Απαντήσεις Μαθηματικών Κατεύθυνσης 25-5-2015

Α1: Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών σελίδα 194.

Α2: Ορισμός σελίδα 188.

Α3: Ορισμός σελίδα 259.

Α4: α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

Β1: $|z-4| = 2|z-1| \Rightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Rightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Rightarrow$

$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Rightarrow 3z\bar{z} = 12 \Rightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$.

Άρα έχουμε γεωμετρικό τόπο κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ=2.

Β2α:

- ✓ Αν $w = \overline{w} \Leftrightarrow w \in \mathcal{R}$.
- ✓ $w = \overline{w} \Rightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \Rightarrow 2{z_1}^2\overline{z_1}\,\overline{z_2} + 2{z_2}^2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = 2\overline{z_1}^2 z_1 z_2 + 2\overline{z_2}^2 z_1 z_2 \Rightarrow$

$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\,z_2 = \overline{z_1}\,z_2 + z_1\overline{z_2}$, οπότε ισχύει(διαιρέσαμε πρώτα διά 2 κι έπειτα διά 4, αφού απαλείψαμε τα $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = 4$).

Β2β: $|w| \le \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = 2 + 2 = 4$ και αφού $\boldsymbol{w \in \mathcal{R} \Rightarrow -4 \le w \le 4.}$

Β3: $w = -4 \Rightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2 \Rightarrow {z_1}^2 + {z_2}^2 = -2z_1z_2 \Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Rightarrow z_1 = -z_2.$

Άρα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $(A\Gamma) = |z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1||2i-1| = 2\sqrt{5}$

και $(B\Gamma) = |z_3 - z_2| = |2iz_1 + z_1| = |z_1||2i+1| = 2\sqrt{5}$, οπότε είναι ισοσκελές.

Γ1: Είναι $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$, με $x \in \mathcal{R}$, συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

- ✓ $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \ge 0.$
- ✓ Στο $x_0 = 1$ έχουμε πιθανή θέση ακρότατου, όμως σύμφωνα με το θεώρημα για τα τοπικά ακρότατα ή κριτήριο της 1ης παραγώγου, η f' διατηρεί πρόσημο δεξιά κι αριστερά του 1 και είναι θετική, άρα

η f δεν έχει ακρότατα, είναι γνησίως μονότονη, γνησίως αύξουσα, αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathcal{R}$ και βέβαια και στο 1.

- ✓ Αφού η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathcal{R}$ και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της θα είναι:

  $f(\mathfrak{R}) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (a, b)$.

- ✓ $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} e^x\right) = 0 \cdot 0 = 0.$

- ✓ $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \underset{d.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2+1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{d.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$

  Άρα $\boldsymbol{f(\mathfrak{R}) = (0, +\infty)}$.

Γ2: $f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right) = \frac{e^2}{5} = f(2) \xRightarrow{\text{f:"1-1"}} e^{3-x}(x^2+1) = 2 \Rightarrow \frac{e^{x-3}}{x^2+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{e^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^3}{2} \in (0, +\infty).}$$

Άρα έχουμε 1 ακριβώς ρίζα μιας και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$.

Γ3: Για την συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, συνεχή και παραγωγίσιμη για κάθε $\chi > 0$, αφού $f(t)$συνεχής,

εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού στο θετικό διάστημα [2x,4x] κι έχουμε:

- F συνεχής στο [2x,4x]
- F παραγωγίσιμη στο (2x,4x) , άρα υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (2x, 4x)$ τέτοιο ώστε:

  $\boldsymbol{F'(\xi) = \frac{F(4x)-F(2x)}{4x-2x} \Rightarrow f(\xi) = \frac{\int_a^{4x} f(t)dt - \int_a^{2x} f(t)dt}{2x} \Rightarrow f(\xi) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}}$.

Όμως: $\boldsymbol{\xi < 4x \underset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\xi) < f(4x) \Rightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \Rightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)}$, για κάθε $\chi > 0$.

Γ4: Επειδή $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt\,, & x > 0 \\ 2 & ,x = 0 \end{cases}$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(F(4x) - F(2x)\right) & ,x > 0 \\ 2 & ,x = 0 \end{cases}.$$

- ✓ Η g είναι συνεχής στο 0 αφού: $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}\left(F(4x) - F(2x)\right) \underset{d.L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\left(F(4x)-F(2x)\right)'}{x'} =$
  $\lim\limits_{x\to0^+} \left(F(4x) - F(2x)\right)' = \lim\limits_{x\to0^+} [4F'(4x) - 2F'(2x)\,] = 2F'(0) = 2f(0) = 2 = g(0).$

- ✓ Η g είναι συνεχής $\chi \geq 0$ και παραγωγίσιμη $x > 0$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = \frac{\left(F(4x)-F(2x)\right)'x-\left(F(4x)-F(2x)\right)}{x^2} = \frac{4xF'(4x)-2xF'(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} =$$

$$\frac{2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt+2x(f(4x)-f(2x))}{x^2} > 0,$$ αφού $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$, από Γ3 και $2x\left(f(4x) - f(2x)\right) > 0$, αφού χ>ο και $f(4x) - f(2x) > 0$ (η f είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή $f(4x) > f(2x)$).

- ✓ Συμπερασματικά η g είναι ως συνεχής γνήσια αύξουσα στο [0,+∞), αφού έχει θετική παράγωγο στο ανοιχτό.

Δ1: Με $x \in \mathcal{R}$ ισχύει: $f'(x)(e^{f(x)} + e^{-f(x)}) = 2 \Rightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Rightarrow$

$\left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right)' = (2x)' \Rightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$,με $c \in \mathcal{R}$. Θέτουμε χ=0 κι έχουμε:

$e^{f(0)} - e^{-f(0)} = 2 \cdot 0 + c \Rightarrow 1 - 1 = c \Rightarrow c = 0$. Έτσι: $\boldsymbol{e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x,\ x \in \mathcal{R}.\ (1)}$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $e^{f(x)}$ παίρνουμε: $e^{2f(x)} - e^0 = 2xe^{f(x)} \Rightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \Rightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow \left(\boldsymbol{e^{f(x)} - x}\right)^2 = x^2 + 1.$

Έστω συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) = e^{f(x)} - x},\ x \in \mathcal{R}$, συνεχής στο $\mathcal{R}$, η οποία δεν έχει ρίζα, αφού πρέπει $x^2 + 1 = 0$, που είναι αδύνατο στο $\mathcal{R}$. Έτσι η συνεχής g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathcal{R}$ κι αφού g(0)=1, έχω $g(x) > 0$, δηλαδή:

$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),\ x \in \mathcal{R}}$.

Δ2α: Με $\boldsymbol{f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),\ x \in \mathcal{R}}$, θα έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Επίσης: $f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{1}{x^2+1}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = -\frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$

- ✓ Το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή της και φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	∪ ↗	Σ.Κ.	∩ ↘

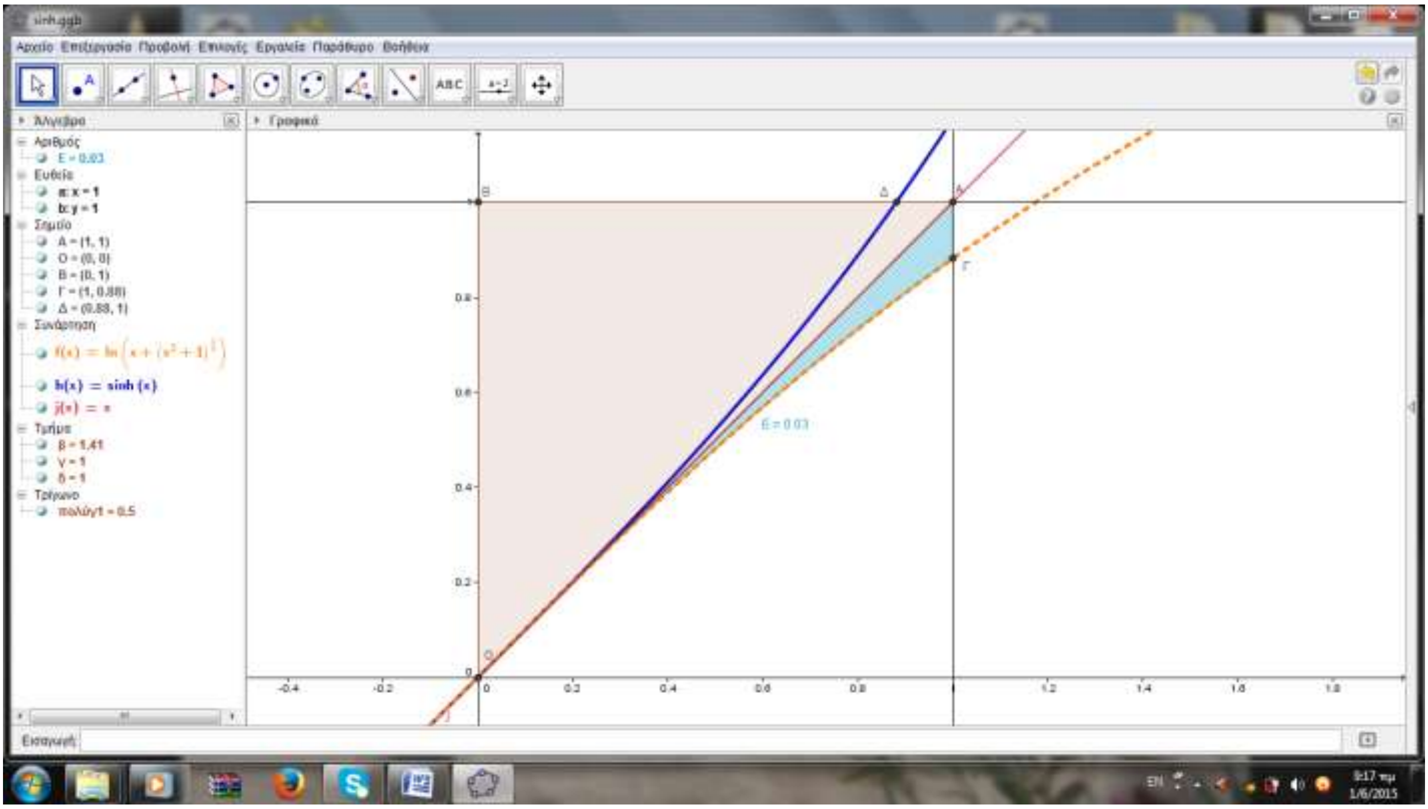
✓ Οπότε: στο $(-\infty, 0]$ η f είναι κυρτή, στο $[0,+\infty)$ είναι κοίλη και το $(0,f(0))=(0,0)$ είναι σημείο καμπής.

Δ2β: Το ζητούμενο εμβαδό είναι το $E=\int_0^1|f(x)-x|dx$. Επειδή η f είναι κοίλη στο [0,1] και η ευθεία $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)$ ή $y=x$, είναι εφαπτομένη της C_f στο (0,0), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η C_f είναι κάτω από την ευθεία εκτός από το σημείο επαφής, άρα $f(x)-x\leq 0$.

Οπότε: $E=\int_0^1[x-f(x)]dx=\int_0^1[x-\ln(x+\sqrt{x^2+1})]dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1-\int_0^1 x'\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx=$

$=\frac{1}{2}-\left[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1+\int_0^1 x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,'dx=\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})\ +ln1+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=$

$=\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})\approx 0{,}03\text{τ. μ.}$



Άλλος τρόπος υπολογισμού του εμβαδού: Από την σχέση (1) του Δ1 έχουμε ότι

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x,\ x\in\mathcal{R}$ ή $\frac{e^y-e^{-y}}{2}=x$, με $y\in\mathcal{R}$ ή $f^{-1}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh(x),\ x\in\mathcal{R}.$

Χωρίς την εύρεση του τύπου της f, με την βοήθεια της αντίστροφής της που βρίσκεται εύκολα, καταλήγουμε όπως δείχνει και το σχήμα στο εμβαδό $E=(ABO)-\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})}[1-f^{-1}(x)]dx=\frac{1}{2}-[x]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}+$

$$+\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$-1 = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}) - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}03\tau.\mu.$$

(για τα άκρα ολοκλήρωσης ισχύει: $f(0) = f^{-1}(0) = 0 = a$ και $b = f(1) = \ln(1+\sqrt{2})$)

Δ3: Έχουμε το $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right) ln|f(x)|\right]$ το οποίο λαμβάνοντας υπόψη ότι $f(x) > 0$ για χ>0 και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, έχει την μορφή $0(-\infty)$. Το υπολογίζουμε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με χ, εφαρμόζοντας de L΄Hospital, αφού οι συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι παραγωγίσιμες.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right) lnf(x)\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)}{x} xlnf(x)\right] = 0 \cdot 0 = 0 \text{, αφού:}$$

✓ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{d.L.H.}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)dt}\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)' = \lim_{x\to 0^+}[e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f^2(x)] = 1 \cdot 0 = 0.$

✓ $\lim_{x\to 0^+} xlnf(x) \overset{0(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{lnf(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{d.L.H.}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(lnf(x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{f(x)} f'(x)}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} f'(x) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{f(x)} =$

$$= -f'(0) \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^2)'}{f'(x)} = -1 \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{f'(x)} = -1 \cdot \frac{0}{1} = 0.$$

Δ4: Έστω συνάρτηση $q(x) = (x-2)(1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)dt) + (x-3)(8 - 3\int_0^x f^2(t)dt)$ συνεχής στο [2,3] από αλγεβρικές πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων.

Επίσης: $q(2) = -8 + 3\int_0^2 f^2(t)dt$ και $q(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt.$

Από ερώτημα Δ2α έχουμε: για $x > 0$, $\boldsymbol{f(x) < x \Rightarrow f^2(x) < x^2 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t)\,dt < \int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow}$

$\boldsymbol{-8 + 3\int_0^2 f^2(t)\,dt} < -8 + 3 \cdot \frac{8}{3} \Rightarrow \boldsymbol{q(2)} < 0$. Επίσης: $\boldsymbol{f(x)} < x \Rightarrow \boldsymbol{f(t^2) < t^2 \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt} > 1 - 3 \cdot \boldsymbol{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{q(3)} > 0\,.$$

Έτσι η συνάρτηση $q(x)$ είναι συνεχής στο [2,3] και $\boldsymbol{q(2)q(3)} < 0$ **,** άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 τέτοιο ώστε $q(x_0) = 0$. Ισοδύναμα: $\boldsymbol{\frac{1 - 3\int_0^{x_o - 2} f(t^2)dt)}{x_o - 3} + \frac{8 - 3\int_0^{x_o} f^2(t)dt}{x_o - 2} = 0\,.}$