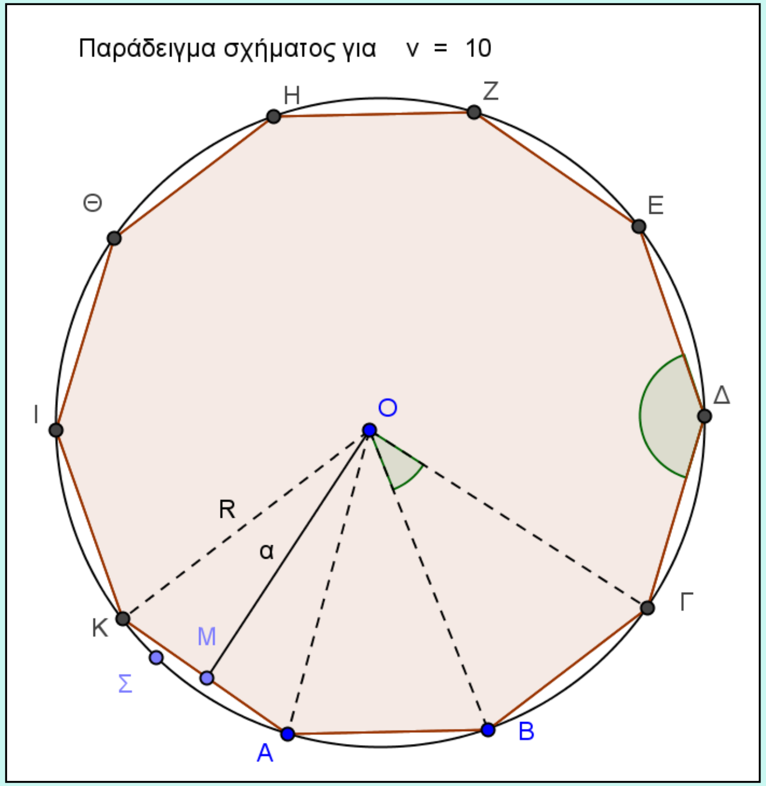
Δηλαδή δύο τυχαία ισόπλευρα τρίγωνα, είναι μεταξύ τους όμοια.
Ομοίως και δύο τυχαία τετράγωνα.
Ομοίως και δύο τυχαία κανονικά εξάγωνα.
Ομοίως και δύο τυχαία κανονικά 10-γωνα.

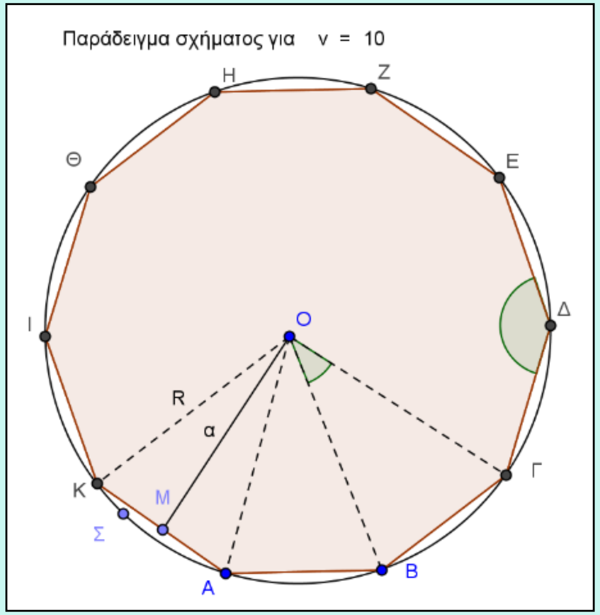


←   Λόγος ομοιότητας = 2/1 = 2/1 = 2/1 = 2
και   60 = 60   ,   60 = 60   ,   60 = 60









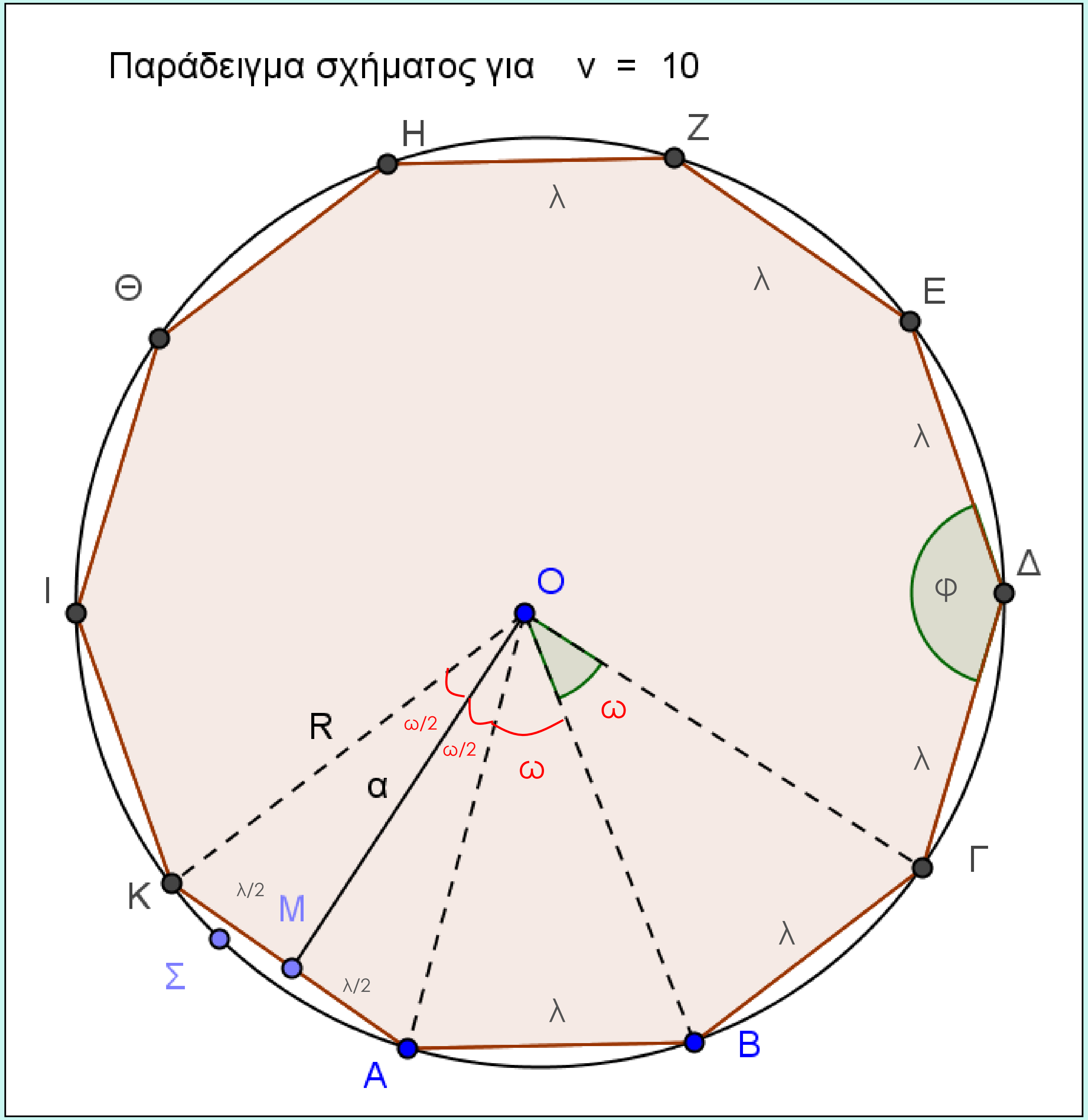
Τι ισχύει σε ένα κανονικό πολύγωνο:

ν = πλήθος των πλευρών =
= πλήθος γωνιών =
= πλήθος κορυφών =
= πλήθος τόξων

Το κανονικό πολύγωνο χωρίζεται σε ν το πλήθος ισοσκελή τρίγωνα, που όλα τους έχουν κοινή κορυφή το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου του κύκλου.

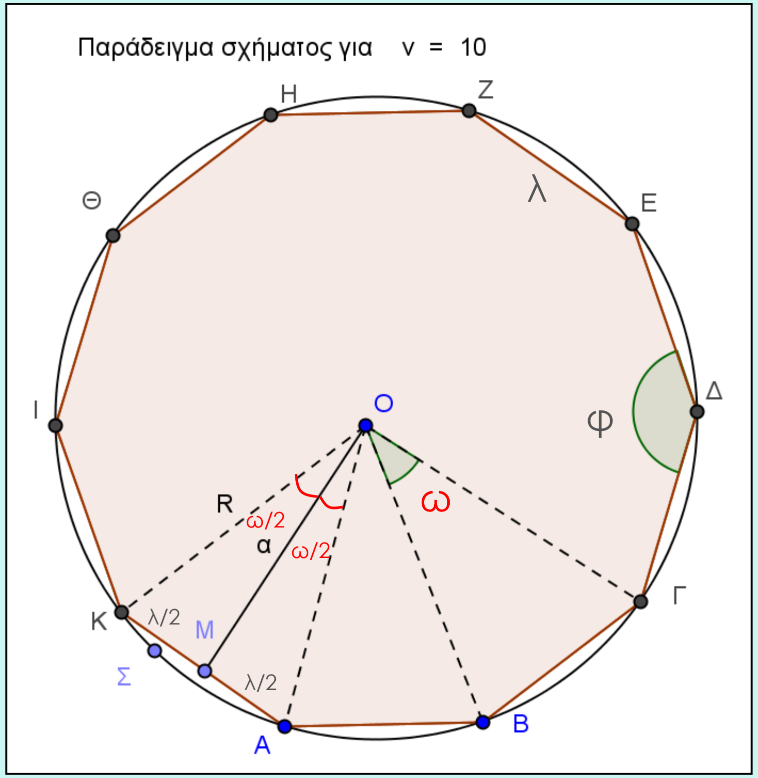
Το τόξο ΚΣΑ = 2πR/ν σε μονάδες μήκους.

Το τόξο ΚΣΑ = 360 / ν σε μοίρες.



Τι ισχύει σε ένα κανονικό πολύγωνο:

ν = πλήθος των πλευρών =
= πλήθος γωνιών =
= πλήθος κορυφών =
= πλήθος τόξων



Κεντρική γωνία = γωνία ΒΟΓ = ω = 360 / ν σε μοίρες.
Τόξο ΚΣΑ = 360/ν = ω σε μοίρες
Τόξο ΚΣΑ = 2πR/ν σε μονάδες μήκους.

Γωνία πολυγώνου = γωνία ΕΔΓ = φ = 180 – ω σε μοίρες.

Πλευρά πολυγώνου = ΖΕ = λ σε μονάδες μήκους.
Απόστημα πολυγώνου = ΟΜ = α σε μονάδες μήκους.
Περίμετρος πολυγώνου = νλ σε μονάδες μήκους.
Εμβαδόν μόνο του τριγώνου ΟΚΑ = (ΚΑ.ΟΜ)/2 = (λ.α)/2
Εμβαδόν πολυγώνου = ν[Εμβαδόν τριγώνου ΟΚΑ] = ν [(λ.α)/2]

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΑ με Πυθαγόρειο θεώρημα: $ΜΑ^2 + ΟΜ^2 = ΟΑ^2 \Leftrightarrow (λ/2)^2 + α^2 = R^2$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΑ με τύπους τριγωνομετρίας:
Γωνία ΜΟΑ = ω/2
ΜΑ = λ/2 = Rημ(ω/2) = αεφ(ω/2)
ΟΜ = α = Rσυν(ω/2) = (λ/2)σφ(ω/2)
Εμβαδόν μόνο του τριγώνου ΟΚΑ = (1/2)R.Rημω = $(1/2)R^2$ ημω
Εμβαδόν πολυγώνου = ν[Εμβαδόν τριγώνου ΟΚΑ] = ν [$(1/2)R^2$ ημω]

Τύποι με τριγωνομετρία

Κάθε κανονικό πολύγωνο
είναι ταυτόχρονα
εγγράψιμο και περιγράψιμο.

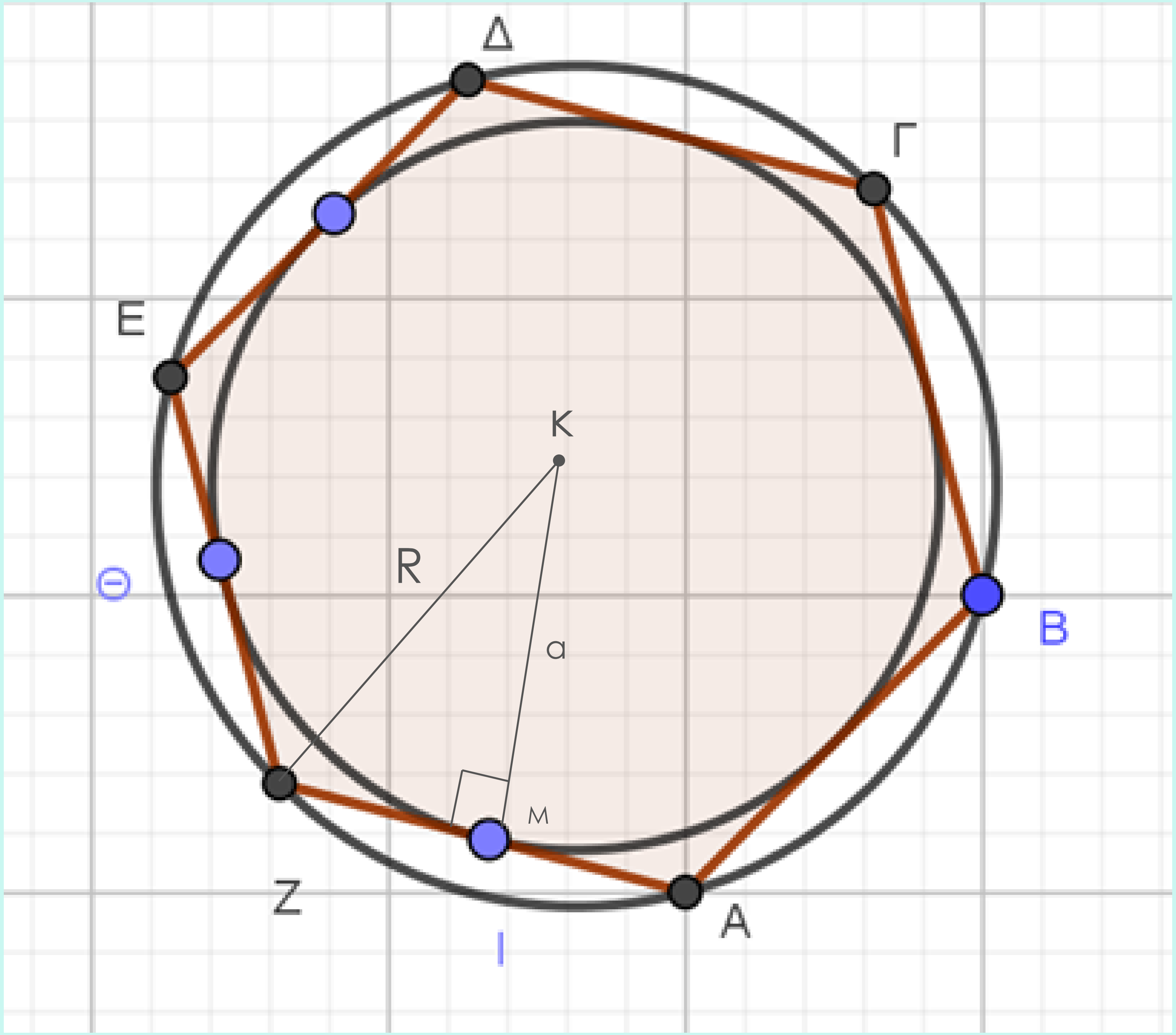
Το ***καφέ*** *κανονικό πολύγωνο δίπλα, είναι ταυτόχρονα εγγράψιμο και περιγράψιμο.*
Οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Κ.

Εγγράψιμο = όλες του οι κορυφές ανήκουν στον ίδιο κύκλο

Περιγράψιμο = όλες του οι πλευρές εφάπτονται εσωτερικά στον ίδιο κύκλο

ΚΖ = R = ακτίνα του ***καφέ*** *πολυγώνου.*

ΚΜ = α = απόστημα του ***καφέ*** *πολυγώνου.*



Τι σχήμα παίρνω
αν ενώσω όλα τα μέσα
των πλευρών ενός
κανονικού πολυγώνου ;

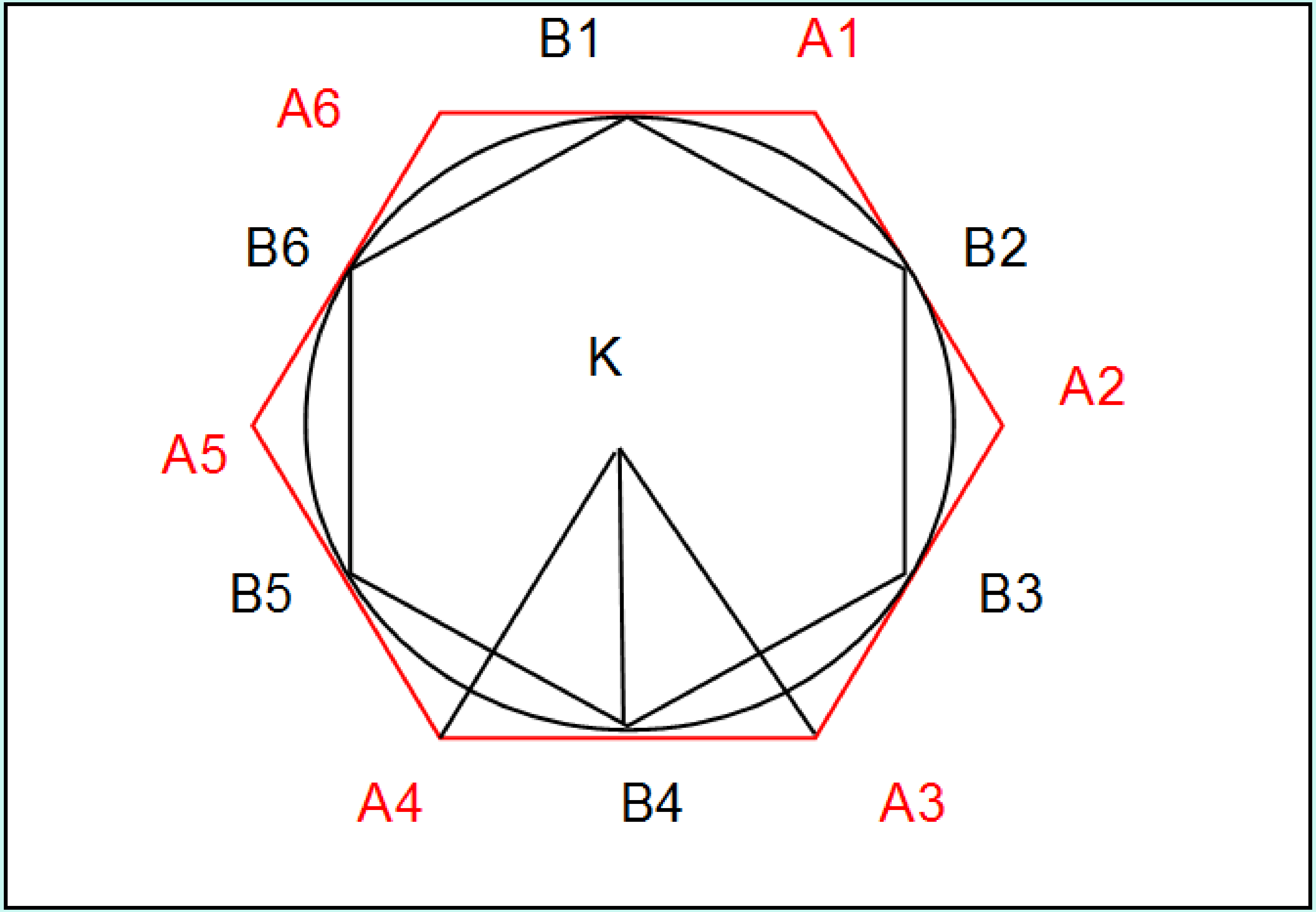
ΑΠ:

*Πάλι κανονικό πολύγωνο,
με τον ίδιο αριθμό πλευρών
και το ίδιο κέντρο κύκλου.*

*ΚΒ4 = ακτίνα του **μαύρου** πολυγώνου =*

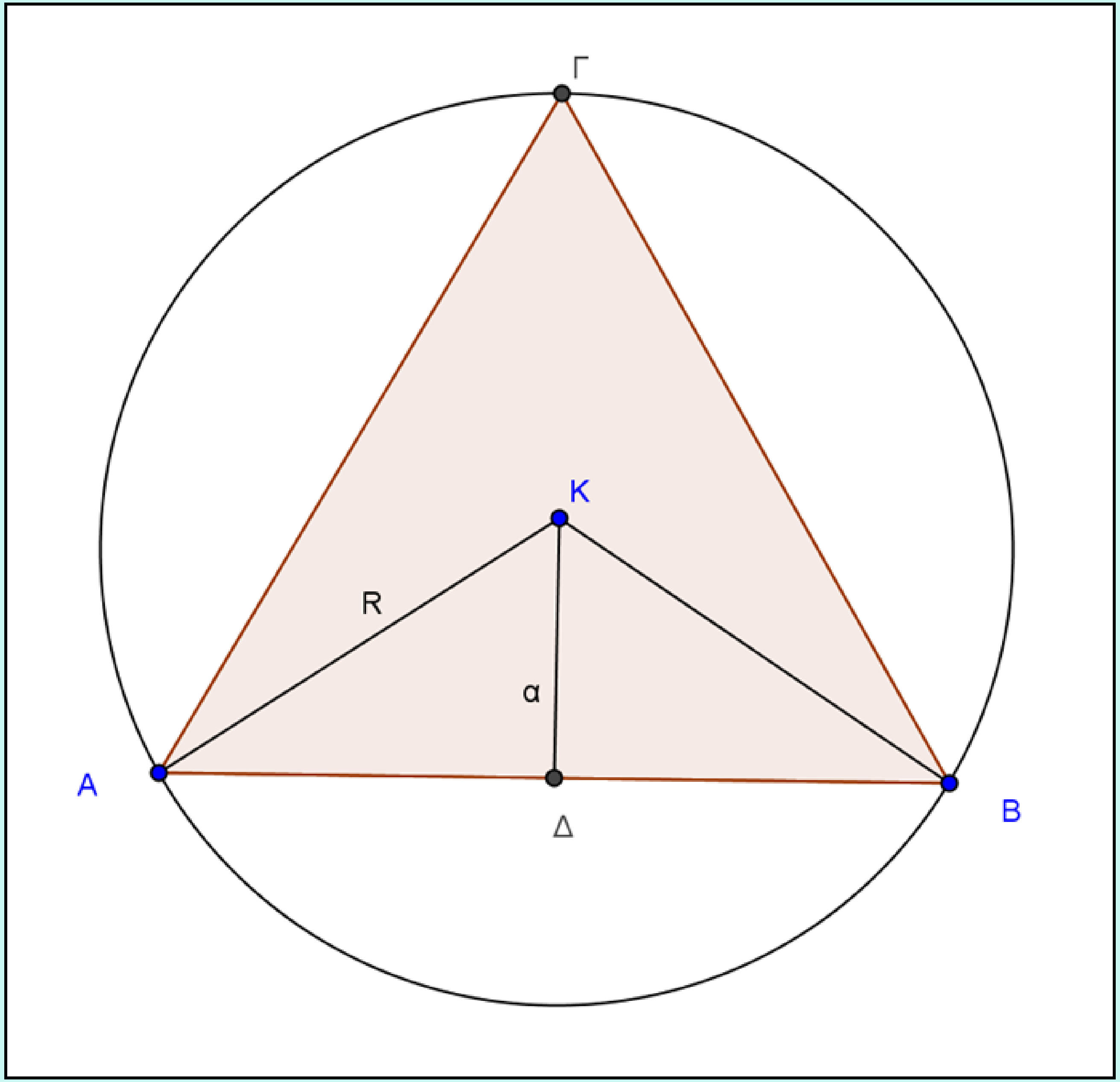
*= απόστημα του **κόκκινου** πολυγώνου*

*ΚΑ4 = ακτίνα του **κόκκινου** πολυγώνου.*



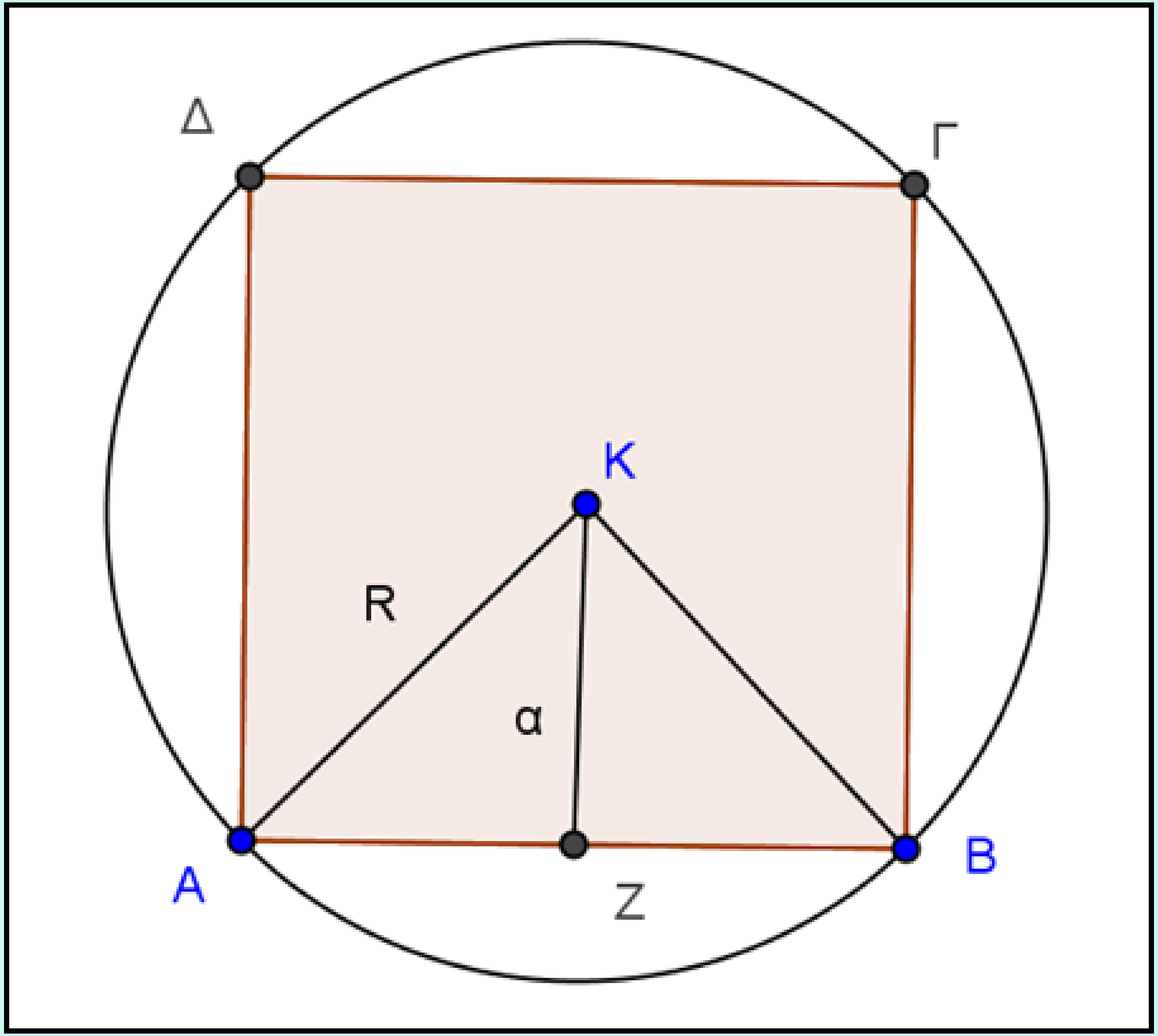
Το κανονικό 3-γωνο =

= ισόπλευρο τρίγωνο



Το κανονικό 4-γωνο =

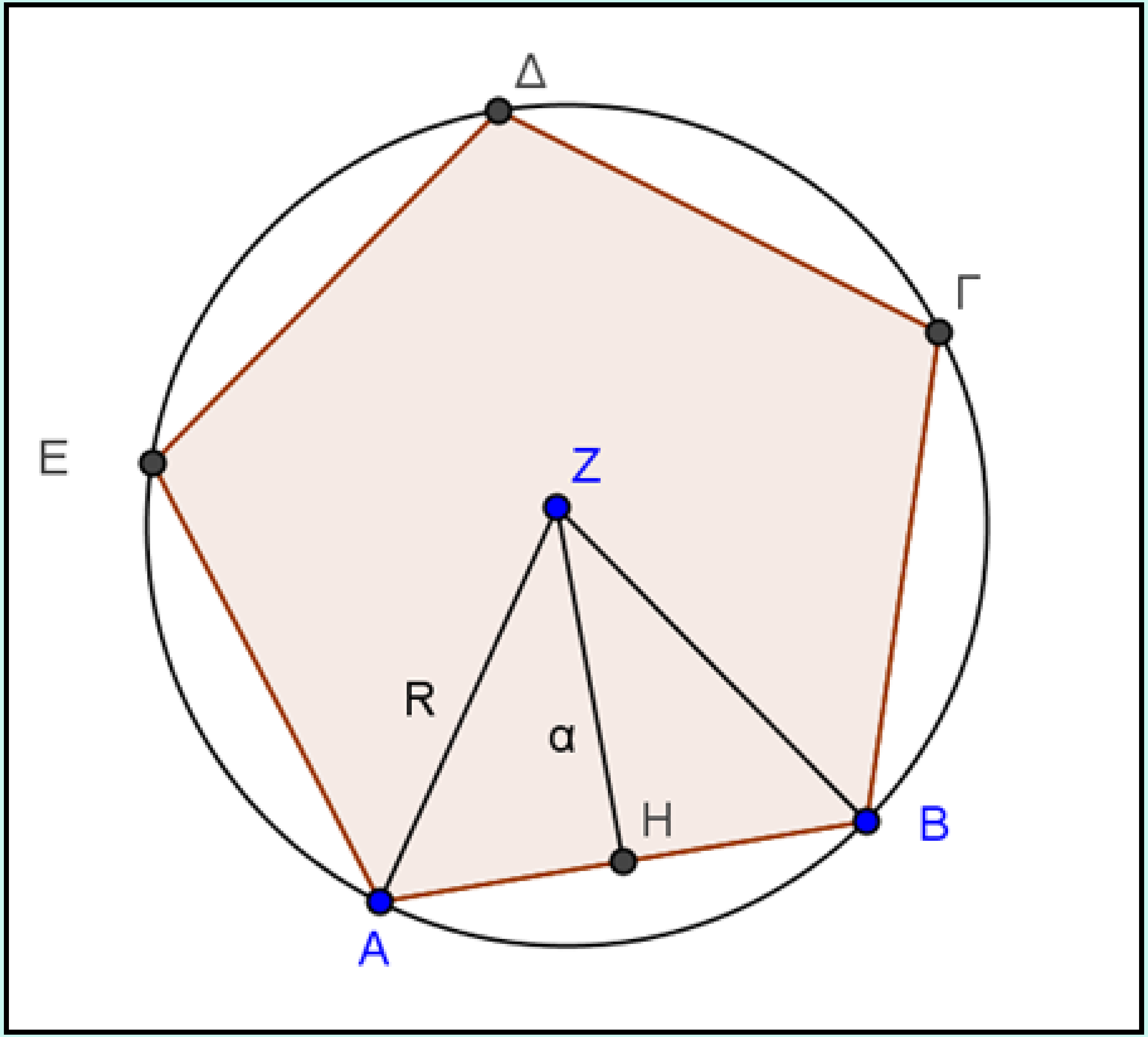
= τετράγωνο



Το κανονικό 5-γωνο

Η ζάντα της ρόδας αυτοκινήτου Ι.Χ. →

Το κανονικό 5-γωνο

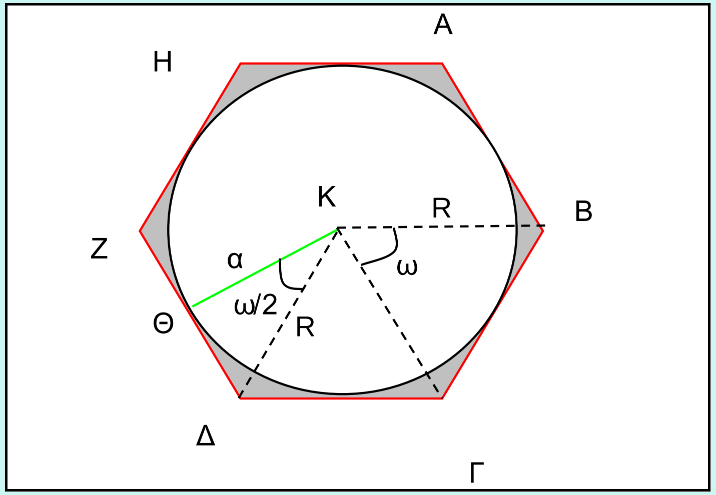


Το κανονικό 6-γωνο

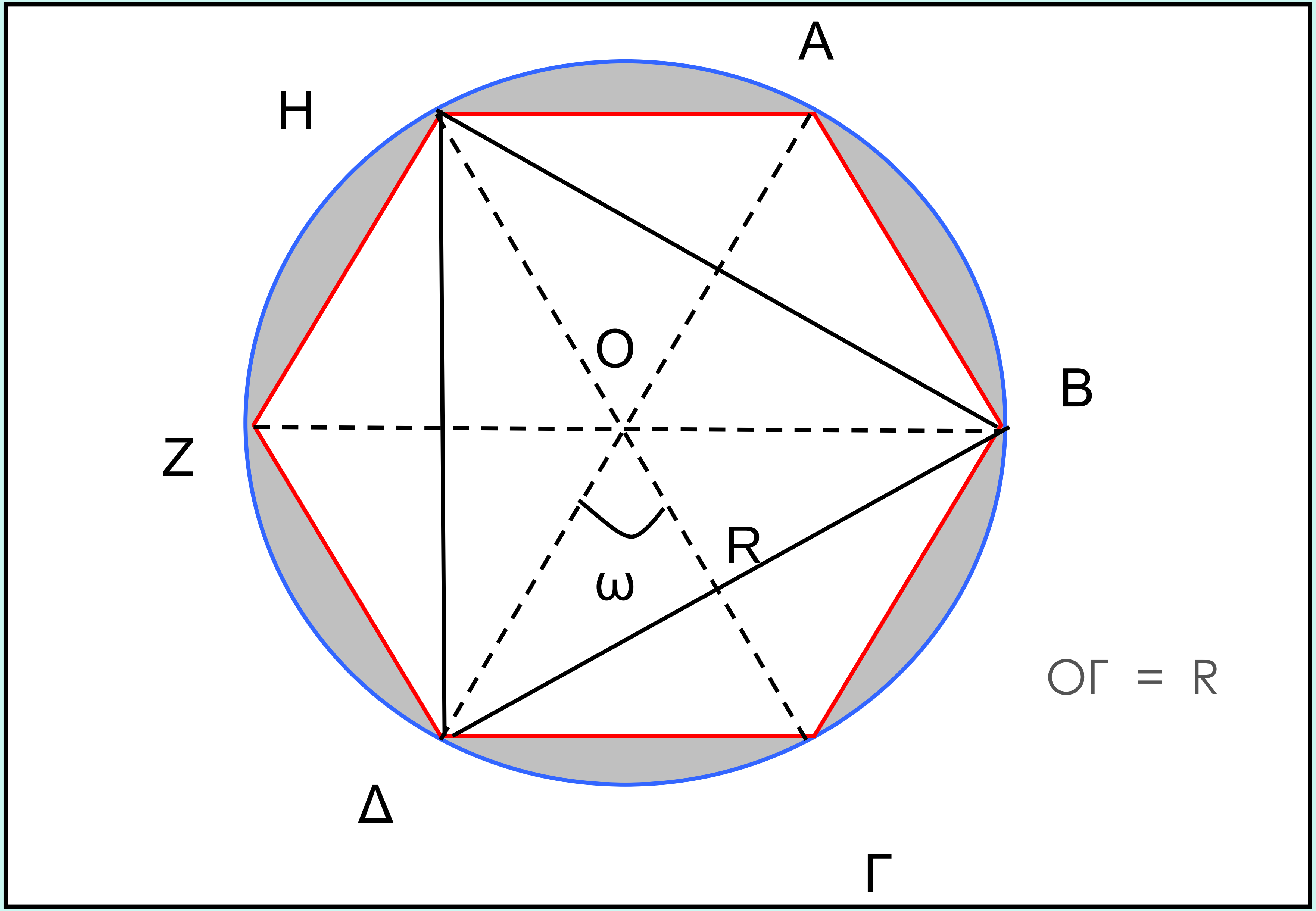
Το σπίτι της μέλισσας →

Η νιφάδα του χιονιού στο μικροσκόπιο →

Το κανονικό 6-γωνο

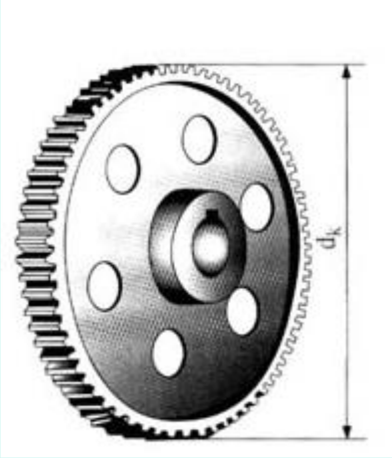


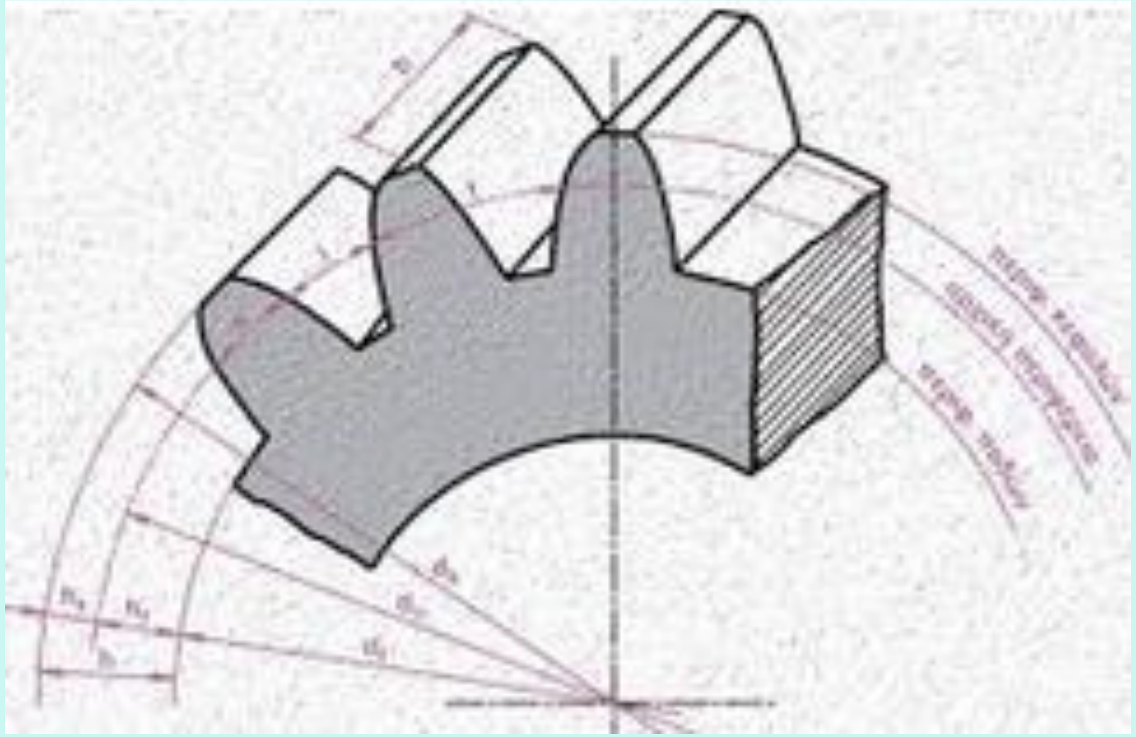
α = απόστημα



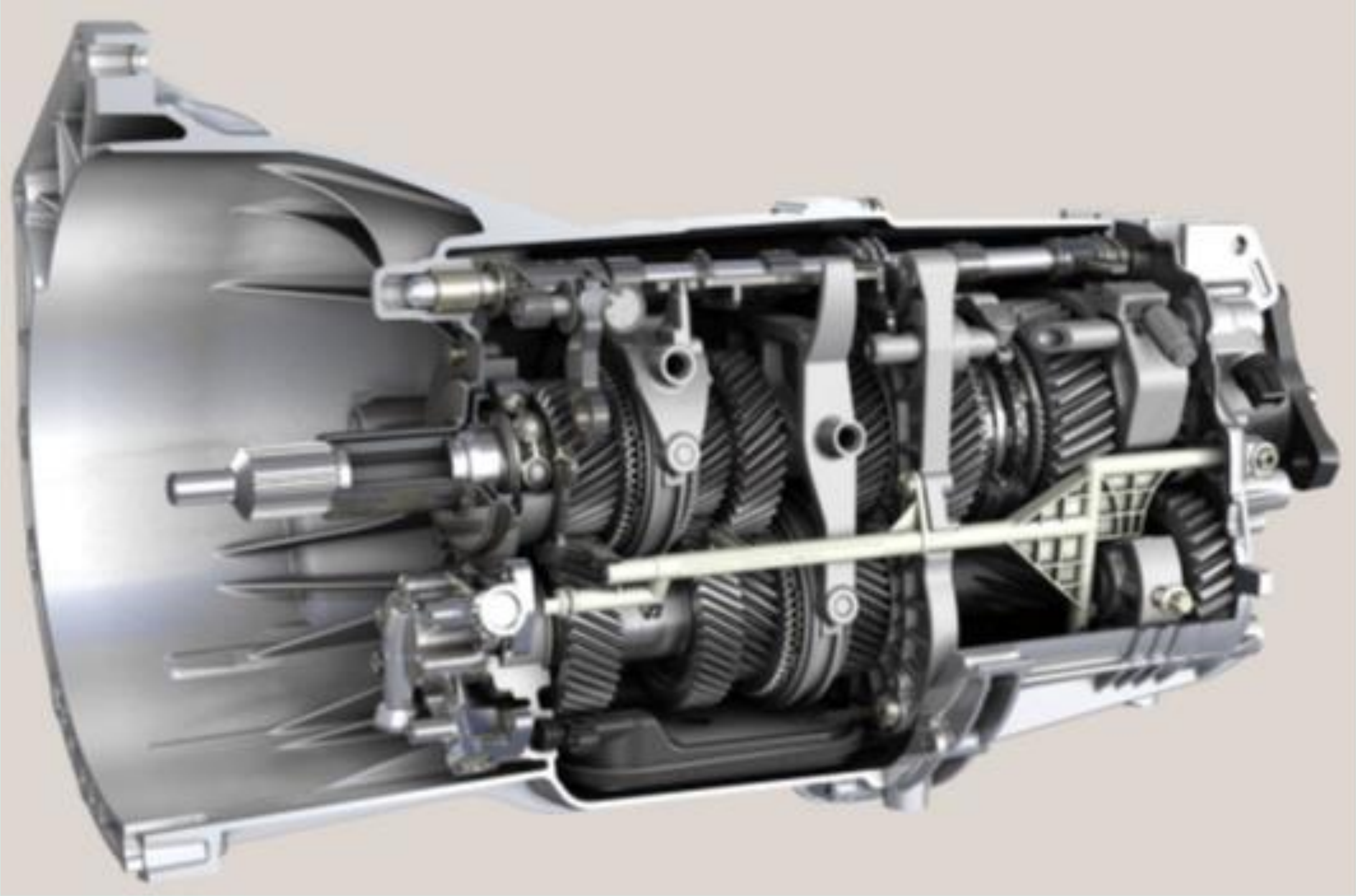
ω = 60 μοίρες → το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισόπλευρο

Το κανονικό πολύγωνο στις μηχανές

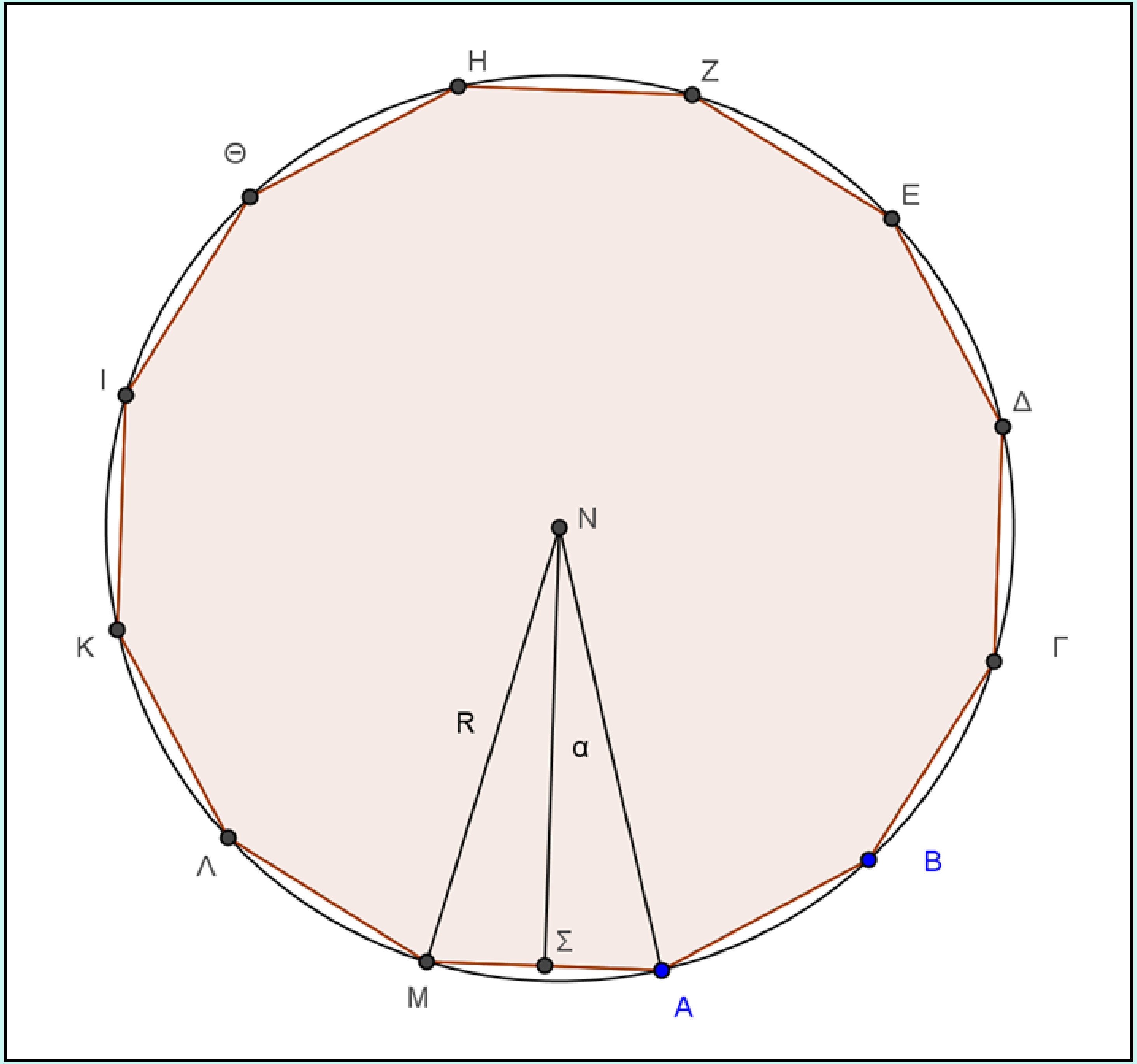




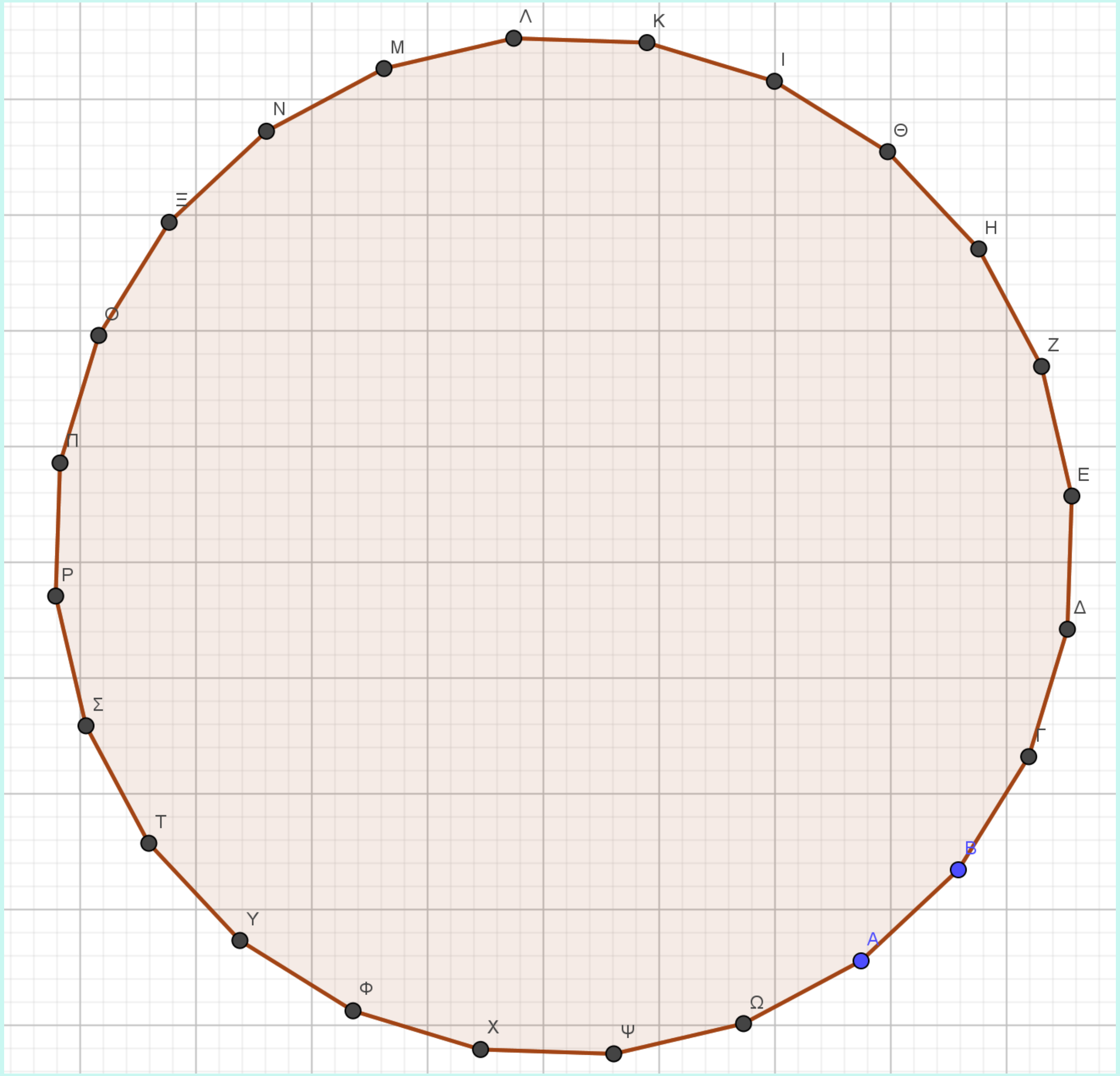
Το κανονικό πολύγωνο στο κιβώτιο ταχυτήτων



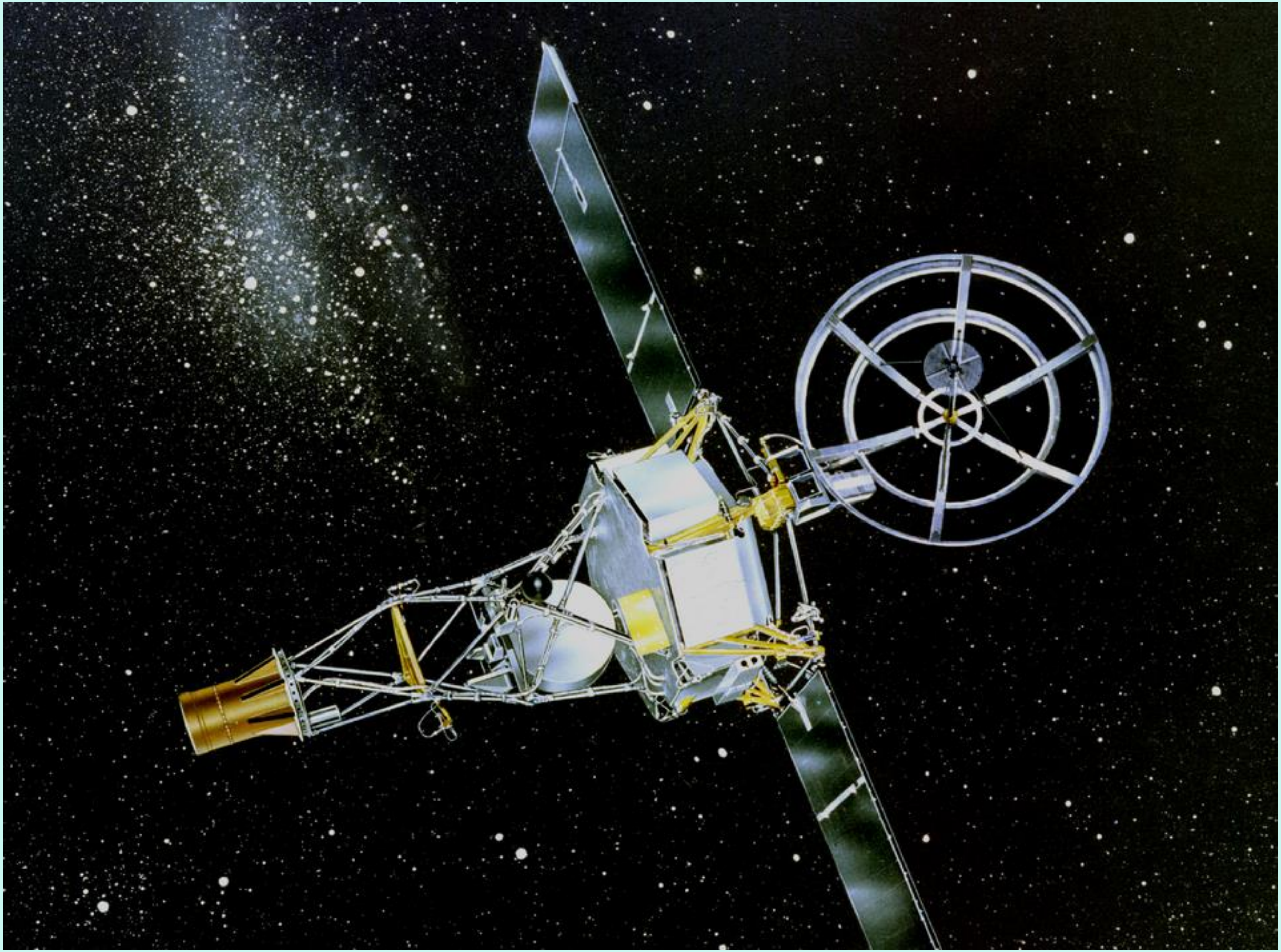
Το κανονικό 12-γωνο



Το κανονικό 24-γωνο



Τα διαστημικά σκάφη τύπου Μάρινερ έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό τους ένα σκάφος με την μορφή οκταγώνου, το οποίο στεγάζει όλο τον ηλεκτρονικό εξοπλισμό και χρησιμεύει ως σύνδεσμος για όλα τα εξωτερικά εξαρτήματα, όπως οι κεραίες, οι φωτογραφικές μηχανές, το σύστημα προώθησης και το ηλεκτροδοτικό σύστημα ενέργειας.



Όταν γνωρίζω την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου,
πως βρίσκω την πλευρά λ και το απόστημα α
στο ισόπλευρο τρίγωνο,
στο τετράγωνο και
στο κανονικό εξάγωνο ;

ΑΠ:

Στο ισόπλευρο τρίγωνο | *Στο τετράγωνο* | *Στο κανονικό εξάγωνο*

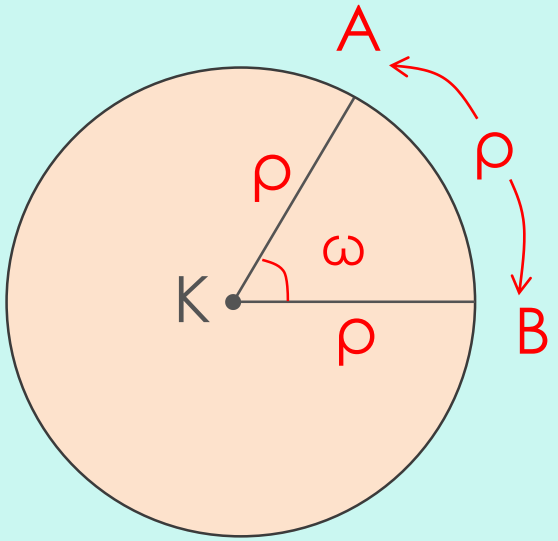
ν	3	4	6
λ_ν	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
α_ν	$\frac{R}{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$

Τι είναι το ακτίνιο:

Το ακτίνιο είναι μία άλλη μονάδα μέτρησης των γωνιών, εκτός από την μοίρα.

Ορίζεται ως το τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου.

Η επίκεντρη γωνία ω του κύκλου που έχει αντίστοιχο τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου, είναι γωνία ίση με 1 ακτίνιο (1 rad).



Γράφω: ω = 1 ακτίνιο = 1 rad.

Το ακτίνιο είναι « μήκος ».
Είναι το μήκος του τόξου
ΑΒ = ρ = ακτίνα.

Δίδεται η γωνία $\omega = \pi/6$.
Σε τι μονάδες είναι έτσι όπως δίδεται η γωνία ω, σε μοίρες ή σε ακτίνια ;

ΑΠ:

Εφόσον υπάρχει το π και δεν αναφέρονται οι μονάδες μέτρησης της γωνίας, η γωνία ω είναι σε ακτίνια.

Τι σχέση έχει το ακτίνιο με την μοίρα;

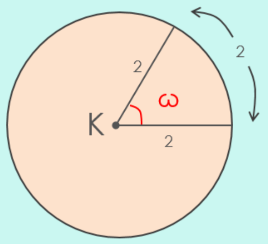
ΑΠ:

1 ακτίνιο είναι ίσο με 57,2958 μοίρες περίπου

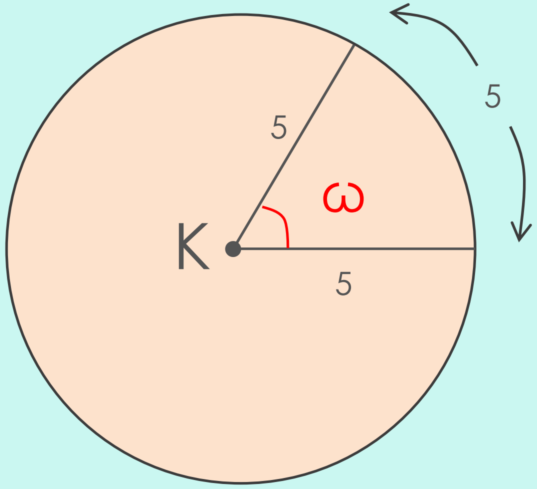
$$1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.2958^\circ$$

Πως « βλέπω » ότι 1 ακτίνιο είναι ίσο με 57, 2958… μοίρες;

Κάνω ένα κύκλο με κέντρο ένα σημείο Κ και τυχαία ακτίνα ρ, π.χ. ρ = 2 μέτρα.
Με την βοήθεια σχοινιού παίρνω πάνω στην περιφέρεια, τόξο με μήκος 2 μέτρα, ίσο δηλαδή με την ακτίνα του κύκλου.
Φέρω από το Κ τις ακτίνες στις άκρες αυτού του τόξου, οπότε σχηματίζω την γωνία ω.
Η γωνία ω είναι γωνία ίση με 1 ακτίνιο, διότι αντιστοιχεί σε τόξο με μήκος ρ = 2 = ακτίνα.
Τοποθετώ το μοιρογνωμόνιο και μετρώ την γωνία ω σε μοίρες.
« Παρατηρώ » ότι γωνία ω = 57,2958…μοίρες.



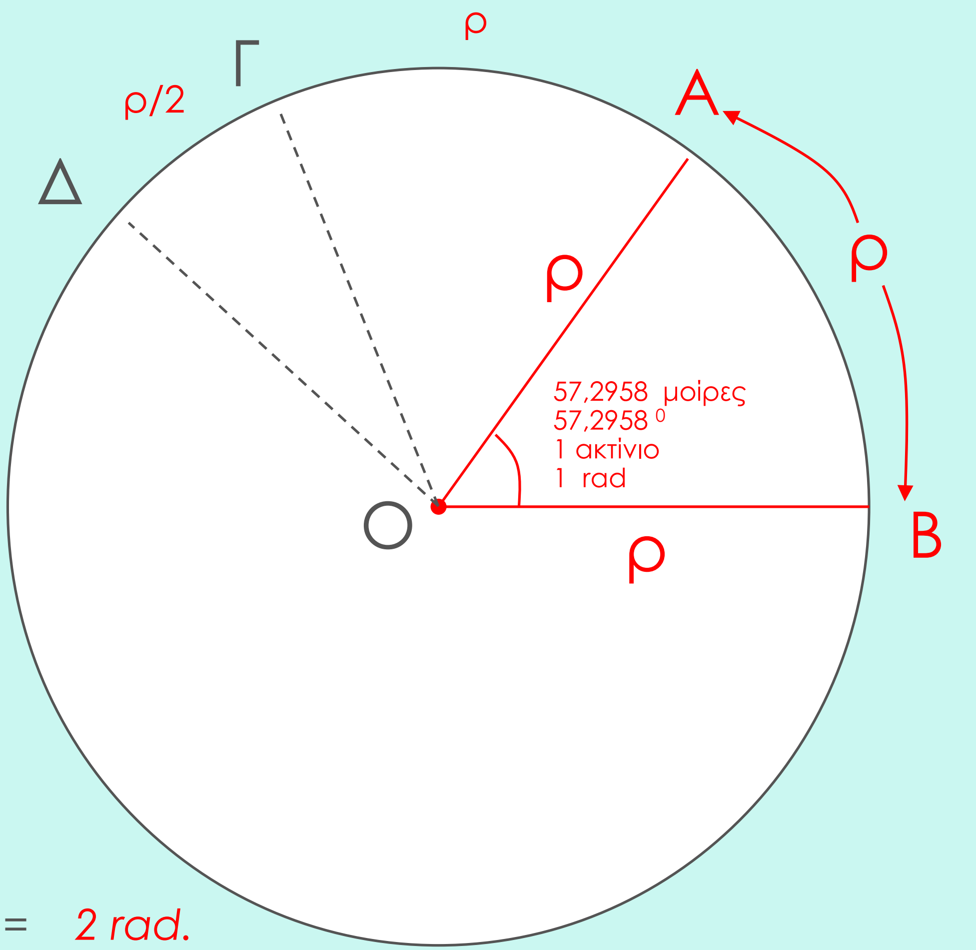
Κάνω ένα άλλο κύκλο με κέντρο ένα σημείο Κ και τυχαία ακτίνα ρ, π.χ. ρ = 5 μέτρα.
Με την βοήθεια σχοινιού παίρνω πάνω στην περιφέρεια, τόξο με μήκος 5 μέτρα, ίσο δηλαδή με την ακτίνα του κύκλου.
Φέρω από το Κ τις ακτίνες στις άκρες αυτού του τόξου, οπότε σχηματίζω την γωνία ω.
Η γωνία ω είναι γωνία ίση με 1 ακτίνιο, διότι αντιστοιχεί σε τόξο με μήκος ρ = 5 = ακτίνα.
Τοποθετώ το μοιρογνωμόνιο και μετρώ την γωνία ω σε μοίρες.
« Παρατηρώ » ότι γωνία ω = 57,2958…μοίρες.



ω = 1 ακτίνιο = 1 rad.

ω = 57,2958….μοίρες.

Στο διπλανό σχήμα
έχω έναν κύκλο με
κέντρο το Ο και
ακτίνα τυχαία ρ.
Η γωνία ΒΟΑ
που είναι ίση
με 57,2958 μοίρες, είναι
επίσης ίση
με 1 ακτίνιο, με 1 rad.



Γράφω:
γωνία ΒΟΑ = 57,2958 ^{0} = 1 ακτίνιο = 1 rad.

Στον ίδιο κύκλο παίρνω τόξο ΓΑ = τόξο ΑΒ = ρ. (Το κάνω με ένα σχοινί ή με τον διαβήτη παίρνω χορδή ΓΑ = χορδή ΑΒ).

Τότε η γωνία ΒΟΓ = 2(γωνία ΒΟΑ) = 2.(57,2958 μοίρες) = 2.(1 rad) = 2 rad.

Παίρνω τόξο ΓΔ = (τόξο ΑΒ)/2 = ρ/2.
Τότε η γωνία ΒΟΔ = γωνία ΒΟΑ + γωνία ΑΟΓ + γωνία ΓΟΔ =
= 57,2958 μοίρες + 57,2958 μοίρες + (57,2958/2) μοίρες =
= 1 rad + 1 rad + 0,5 rad = 2,5 rad.

Δίδεται η γωνία $ω = π/6$.
Να γίνει σε μοίρες.

ΑΠ:

Εφόσον υπάρχει το π και δεν αναφέρονται οι μονάδες μέτρησης της γωνίας, η γωνία ω είναι σε ακτίνια.

Για να την κάνω μοίρες, αρκεί να αντικαταστήσω το π όχι με το 3,14….. , αλλά με το 180.

$ω = π/6$ ακτίνια $= 180 / 6$ μοίρες $=$ 30 μοίρες

Με ποιο τύπο, μετατρέπω τις μοίρες (μ) σε ακτίνια (α) και τα ακτίνια (α) σε μοίρες (μ);

ΑΠ:

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

$\pi = 3,14......$

μ = μοίρες

α = ακτίνια

Παραδείγματα:

Δίδεται γωνία μ= 30 μοιρών. Να μετατραπεί σε ακτίνια α.

ΑΠ: $\mu/180 = \alpha/\pi \Leftrightarrow 30/180 = \alpha/\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 180.\alpha = 30.\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = (30\pi)/180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = \pi/6$ ακτίνια =
= { $\pi = 3,14$ περίπου } =
= $3,14/6 = 0,523$ ακτίνια περίπου

Δίδεται γωνία α = 0,523 ακτίνια. Να μετατραπεί σε μοίρες μ.

ΑΠ: $\mu/180 = \alpha/\pi \Leftrightarrow \mu/180 = 0,523/\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 180.0,523 = \mu.\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu = (180.0,523)/\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu = 94,14/\pi =$ { $\pi = 3,14$ περίπου} =
= $94,14/3,14$ = 30 μοίρες περίπου

Δίδεται γωνία μ = 60 μοιρών. Να μετατραπεί σε ακτίνια α.

ΑΠ: $\mu/180 = \alpha/\pi \Leftrightarrow 60/180 = \alpha/\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 180.\alpha = 60.\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = (60\pi)/180 = \pi/3$ ακτίνια

Δίδεται γωνία $\alpha = \pi/3$ σε ακτίνια. Να μετατραπεί σε μοίρες μ.

ΑΠ: Θέτω όπου π όχι το 3,14…. αλλά το 180, οπότε είναι:
$\pi/3 = 180/3 = 60$ μοίρες.
Αλλιώς αντικαθιστώ στον τύπο αριστερά $\mu / 180 = \alpha / \pi$, όπου
α το $\pi/3$ και λύνω ως προς μ $\rightarrow$ $\mu = 60$ μοίρες.

Δίδεται γωνία π / 4 ακτίνια.
Α1) Να γίνει σε μοίρες.
Α2) Με πόσα ακτίνια είναι ίσες οι γωνίες των 90, 180, 360 μοιρών ;

ΑΠ:

Α1)

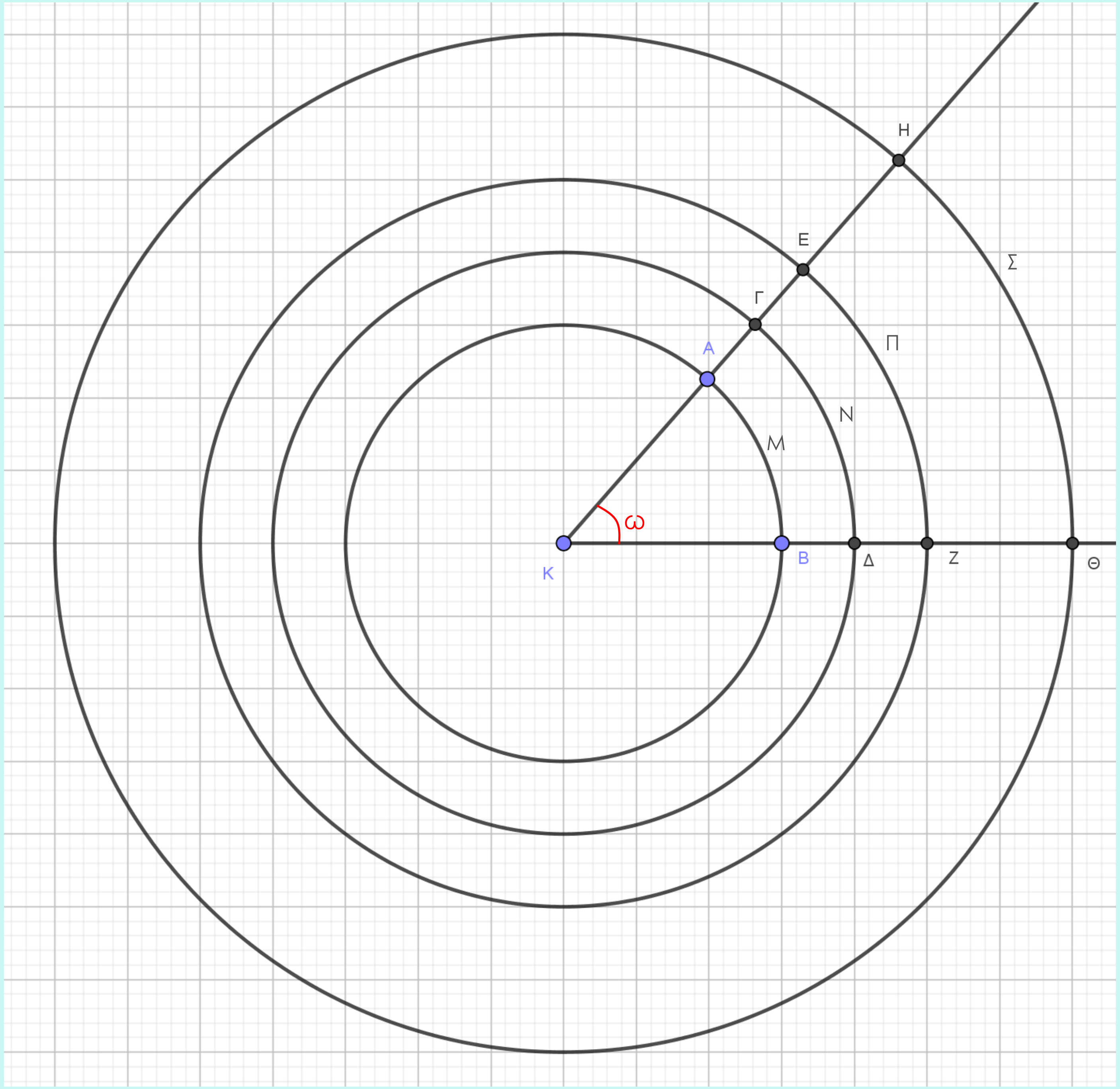
1ος τρόπος: *Από τον τύπο μ / 180 = α / π, θέτω α = π/4, οπότε*
μ / 180 = (π/4) / π = π/(4π) = 1 / 4 → μ = 180 / 4 = 45 μοίρες.

2ος τρόπος: *Θέτω όπου π όχι το 3,14…., αλλά το 180, οπότε*
π / 4 = 180 / 4 = 45 μοίρες.

Α2)
180 μοίρες = π ακτίνια → αντιστοιχεί σε μήκος ημικύκλιου (μισού κύκλου).
360 μοίρες = 2π ακτίνια → αντιστοιχεί σε μήκος ολόκληρου κύκλου.
90 μοίρες = π / 2 ακτίνια → αντιστοιχεί σε μήκος μισού ημικύκλιου.

Μήκος τόξου και γωνία.

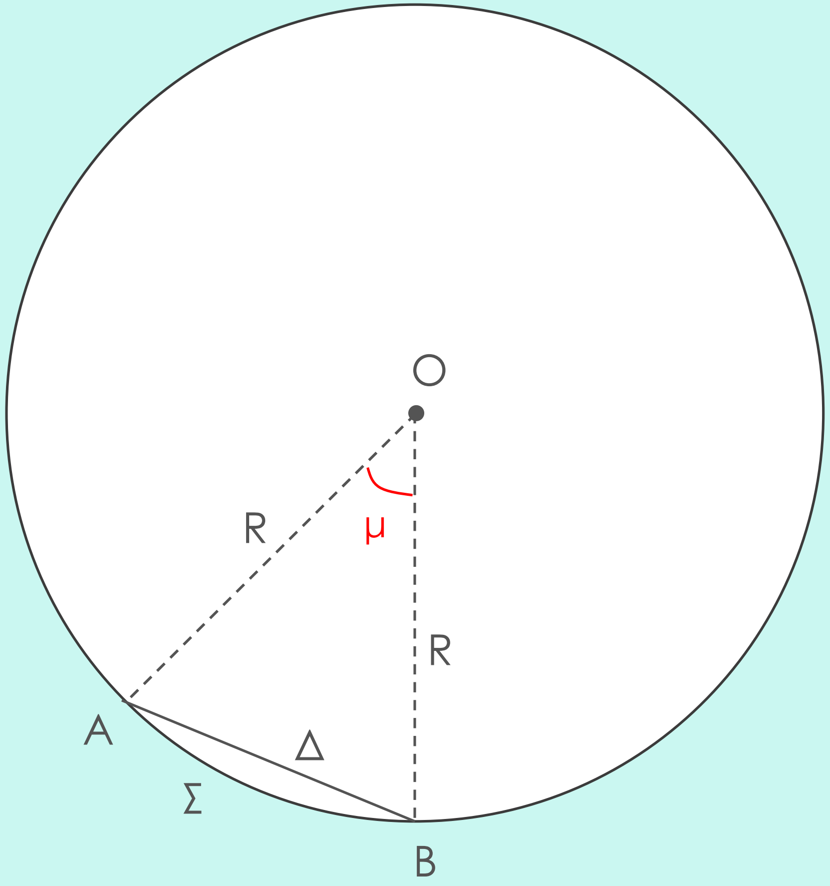
Στο διπλανό σχήμα τα τόξα ΑΜΒ , ΓΝΔ , ΕΠΖ , ΗΣΘ είναι όλα ίσα με την γωνία ω σε μοίρες ή ακτίνια, αλλά το μήκος τους σε μονάδες μήκους είναι διαφορετικό.
Μικρότερο μήκος έχει το τόξο ΑΜΒ και μεγαλύτερο μήκος έχει το τόξο ΗΣΘ.



Τι ισχύει σε κύκλο:

- Μήκος κύκλου = L = 2πR , σε μονάδες μήκους
- Εμβαδόν κύκλου = πR^2 , σε μονάδες εμβαδού
- Μήκος τόξου ΑΣΒ = $\dfrac{\pi R \mu}{180} = \alpha R$, σε μονάδες μήκους
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα ΟΑΣΒΟ = $\dfrac{\pi R^2 \mu}{360} = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$

  (σε μονάδες εμβαδού)



- Εμβαδόν κυκλικού τμήματος τμήματος ΑΣΒΔΑ = Εμβαδόν κυκλικού τομέα ΟΑΣΒΟ - Εμβαδόν τριγώνου ΟΑΒ

  (σε μονάδες εμβαδού)

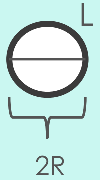
- μ = γωνία ΑΟΒ σε μοίρες = τόξο ΑΣΒ σε μοίρες.

  α = γωνία ΑΟΒ σε ακτίνια = τόξο ΑΣΒ σε ακτίνια.

Τι είναι το π = 3,14……

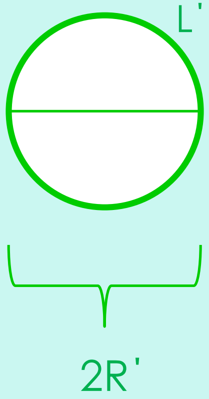
ΑΠ:

*π = 3,14….. = Διεθνής ορισμός προς τιμή των αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών, από το πρώτο γράμμα της Ελληνικής λέξης **π**εριφέρεια.*



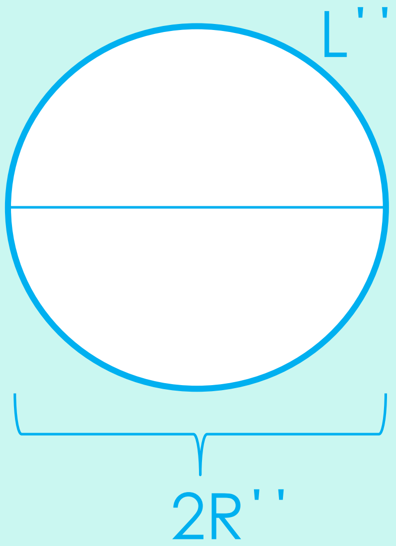
→ L/2R = π

Είναι ο λόγος του μήκους L ενός τυχαίου κύκλου, προς την διάμετρο του 2R.

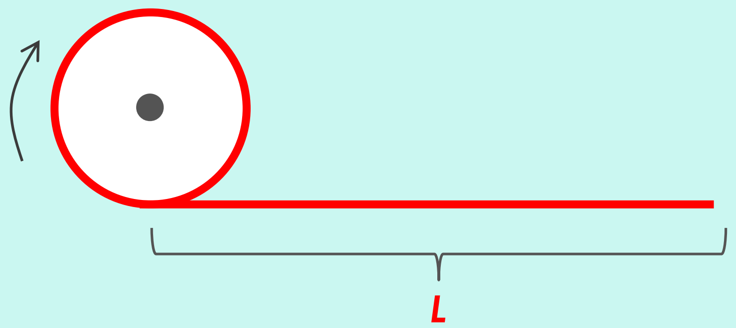


→ L' / 2R' = π

$$\pi = \frac{L}{2R} = \text{σταθερός} = 3{,}14\ldots..$$

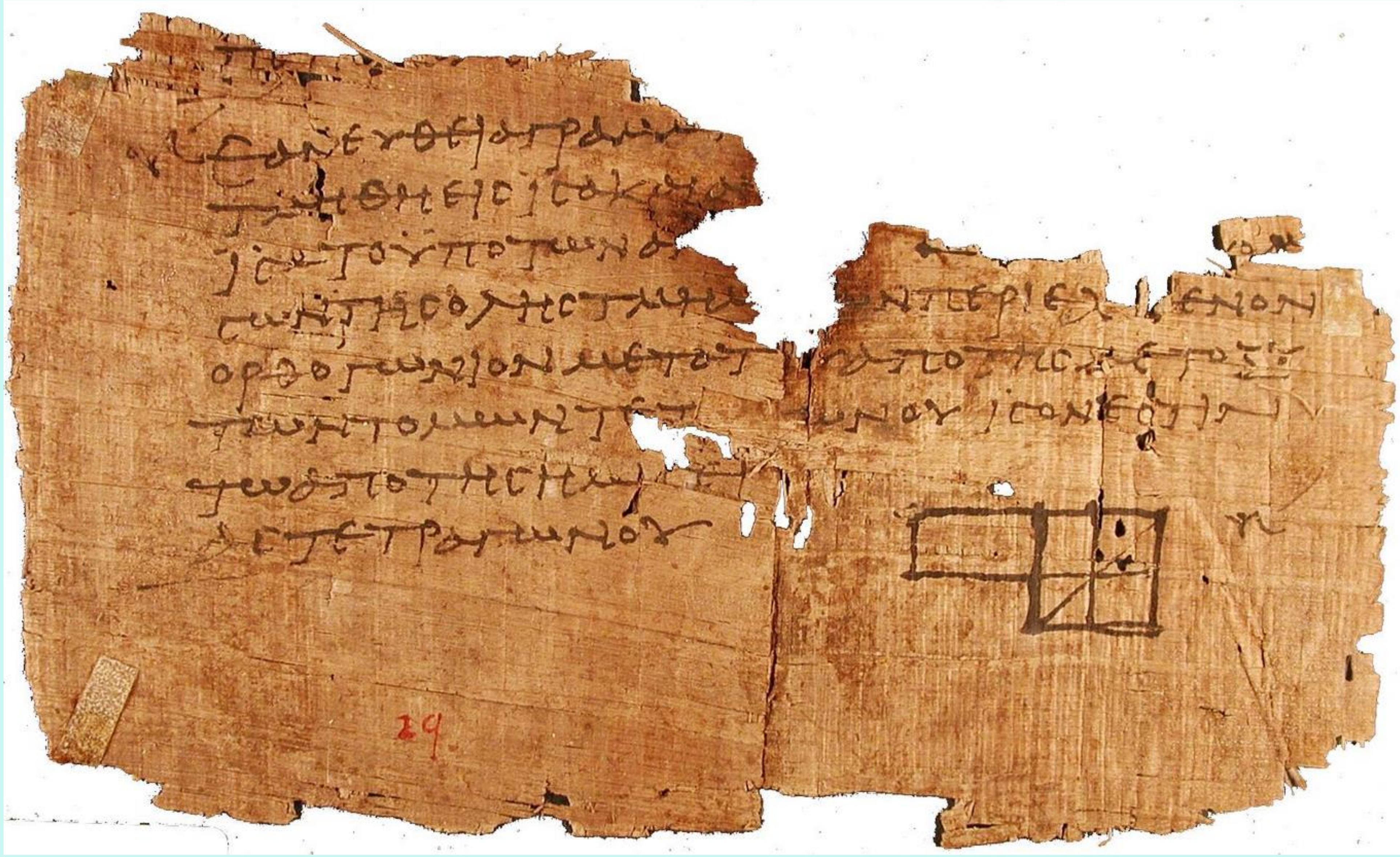


→ L'' / 2R'' = π



*Καθώς γυρνά ο τροχός στο έδαφος, το μήκος **L** του κύκλου (περιφέρεια) « χαράζετε » πάνω στην άμμο. Άρα μπορεί να μετρηθεί με μονάδες μήκους όπως και η διάμετρος.*

Απόσπασμα
από τα
Στοιχεία του Ευκλείδη



Κύβος

λ = ακμή

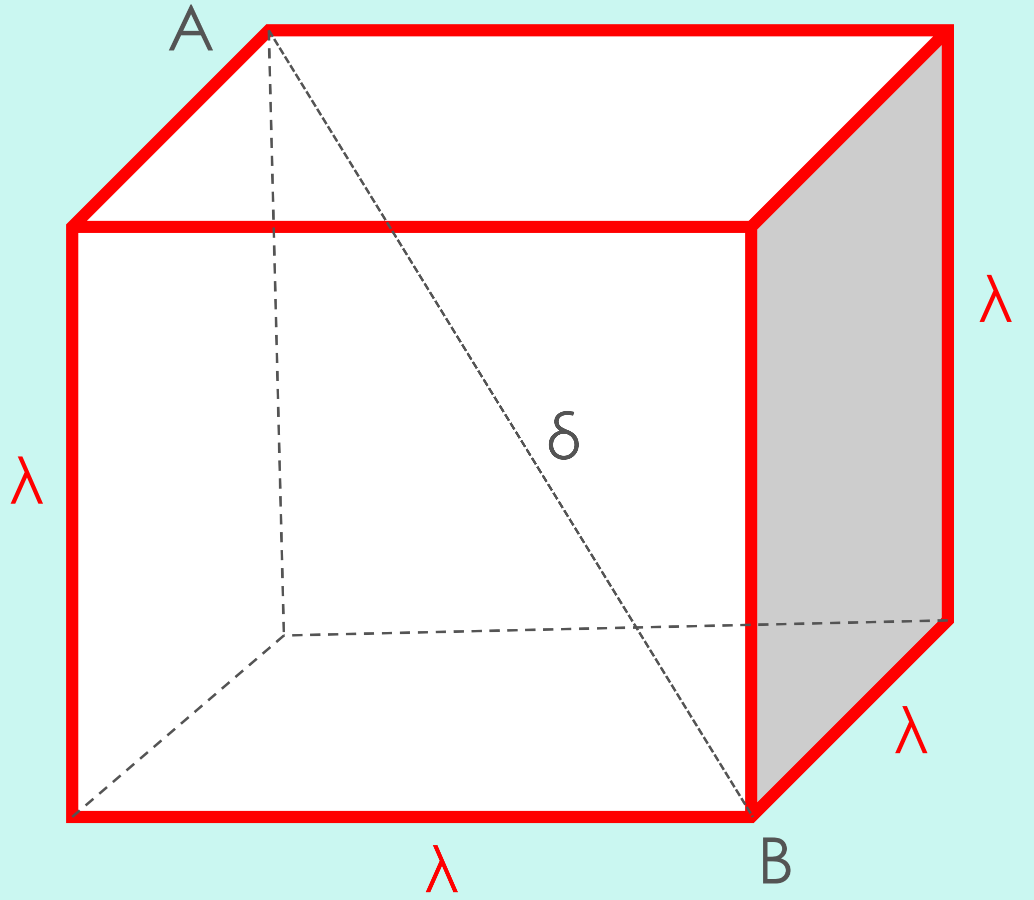
Εβ = εμβαδόν βάσης = λ^2

Επ = εμβαδόν παράπλευρης = $4\lambda^2$

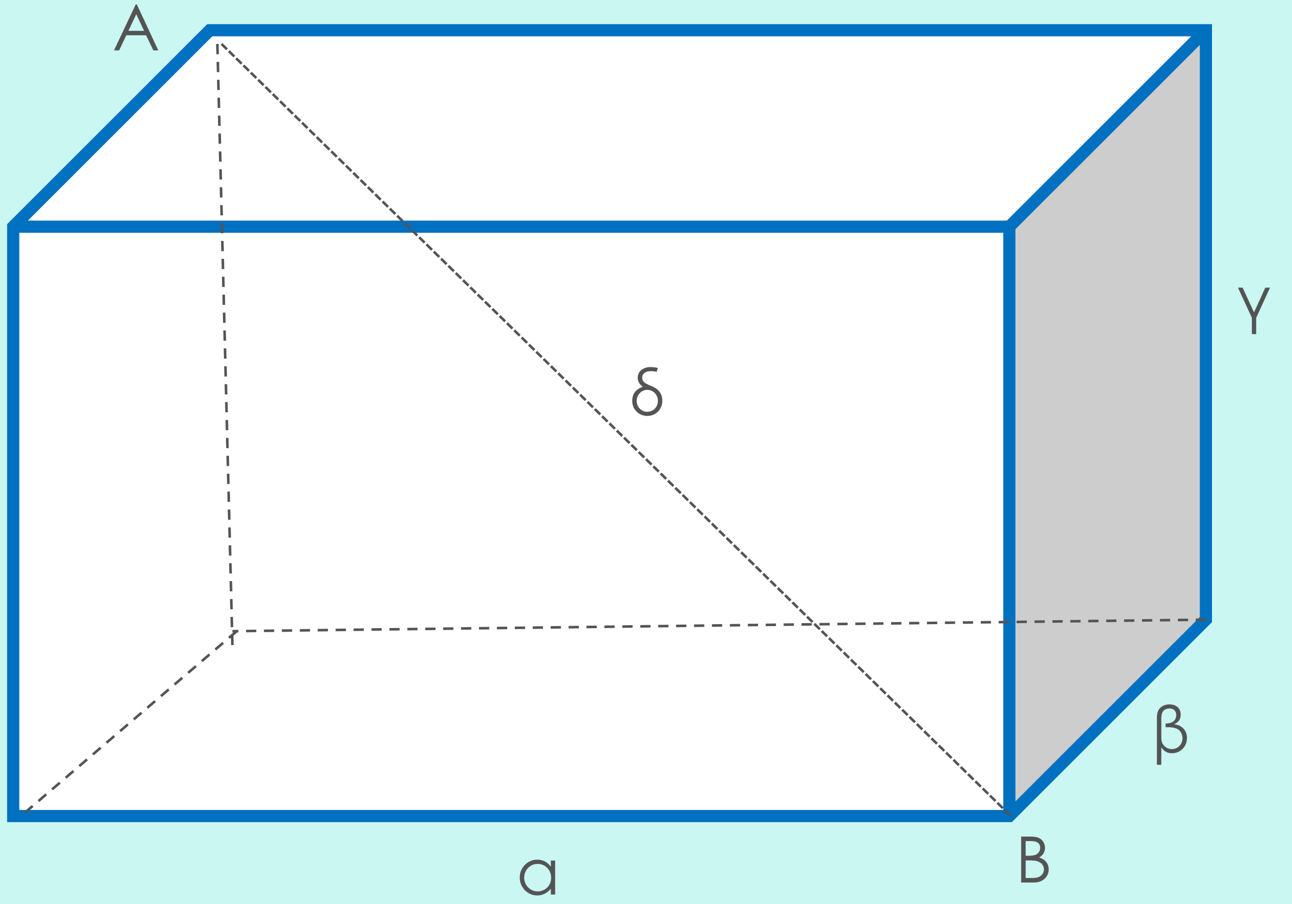
Εολ = εμβαδόν ολικό = $6\lambda^2$

V = όγκος = λ^3

$\delta^2 = AB^2 = 3\lambda^2$



Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο



Εβ = εμβαδόν βάσης = αβ

Επ = εμβαδόν παράπλευρης =
= 2βγ + 2αγ

Εολ = εμβαδόν ολικό =
= 2βγ + 2αγ + 2αβ

V = όγκος = αβγ

$\delta^2 = AB^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

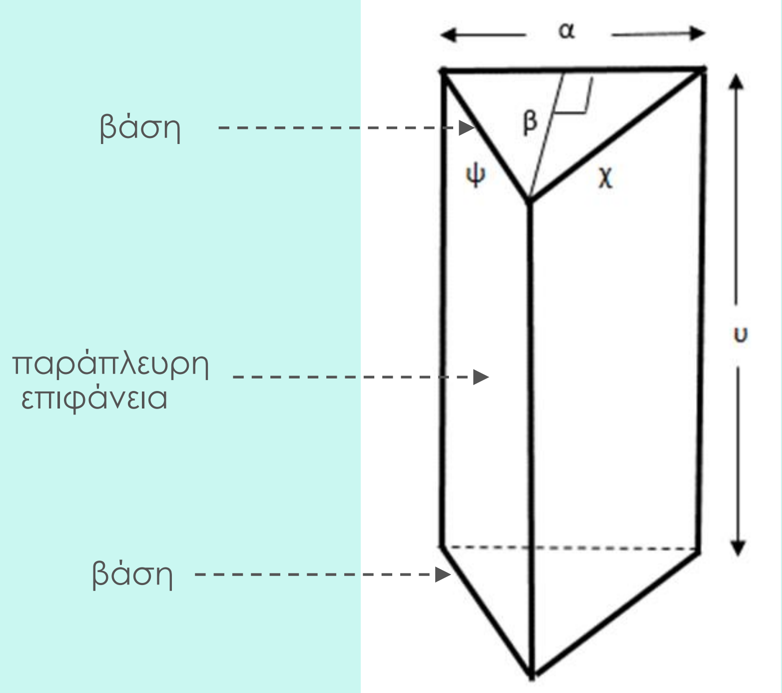
Ορθό πρίσμα με ίσες και παράλληλες βάσεις

E_β = εμβαδόν βάσης

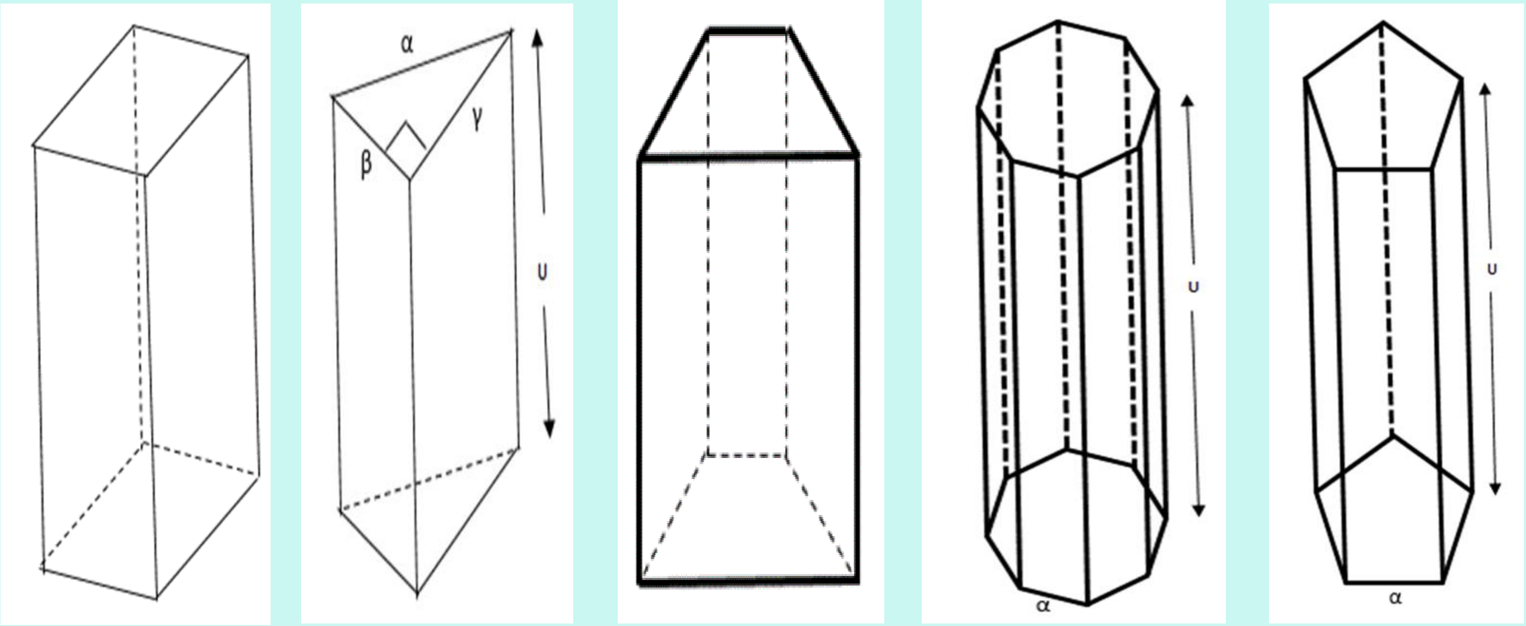
E_π = εμβαδόν παράπλευρης = (περίμετρος βάσης).υ

$E_{ο\lambda}$ = ολικό εμβαδόν = $2E_\beta + E_\pi$

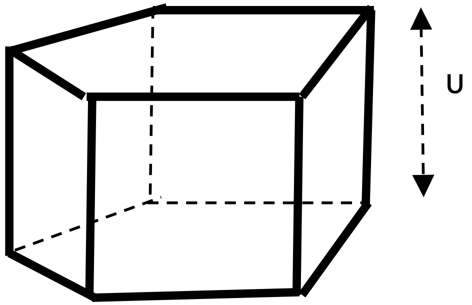
V = όγκος = E_β .υ



υ = ύψος πρίσματος



ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ ΜΕ ΒΑΣΕΙΣ ΤΥΧΑΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

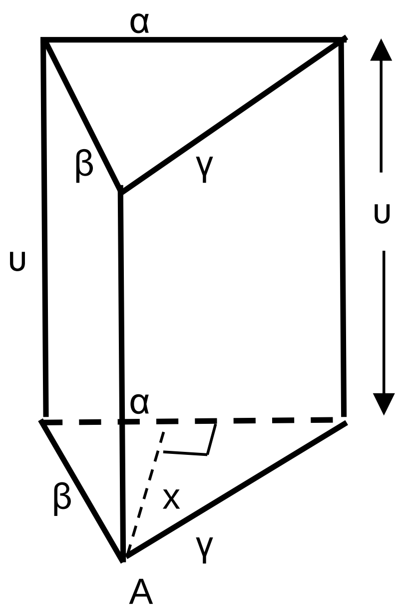


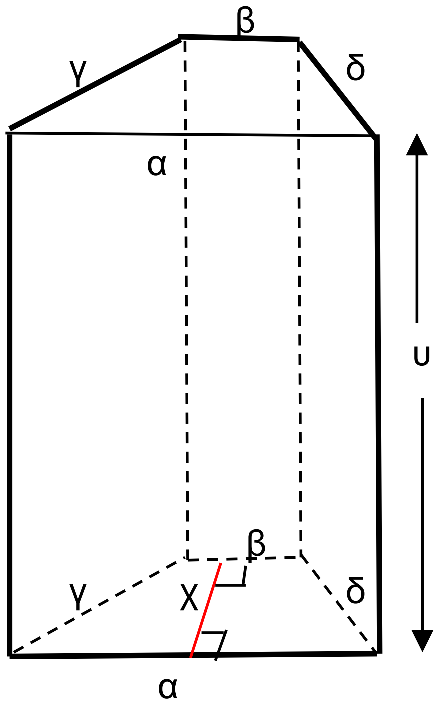
- Οι βάσεις είναι ίσα πολύγωνα.
- Οι βάσεις είναι παράλληλες μεταξύ τους.
- Η παράπλευρη επιφάνεια αποτελείται από ορθογώνια .

$V = E_\beta\, υ$, $Eπ = Πβ\, υ$,

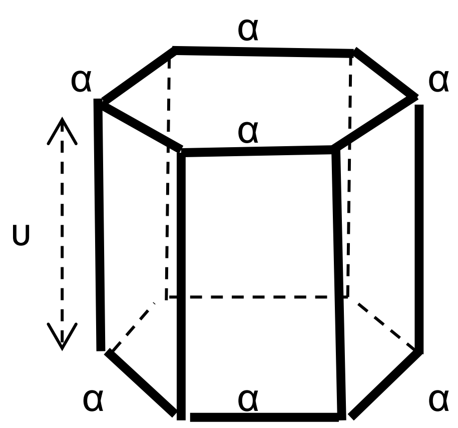
$Eολ = Eπ + 2Eβ$

$Π_\beta$ = περίμετρος βάσης





ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ (ΟΙ ΒΑΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ)

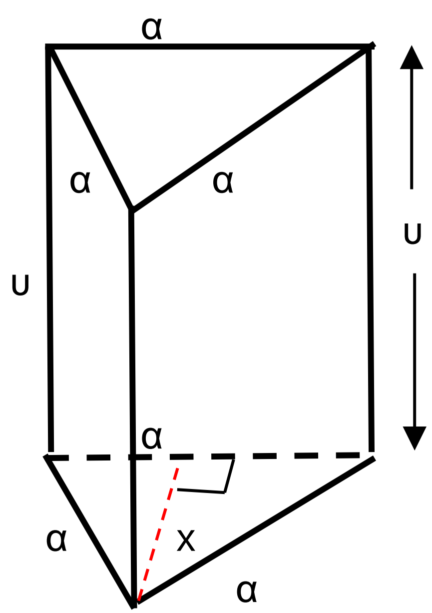


- Οι βάσεις είναι ίσα κανονικά πολύγωνα.
- Οι βάσεις είναι παράλληλες μεταξύ τους.
- Η παράπλευρη επιφάνεια αποτελείται από ορθογώνια .

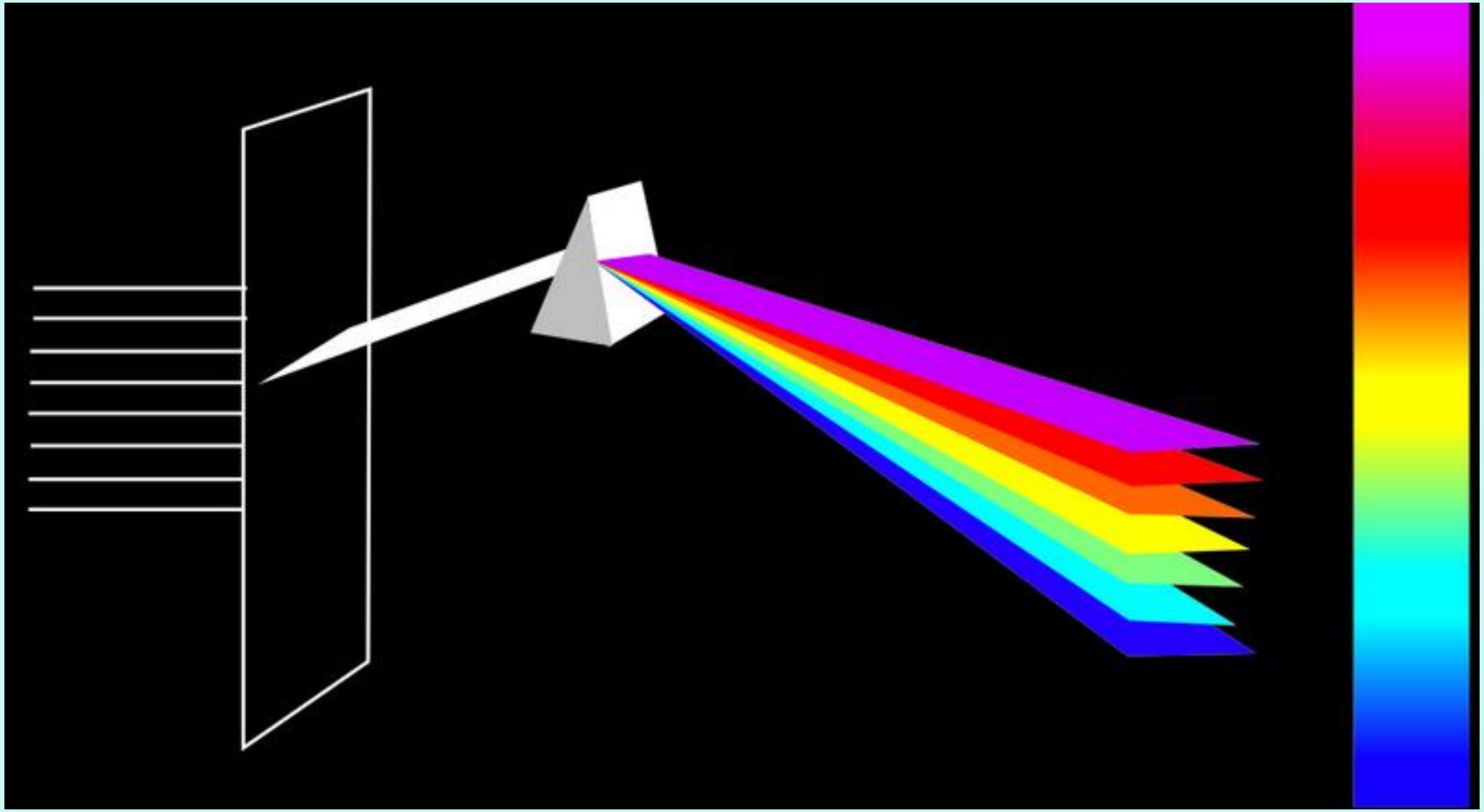
$V = E_\beta\, υ$, $E_\pi = \Pi_\beta\, υ$,

$E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta$

Π_β = περίμετρος βάσης



Η ανάλυση του φωτός με το τριγωνικό πρίσμα



ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

E_β = εμβαδόν βάσης = λ^2

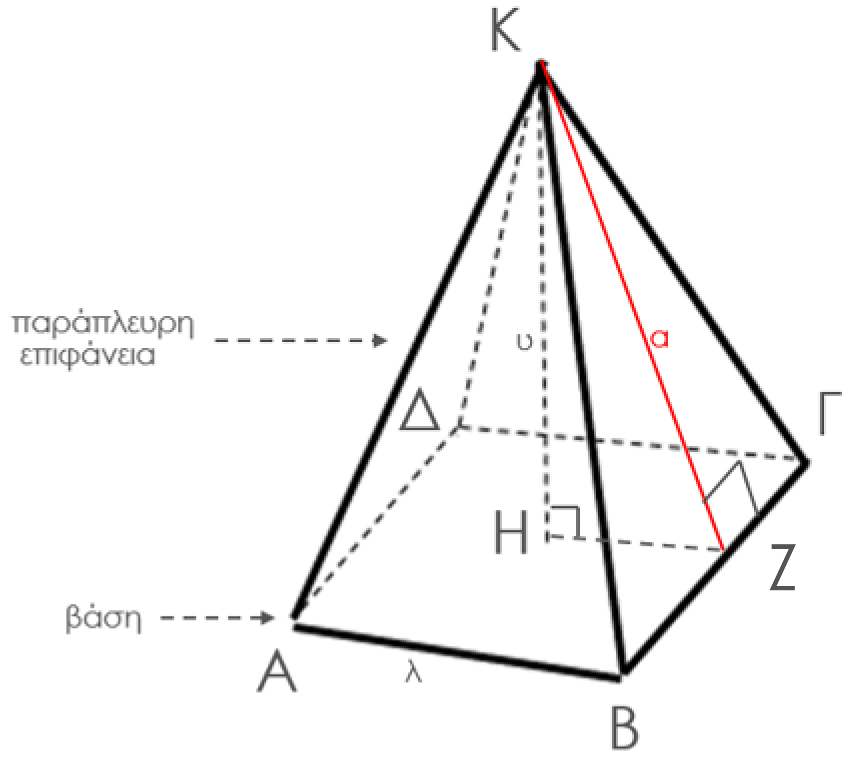
E_π = εμβαδόν παράπλευρης =
= [(περίμετρος βάσης).α]/2

$E_{o\lambda} = E_\beta + E_\pi$

V = όγκος = $(E_\beta \cdot \upsilon) / 3$

Το Ζ είναι το μέσο του ΒΓ

$HZ = \lambda / 2$

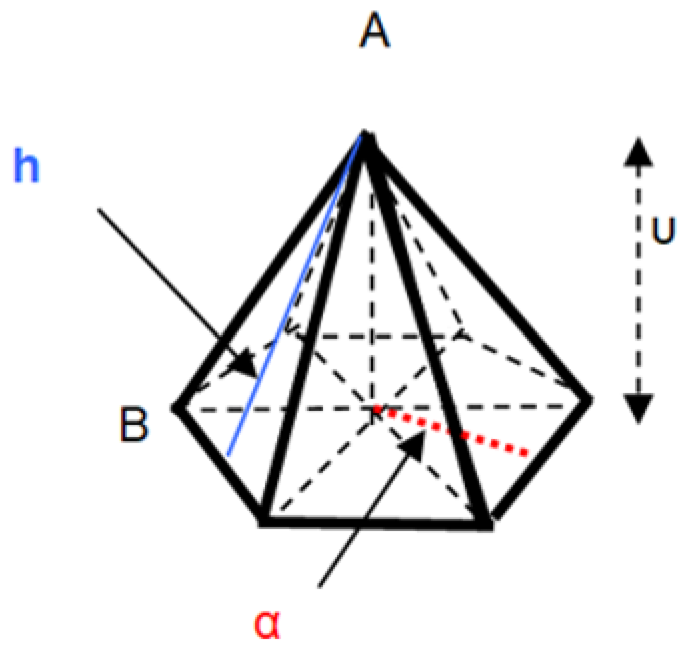


Βάση = τετράγωνο πλευράς λ.

Παράπλευρή επιφάνεια = επιφάνεια με 4 ίσα ισοσκελή τρίγωνα με ύψος α

λ = ΑΒ = πλευρά τετραγώνου βάσης.
υ = ΚΗ = ύψος πυραμίδας =
= απόσταση της κορυφής Κ από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου της βάσης ΑΒΓΔ
α = απόστημα πυραμίδας = ύψος ισοσκελούς τριγώνου ΚΒΓ
ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ = ΚΔ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ (ΕΧΕΙ ΒΑΣΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΚΑΙ Η ΚΟΡΥΦΗ ΤΗΣ Α , ΠΡΟΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ)



Επ = (Πβ . h) / 2

Εολ = Επ + Εβ

V = (Εβ.υ) / 3

Π_{β} = περίμετρος βάσης

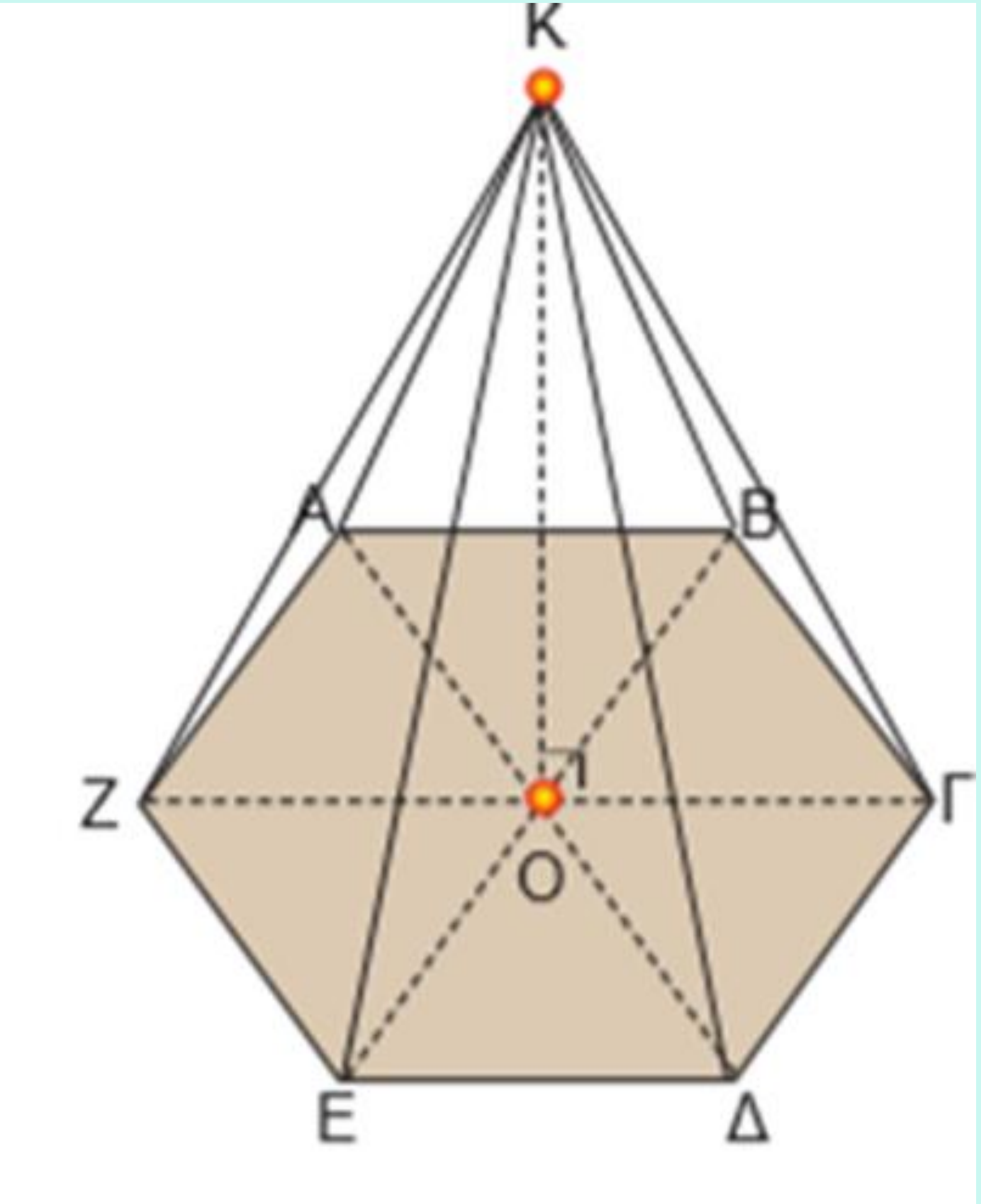
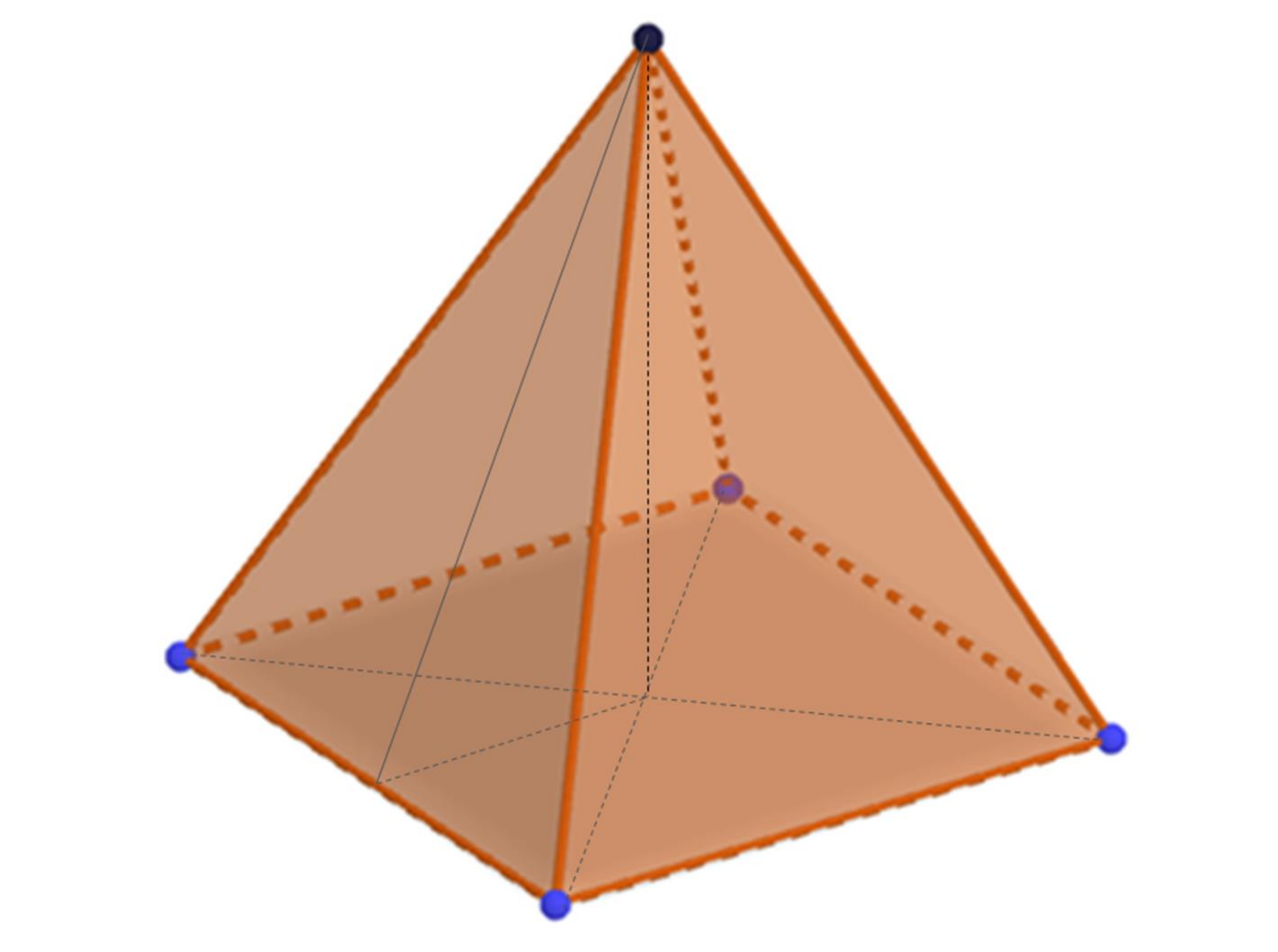
α = απόστημα βάσης (κανονικού πολυγώνου βάσης)

h = απόστημα πυραμίδας

υ = ύψος πυραμίδας

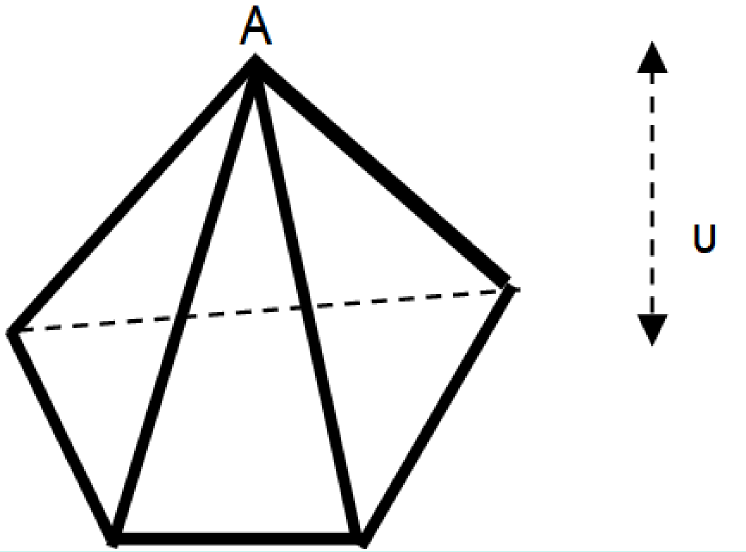
ΑΒ = ακμή

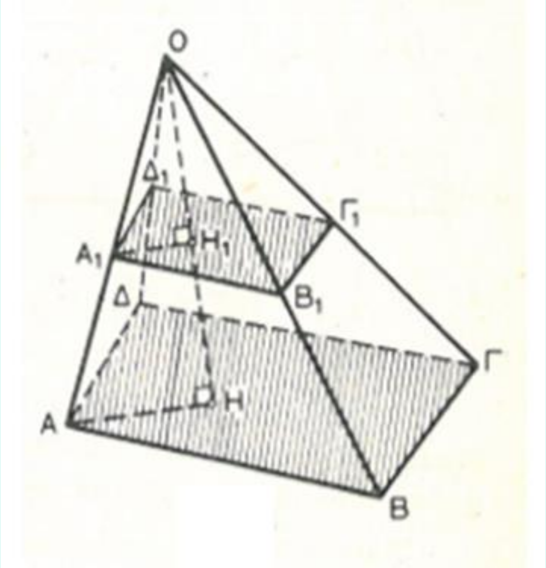
Η κορυφή Α της κανονικής πυραμίδας προβάλεται στο κέντρο της βάσης που είναι το κέντρο κανονικού πολυγώνου.

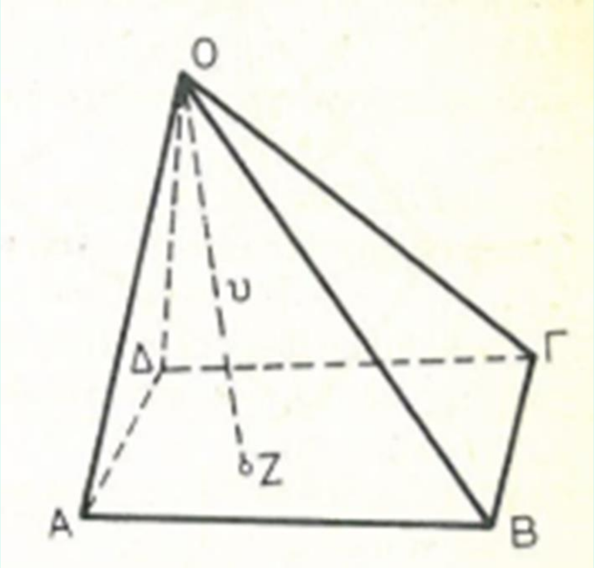

K
A
B
Z
Γ
O
E
Δ


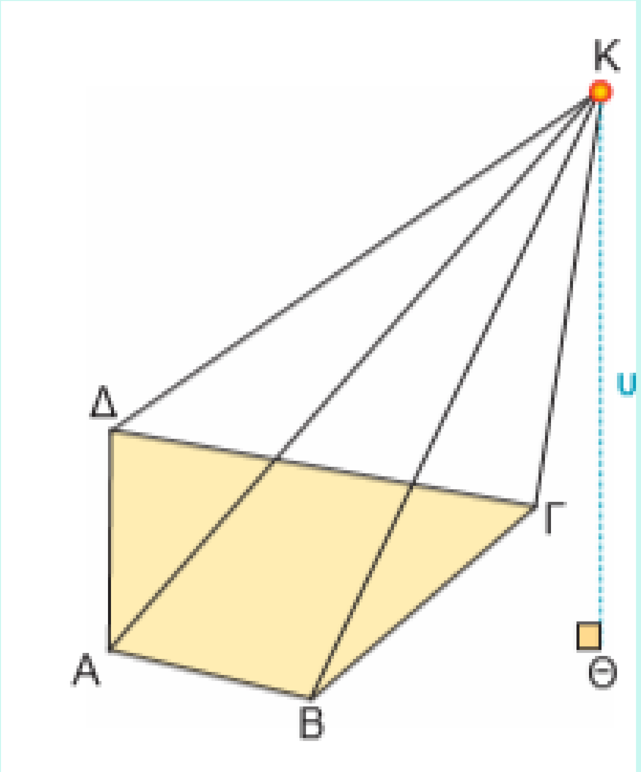
ΤΥΧΑΙΑ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

Εχει βάση τυχαίο πολύγωνο και παράπλευρη επιφάνεια που αποτελείται από τρίγωνα με κοινή κορυφή το Α.









Πυραμίδα με το ύψος της υ = ΚΘ, εκτός της βάσης της ΑΒΓΔ →

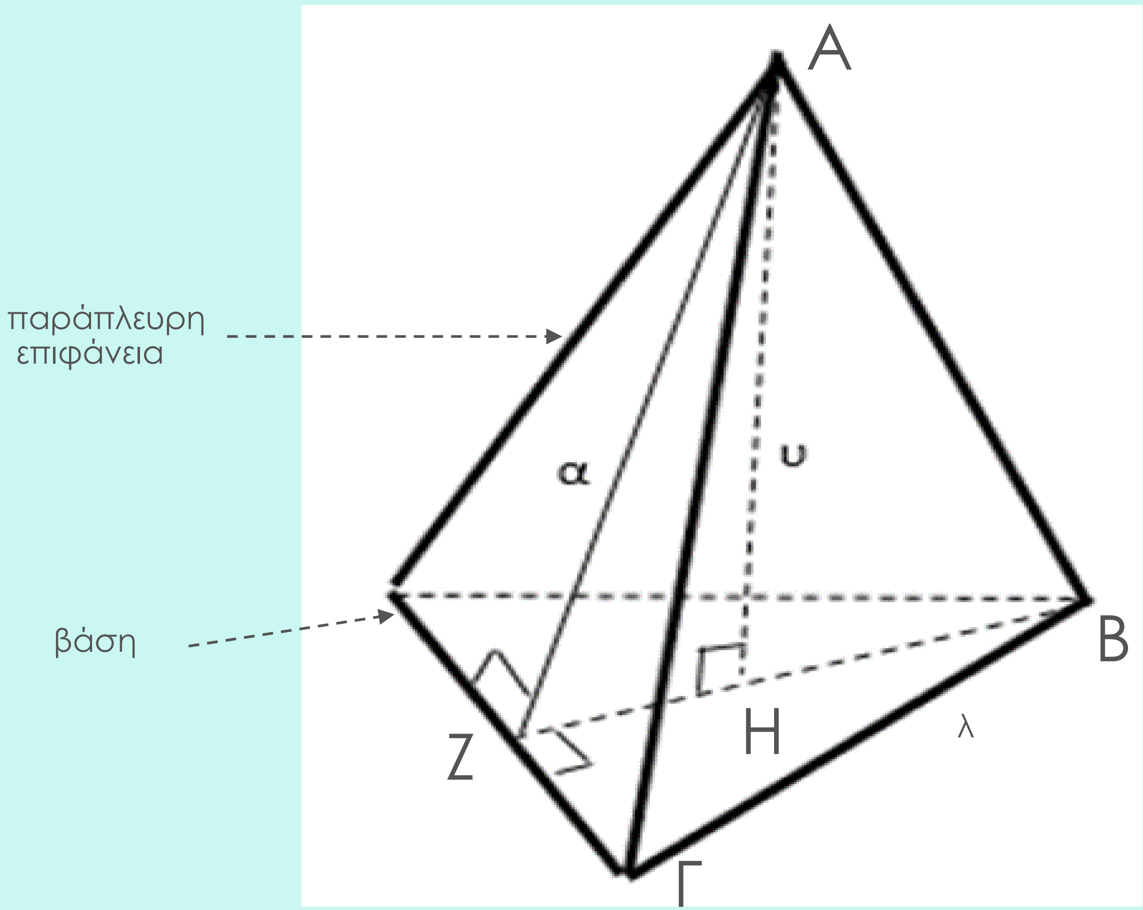
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ ΜΕ 4 ΙΣΟΠΛΕΥΡΑ ΤΡΙΓΩΝΑ (**ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ**)

E_β = εμβαδόν βάσης

E_π = εμβαδόν παράπλευρης =
= [(περίμετρος βάσης).α]/2

$E_{o\lambda} = E_\beta + E_\pi$

V = όγκος = $(E_\beta .\upsilon) / 3$



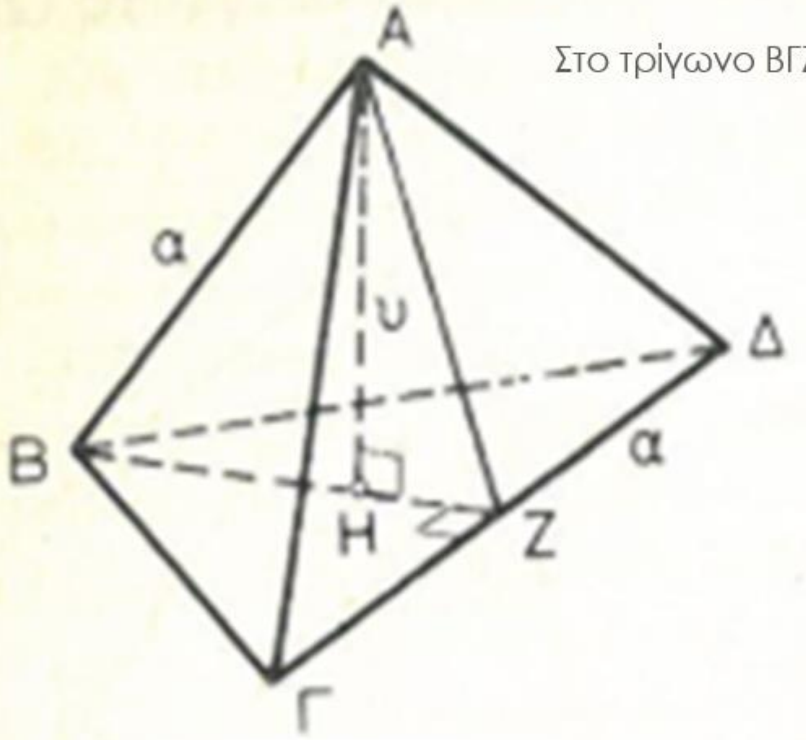
Η βάση και η παράπλευρη επιφάνεια αποτελούνται από ίσα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς λ.

Βάση = ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς λ.

Παράπλευρή επιφάνεια = επιφάνεια με 3 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς λ και με ύψος α

λ = ΒΓ = πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου βάσης.
υ = ΑΗ = ύψος πυραμίδας =
= απόσταση της κορυφής Α από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου της βάσης
α = ΑΖ = ΒΖ = απόστημα πυραμίδας.
Η = κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου βάσης = βαρύκεντρο (κέντρο βάρους) βάσης.

Το ύψος υ = ΑΗ κανονικού τετράεδρου πλευράς α



Στο τρίγωνο ΒΓΖ → $BZ^2 = B\Gamma^2 - \Gamma Z^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}$,

ἐξ οὗ : $\boxed{BZ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}$

καὶ $\boxed{BH = \frac{2}{3} \cdot BZ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.}$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΗΒ ἔχομεν :

$\upsilon^2 = AB^2 - BH^2 = \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{6\alpha^2}{9}$. Ἄρα : $\boxed{\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.}$

Το Η είναι το κέντρο βάρους του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ της βάσης, επομένως ΒΗ = 2ΒΖ/3 και ΗΖ = ΒΖ/3


Η πυραμίδα του Χέοπα

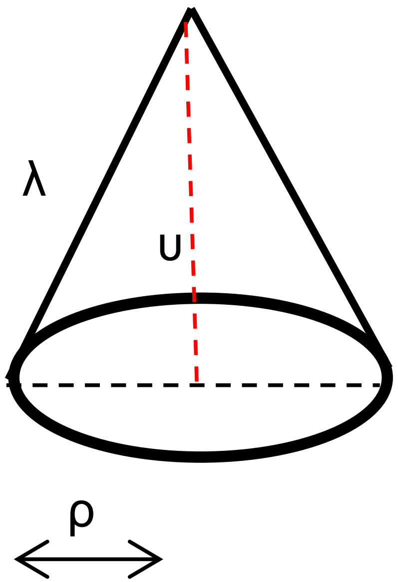
ΚΩΝΟΣ

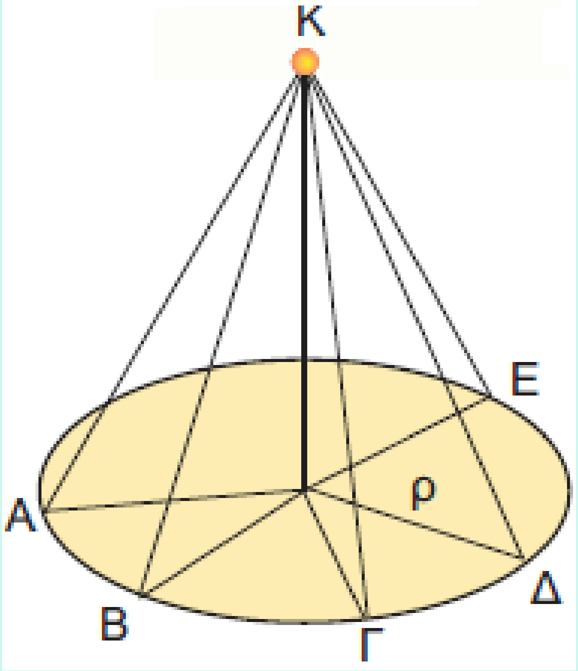
Επ = εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας	=	$\pi.\rho.\lambda$
Εβ = εμβαδόν βάσης	=	$\pi.\rho^2$
Εολ = εμβαδόν κώνου	=	Επ + Εβ
V = όγκος	=	$(\pi.\rho^2.\upsilon) / 3$

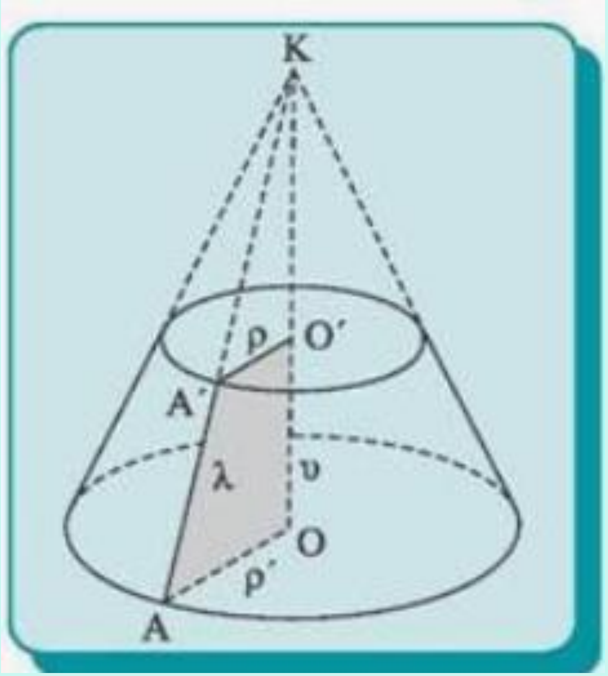
λ = γενέτειρα

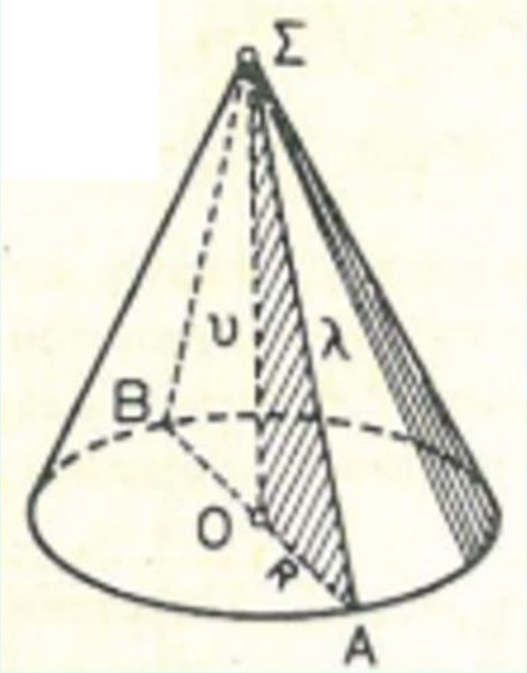
υ = ύψος

ρ = ακτίνα βάσης









ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Προέρχεται από τον κώνο , όταν φέρω παράλληλο επίπεδο προς την βάση.

Επ = εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας = π.λ.(ρ1 + ρ2)

Εολ = εμβαδόν κώνου = π.λ.(ρ1 + ρ2) + π.($ρ1^2$ + $ρ2^2$)

V = όγκος = [π.υ.($ρ1^2$ + $ρ2^2$ + ρ1.ρ2)] / 3

λ = γενέτειρα

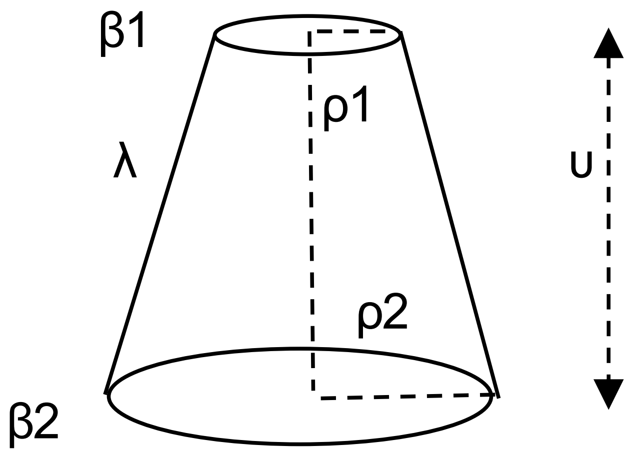
υ = ύψος

ρ1 = ακτίνα επάνω βάσης

ρ2 = ακτίνα κάτω βάσης

β1 = επάνω βάση

β2 = κάτω βάση



ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

E_β = εμβαδόν βάσης = $\pi\rho^2$

E_π = εμβαδόν παράπλευρης = $2\pi\rho\upsilon$

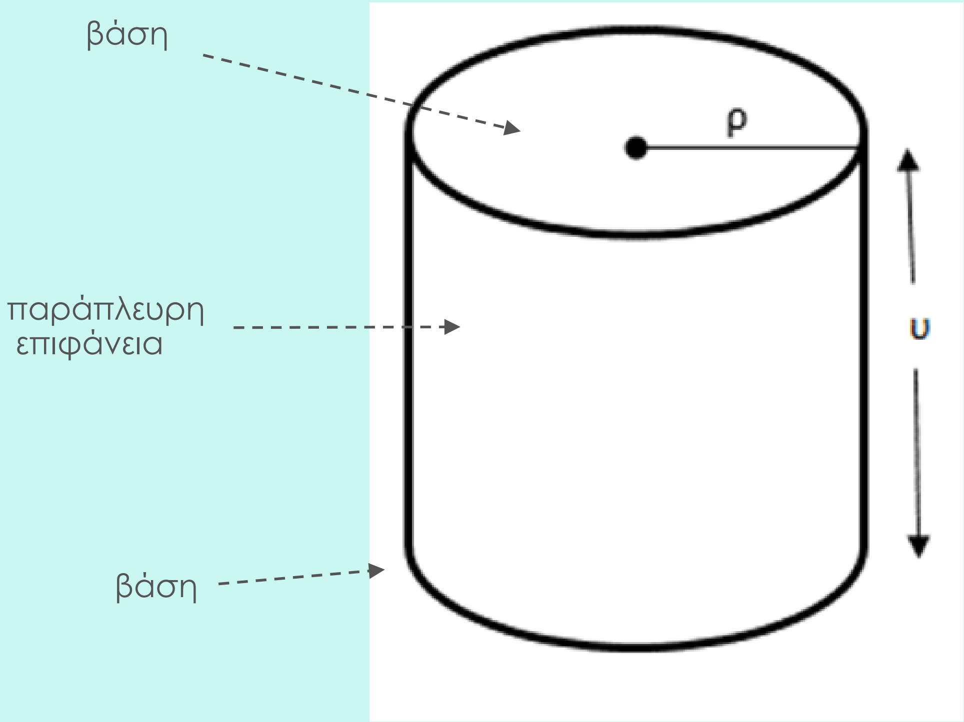
$E_{o\lambda}$ = $2E_\beta + E_\pi$ =

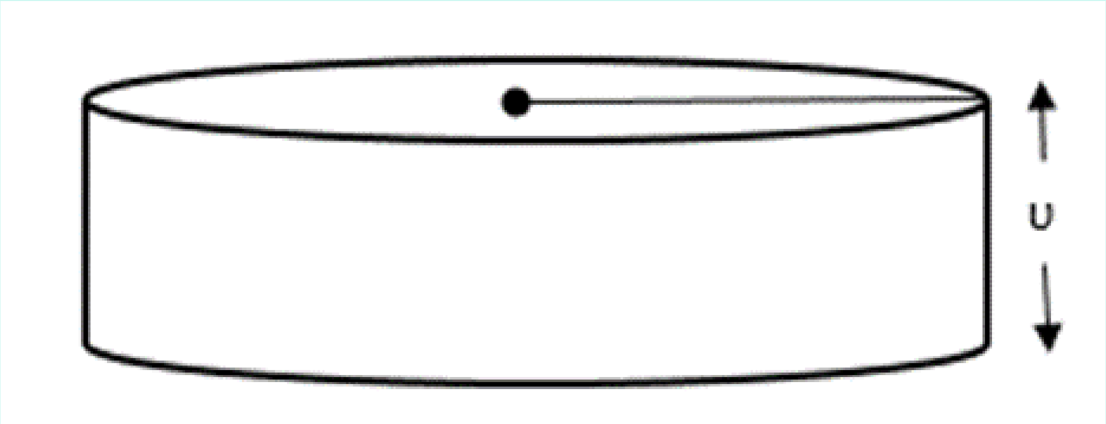
= $2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\upsilon$

V = όγκος = $E_\beta \cdot \upsilon$ =

= $\pi\rho^2\upsilon$

ρ = ακτίνα βάσης
υ = ύψος κυλίνδρου

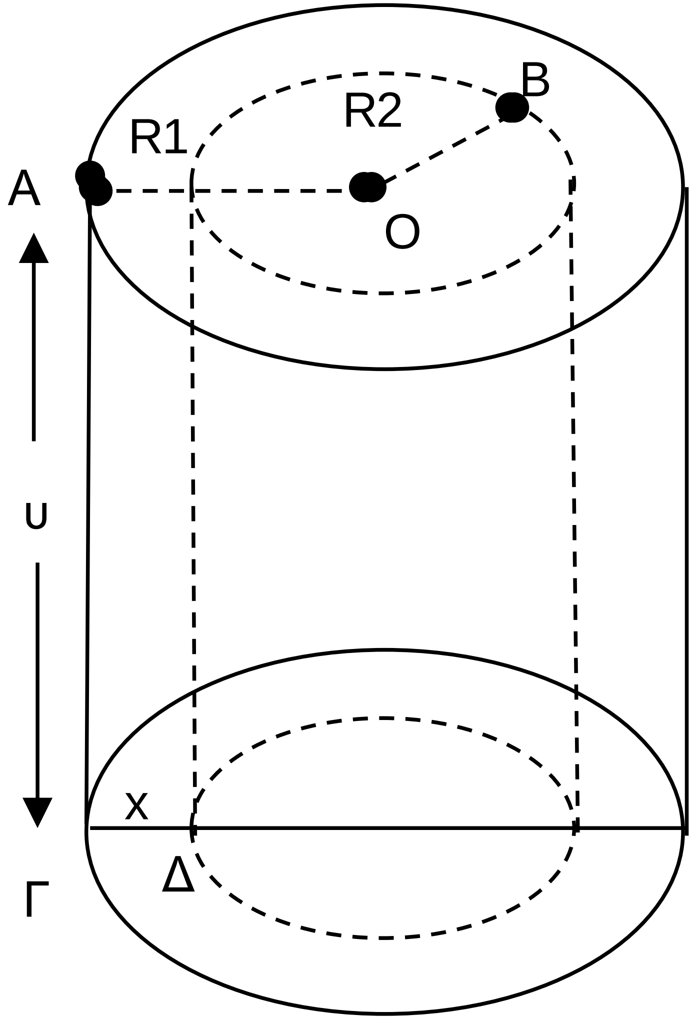




ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ

$E1$ = εμβαδόν βάσης εξωτερικού κύκλου
$E2$ = εμβαδόν βάσης εσωτερικού κύκλου
$E1 - E2$ = εμβαδόν βάσης κυλινδρικού δακτυλίου
$V1$ = όγκος εξωτερικού κυλίνδρου
$V2$ = όγκος εσωτερικού κυλίνδρου
$V = V1 - V2$ = όγκος κυλινδρικού δακτυλίου
$R1 = OA$ = ακτίνα του μεγάλου κύκλου της βάσης
$R2 = OB$ = ακτίνα του μικρού κύκλου της βάσης
$\chi = R1 - R2$ = πάχος κυλινδρικού δακτυλίου

$\chi = \Gamma\Delta$

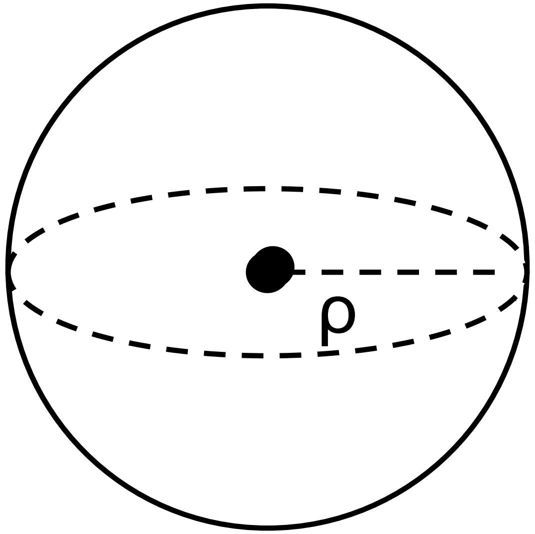


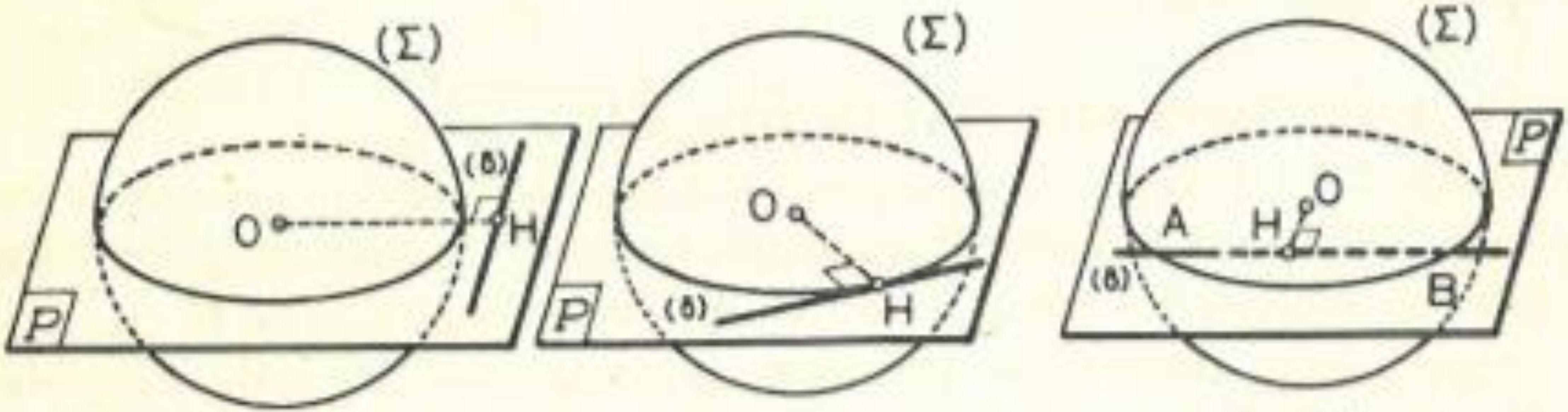
NASA Gemini Mission

ΣΦΑΙΡΑ

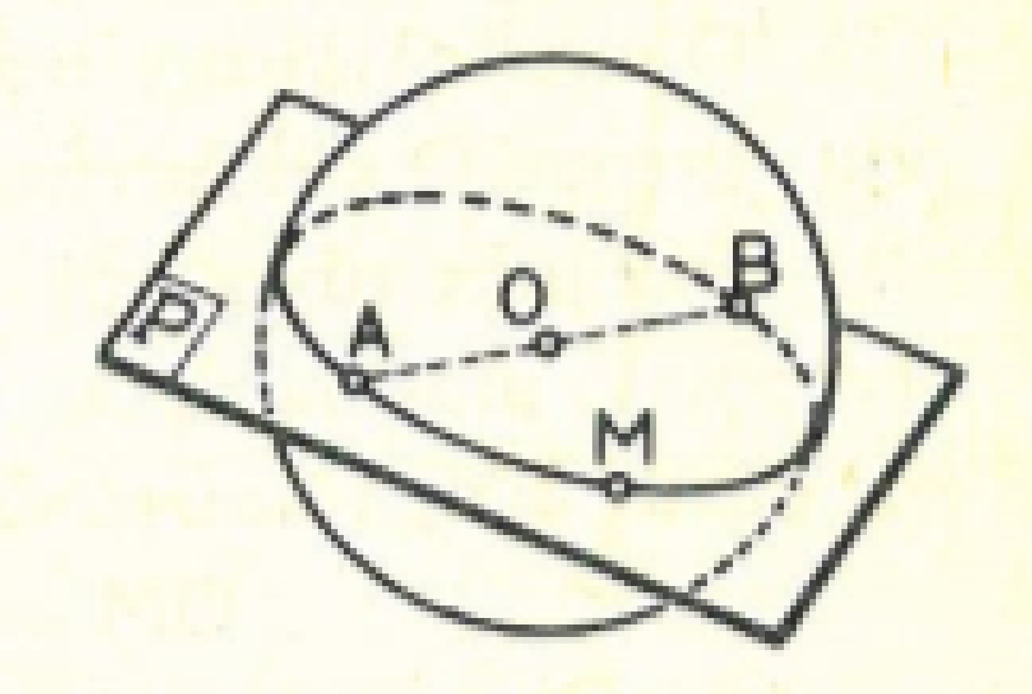
E = εμβαδόν σφαίρας = $4\pi\rho^2$

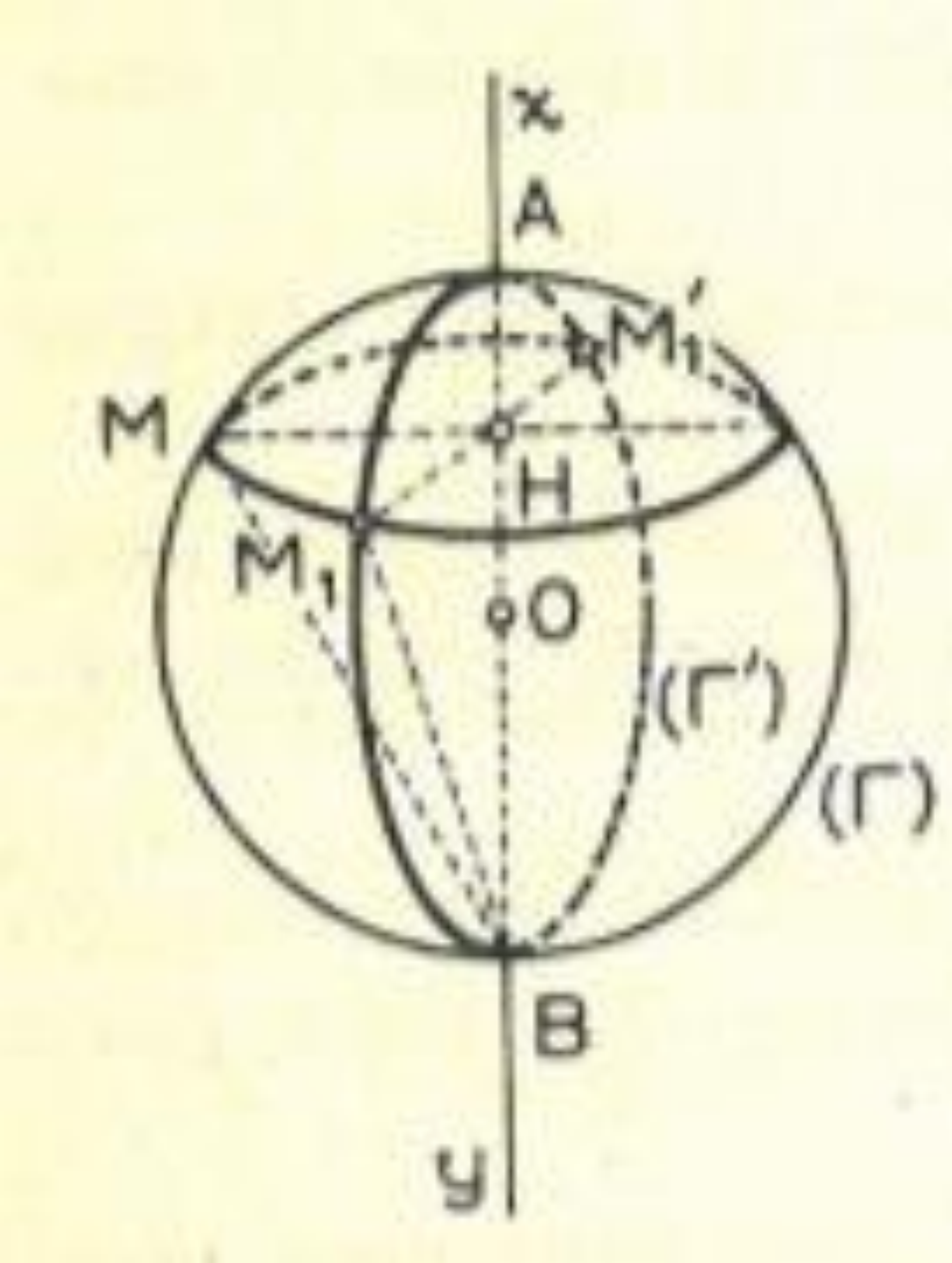
V = όγκος = $(4.\pi.\rho^3)/3$

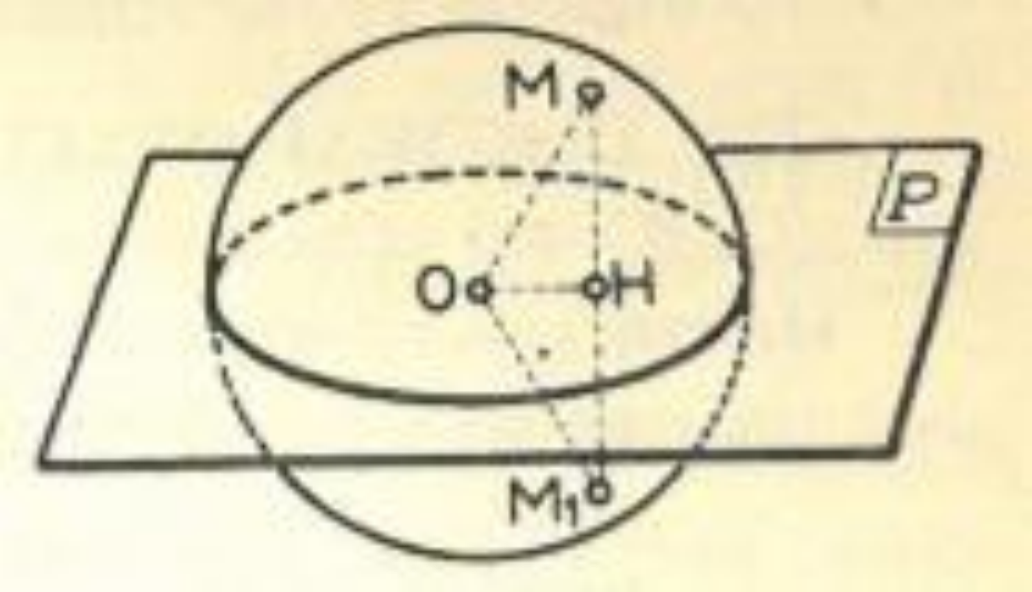




Σφαίρα

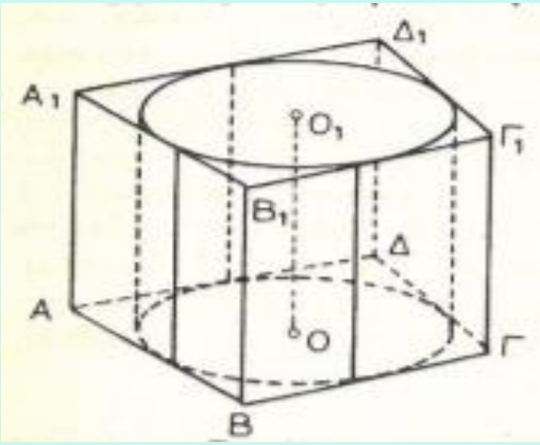






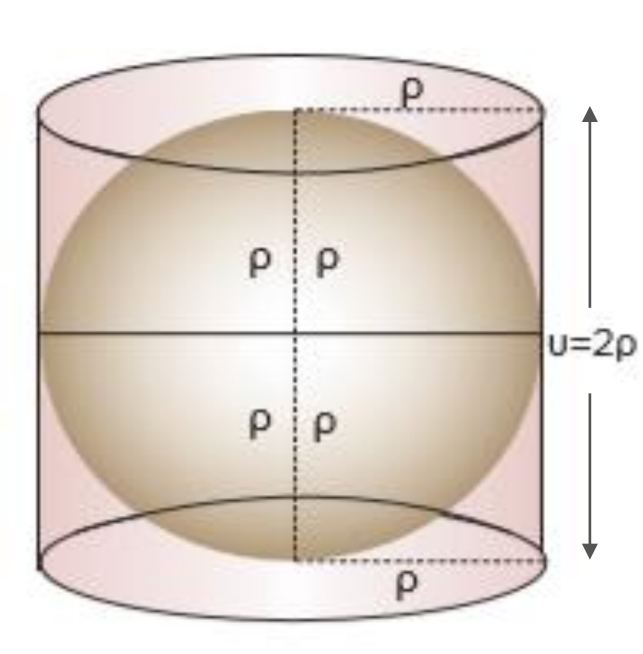
V = όγκος του χώρου μεταξύ κύβου και κυλίνδρου =

$= V_{κύβου} - V_{κυλίνδρου}$



V = όγκος του χώρου μεταξύ κυλίνδρου και σφαίρας =

$= V_{κυλίνδρου} - V_{σφαίρας}$



Οι αποδείξεις του Αρχιμήδη.

Ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (287 π.Χ – 212 π.Χ) ήταν διάσημος αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός, εφευρέτης και αστρονόμος.

Ο Αρχιμήδης απέδειξε το εξής:

Όταν μία σφαίρα είναι μέσα σε έναν κύλινδρο στον οποίο εφάπτεται εσωτερικά στην κυλινδρική του εσωτερική επιφάνεια και στις δύο βάσεις του, τότε:

1) Ο όγκος της σφαίρας είναι ίσος με τα 2/3 του όγκου του κυλίνδρου που την περιβάλει.

2) Η ολική επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με τα 2/3 της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου που την περιβάλει.