Απαντήσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού Πανελλαδικών 18-5-2016

A1: Θεώρημα σελίδα 262, ερώτημα *i.*

A2: Ορισμός σελίδα 141.

A3: Θεωρία σελίδα 246-247.

A4: α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

B1: Είναι $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, με $x \in \mathcal{R}$, συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

- ✓ $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1)-x^2 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, με ρίζα το 0.
- ✓ Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	-∞		0		+∞
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$		↘	min	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, αφού $f'(x) < 0$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αφού $f'(x) > 0$, οπότε στο 0 έχουμε ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

B2: $f''(x) = 2\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)' = 2\frac{(x^2+1)^{\cancel{2}}-x\cdot 2\cdot \cancel{(x^2+1)}\ 2x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{x^2+1-4x^2}{x^2+1} = 2\frac{1-3x^2}{x^2+1}$.

- ✓ $f''(x) = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- ✓ Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (τα πρόσημα στην f'' ξεκινάνε από δεξιά με μείον, αφού στο τριώνυμο έχουμε συντελεστή -3 και τίθενται εναλλάξ) :

x	-∞		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		+∞
$f''(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$		↘	Σ.Κ.	↗	Σ.Κ.	↘	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και στο $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$, ενώ στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ είναι κυρτή. Επίσης έχουμε 2 σημεία καμπής το $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και το $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

B3: Η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, αφού δεν υπάρχει άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού της που δεν ορίζεται, όπως επίσης και δεν υπάρχει σημείο ασυνέχειας.

- ✓ Αναζητούμε πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες της μορφής $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$.

  - ➢ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{0} = \boldsymbol{\lambda}.$

  - ➢ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \mathbf{1} = \boldsymbol{\beta}.$

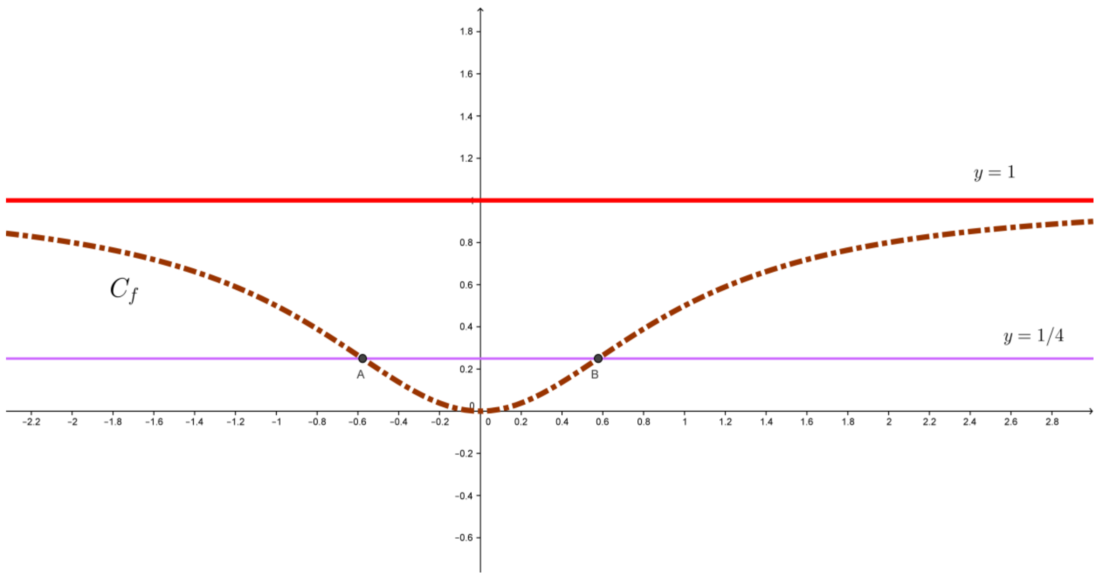
- ✓ *Συμπερασματικά: η $(\varepsilon): y = 1$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$.*

B4: Παρατηρούμε ότι: $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)$, για κάθε $-x,\ x \in \mathcal{R}$, άρα η f είναι άρτια, που σημαίνει ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον ψ΄ ψ, καθώς επίσης $f(x) \geq 0$, $f(0) = 0$, $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$ και σύνολο τιμών $[\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

- ✓ Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	Σ.Κ. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$	→	min $f(0) = 0$	↗	Σ.Κ. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$	↗	1

- ✓ Άρα έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



Γ1: Αν $h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathcal{R}$, η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$.

- ✓ $h(0) = 0$ και $h'(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)' = 2x \cdot e^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right)$.
- ✓ Για τη μελέτη του πρόσημου της h' ως γινόμενου των $2x$ και $e^{x^2} - 1$ έχουμε:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$e^{x^2} - 1$		$+$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	min $h(0) = 0$	$\nearrow$	

- ✓ *Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, αφού $h'(x) < 0$ και γνησίως αύξουσα στο*

  $[0, +\infty)$, *αφού $h'(x) > 0$, οπότε στο 0 έχουμε ολικό ελάχιστο το $h(0) = 0$.*

  Άρα $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ και η μοναδική λύση της $h(x) = 0$ είναι η $x = 0$.

Γ2: Για κάθε $x \in \mathcal{R}$ δίνεται συνεχής f, ώστε:

- ✓ $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Rightarrow |f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Rightarrow |f(x)| = |h(x)| \xRightarrow{\Gamma 1: h(x) \geq 0} |f(x)| = h(x)$.
- ✓ Επίσης με $x = 0$ έχουμε: $|f(0)| = h(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
- ✓ Έτσι για κάθε $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$, οπότε η συνεχής f διατηρεί σταθερό πρόσημο.
  - Αν $f(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, τότε $f(x) = -h(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$.
  - Αν $f(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, τότε $f(x) = h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.
  - Αν $f(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$, τότε $f(x) = -h(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$.
  - Αν $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, τότε $f(x) = h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω η συνεχής f έχει έναν από τους εξής τύπους:

- ✓ $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathcal{R}$
- ✓ $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$, $x \in \mathcal{R}$.
- ✓ $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 , & x \geq 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) , & x < 0 \end{cases}$

✓ $f(x)=\begin{cases}-(e^{x^2}-x^2-1)\,, & x\geq 0\\ e^{x^2}-x^2-1\,, & x<0\end{cases}$.

Γ3: Με $f'(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)'=2x\cdot e^{x^2}-2x\,,\, x\in\mathcal{R}$, θα πάρουμε:

✓ $f''(x)=2\cdot e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}-2$.

✓ $f^{(3)}(x)=4x\cdot e^{x^2}+8x\cdot e^{x^2}+8x^3\cdot e^{x^2}=12x\cdot e^{x^2}+8x^3\cdot e^{x^2}=4x\cdot e^{x^2}(3+2x^2)$.

✓ Ακολουθεί πίνακας πρόσημου για την $f^{(3)}$ και μονοτονίας για την f'' .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{(3)}(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\searrow$	min $f''(0)=0$	$\nearrow$	

✓ ***Η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$, αφού $f^{(3)}(x)<0$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αφού $f^{(3)}(x)>0$, οπότε στο 0 έχουμε ολικό ελάχιστο το $f''(0)=0$. Έτσι η f'' είναι θετική, εκτός από το σημείο μηδέν, άρα η συνεχής f' είναι γνησίως αύξουσα (*** *αφού η f'' δεν αλλάζει πρόσημο δεξιά κι αριστερά του μηδενός* ***) και η f κυρτή σε όλο το $\mathcal{R}$.***

Γ4: Αν $g(x)=f(x+3)-f(x)$, τότε $g(|\eta\mu x|)=f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)$ κι έτσι αρκεί να λυθεί η εξίσωση: $g(x)=g(|\eta\mu x|)$. (1)

✓ Η g είναι παραγωγίσιμη από πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων με:

$g'(x)=f'(x+3)(x+3)'-f'(x)=\; f'(x+3)-f'(x)$. (2)

✓ Η f κυρτή στο $\mathcal{R}$, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα κι έτσι:

$x<x+3\Rightarrow f'(x)<f'(x+3)\overset{(2)}{\Longrightarrow} f'(x+3)-f'(x)>0\Rightarrow g'(x)>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$, ως συνεχής, οπότε η g είναι '1-1' .

✓ Από (1): $g(x)=g(|\eta\mu x|)\xrightarrow{\text{'1-1'}}|\eta\mu x|=x\xrightarrow{\text{στο }[0,+\infty)}|\eta\mu x|=|x|\Rightarrow x=0$,

αφού στην τριγωνομετρική ανισότητα $|\eta\mu x|\leq|x|$, με $x\in\mathcal{R}$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Δ1: ***Εύρεση του $f(0)$:***

- *α΄τρόπος:* Αν $g(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}\Rightarrow f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}[g(x)\cdot\eta\mu x]=1\cdot 0=0$, αφού: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1=\lim_{x\to 0}g(x)$. Επίσης η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $\mathcal{R}$ και άρα $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0.$
- *β΄τρόπος:* Με $x=0$ στην $e^{f(x)}+x=f\big(f(x)\big)+e^x$ έχουμε: $e^{f(0)}=f\big(f(0)\big)+1$.

  Θέτω μεταβλητή $u=f(0)$, με $u\in\mathcal{R}$, και τότε: $e^u=f(u)+1\Rightarrow f(u)=e^u-1,$ με $u\in\mathcal{R}$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ και άρα: $f'(u)=e^u>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα ως συνεχής στο $\mathcal{R}$ και $f(0)=0,$ άρα η u=0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(u)=0.$

Εύρεση του $f(\pi)$:

$$\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\eta\mu x dx$$

$$=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi \big(f'(x)\big)'\eta\mu x dx=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+[f'(x)\eta\mu x]_0^\pi$$

$$-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+0-\left([f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi+\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx\right)$$

$$=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx-\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0=f(\pi)=\pi\,.$$

(αφού από υπόθεση $\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\eta\mu x dx=\pi$).

Εύρεση του $f'(0)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\eta\mu x}\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-0}{x-0}\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right]=1\Rightarrow f'(0)=1$$

(αφού: $f(0)=0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$).

Δ2α: Έστω ότι υπάρχει τοπικό ακρότατο (Τ.Α.) σε σημείο $x_0\in\mathcal{R}$, τότε από το Θεώρημα Fermat-αφού η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$, άρα και στο x_0-θα έχουμε: $f'(x_0)=0.$

- Ισχύει: $e^{f(x)}+x=f\big(f(x)\big)+e^{x}$, για κάθε $x\in\mathcal{R}$, που είναι ισότητα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας θα πάρουμε: $e^{f(x)}f'(x)+1=f'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)+e^{x}$, για κάθε $x\in\mathcal{R}$.
- Με $x=x_0$ και επειδή $f'(x_0)=0$, θα έχουμε:

  $$e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Rightarrow e^{x_0}=1\Rightarrow x_0=0\,.$$

  Οπότε $f'(0)=0$ και $f'(0)=1$(από Δ1), που σημαίνει ότι η f' (συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathcal{R}$) είναι δίτιμη, δηλαδή δεν είναι συνάρτηση. Καταλήξαμε σε άτοπο με την υπόθεση ότι σε ένα σημείο x_0 υπάρχει Τ.Α. , άρα δεν υπάρχουν ακρότατα.

Δ2β: Από το προηγούμενο ερώτημα $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathcal{R}$ και η f' συνεχής στο $\mathcal{R}$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathcal{R}$ και αφού $f'(0)=1$, θα έχουμε ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathcal{R}$ και άρα η f θα είναι γνησίως αύξουσα ως συνεχής στο $\mathcal{R}$.

Δ3: Ισχύει: $\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|+\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}=\frac{2}{f(x)}\,.$

($|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\leq|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|\leq 1+1=2$ και για $x>0\Rightarrow f(x)>0$, δηλαδή $|f(x)|=f(x)$, καθώς το χ τείνει προς το $+\infty$).

Άρα: $\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\frac{2}{f(x)}\,.$ (1)

- Έχουμε: $\boldsymbol{D_f}=(-\infty,+\infty)$, $\boldsymbol{f(R)}=\boldsymbol{R}$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$, άρα:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. (2)

  (Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathcal{R}$, δεν έχει μέγιστο. Για πραγματικό αριθμό $m>0$, υπάρχει $x_0\in(0,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)>m$. Για $x>x_0\xrightarrow{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}f(x)>f(x_0)>m$.

Οπότε για κάθε m θετικό υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε για κάθε $x > x_0$ να ισχύει $f(x) > m$, που σημαίνει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$).

Από (2) συνεπάγεται $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{f(x)}$ και από (1) η συνάρτηση $h(x) = \frac{ημx+συνx}{f(x)}$ φράσσεται κατά απόλυτη τιμή από το 0 (*είναι φραγμένη επί μηδενική*), οπότε:

$$\lim_{x \to +\infty} |h(x)| \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{f(x)} \Rightarrow \left| \lim_{x \to +\infty} h(x) \right| \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0 \; .$$

(Άλλος τρόπος για το συμπέρασμα είναι να εφαρμοστεί κριτήριο παρεμβολής)

Δ4: Το ζητούμενο ολοκλήρωμα θέτω:

$$I = \int_0^{e^\pi} \frac{f(lnx)}{x} dx$$

Με $lnx = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$ και όταν $x \to 1$ τότε $\to 0$, ενώ όταν $x \to e^\pi$ τότε $u \to \pi$.

Έτσι έχουμε:

$$I = \int_0^{\pi} f(u) du$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$, δηλαδή και στο $[0, \pi]$, οπότε:

$$0 \leq u \leq \pi \xrightarrow{f\ γν.αύξουσα} f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Rightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi \xrightarrow{η\ ισότητα\ δεν\ ισχύει\ παντού}$$

$$\int_0^{\pi} 0du < \int_0^{\pi} f(u)du < \int_0^{\pi} \pi du \Rightarrow 0 < I < \pi[u]_0^\pi \Rightarrow 0 < I < \pi(\pi - 0) \Rightarrow 0 < I < \pi^2,$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

18-05-2016